

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

*В.М. Емельянов*

# ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 539.12(075)  
ББК 22.38я7  
Е 60

*Емельянов В.М. Фундаментальные симметрии: Учебное пособие.* М.: МИФИ, 2008. – 560 с.

Данное пособие посвящено подробному обзору современного положения в физике элементарных частиц. Эта книга может быть полезна как студентам высших курсов технических вузов, так и научным сотрудникам технических институтов.

Пособие подготовлено и реализовано в рамках Инновационной образовательной программы МИФИ.

Рецензент *д-р физ.-мат. наук С.Г. Рубин*

ISBN 978–5–7262–1040–7

© *Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет), 2008*

Редактор *Т.В. Волвенкова*  
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 05.09.2008. Формат 60×84 1/16.  
Уч.-изд. л. 34,5. Печ. л. 35,0. Тираж 150 экз. Изд. № 4/57. Заказ №

---

*Московский инженерно-физический институт (государственный университет).  
115409, Москва, Каширское ш., 31*

*Типография издательства «Тровант», г. Троицк Московской области*

## **Емельянов Валерий Михайлович**



К величайшему прискорбию Валерий Михайлович Емельянов не застал выхода в свет этой книги. Его жизнь оборвалась 4 июля 2008 года. Это был выдающийся педагог и ученый. Его энергия и педагогический талант способствовали воспитанию большого числа высококвалифицированных специалистов МИФИ. Достойной памятью о нем будет продолжение им начатых дел его учениками.



История физики содержит множество примеров, показывающих важность симметричного подхода к анализу экспериментальных данных и развитию новых представлений. Например, загадочные свойства атомов в периодической системе элементов выглядят естественно при рассмотрении их вращательной симметрии. Другой пример – теория относительности становится весьма элегантной, если её сформулировать «из первых принципов» и воспользоваться лоренц-инвариантностью. Каждая частица определяется набором квантовых чисел. Эти числа характеризуют «внутренние» состояния частицы. Их называют «внутренними», чтобы подчеркнуть, что они не имеют отношения к кинетическим состояниям частицы, характеризующимся законами сохранения энергии, импульса и углового момента.

Существование квантового числа в системе всегда возникает вследствие инвариантности системы относительно глобального преобразования, не зависящего от координат пространственно-временной точки, где оно было произведено. Существуют три типа симметрий.

1. Непрерывные симметрии пространства-времени. Согласно теореме Нетер, каждая непрерывная симметрия приводит к сохраняющемуся току. Соответствующие этим симметриям квантовые числа аддитивны, т.е. квантовое число, связанное с заданной симметрией составной системы, получается путем сложения (алгебраического или векторного) квантовых чисел компонент системы.

2. Дискретные симметрии. В этом случае квантовые числа мультипликативны – квантовое число составной системы задается произведением квантовых чисел всех составляющих системы.

3. Унитарные симметрии. С ними связаны фазовые преобразования полей во «внутреннем» пространстве. Таким преобразованиям симметрии соответствует сохранение обобщенного заряда (электрический заряд, барионное, лептонное число и т.д.). Квантовые числа преобразований унитарной симметрии аддитивны.

Любое непрерывное преобразование симметрии можно сделать локальным, т.е. зависящим от координат той пространственно-временной точки, в которой это преобразование проводится. Симметрии, соответствующие преобразованиям такого типа, называются локальными (калибровочными) симметриями.

Очевидно, что точная симметрия очень важна в физике частиц. Она позволяет определить новую частицу в реакции, в которой все другие частицы уже имеют известный набор квантовых чисел. В силу теоремы Нетер, симметрии динамической системы и сохраняющиеся величины оказываются взаимосвязанными. Этот результат широко используется при построении моделей элементарных частиц.

Следует подчеркнуть, что многие симметрии в физике частиц не являются точными симметриями. Говорят, что симметрия нарушена, если некоторая величина, обычно ненаблюдаемая вследствие симметрии, при определенных условиях становится наблюдаемой. Может показаться, что изучение нарушенных симметрий непродуктивно. Но это не так. Во-первых, природа устроена так, что многие симметрии нарушаются. Во-вторых, это нарушение происходит достаточно упорядоченно, и это опять-таки можно использовать при построении моделей элементарных частиц и их взаимодействий.

Среди симметрий особую роль играют фундаментальные симметрии. Они связаны с наиболее общими принципами построения современных теорий элементарных частиц. К таким принципам относится принцип общей ковариантности, выраженный инвариантностью относительно преобразований диффеоморфизмов в общей теории относительности, и принцип эквивалентности любых локальных систем отсчёта, связанный с локальными преобразованиями Лоренца. Эти хорошо известные пространственно-временные симметрии описывают наблюдаемый мир от астрономических масштабов до расстояний  $\sim 10^{-18}$  м. Остаются ли эти симметрии “хорошо работающими” на меньших масштабах. Как ожидается, много новой информации на эту тему будет получено уже достаточно скоро – после начала работы Большого адронного коллайдера ЦЕРН, который заработает в 2008 году.

Эти эксперименты, как мы надеемся, окажутся чрезвычайно важными для установления “внутренних” симметрий элементарных частиц и их взаимодействий.

Как хорошо известно, сохранение электрического заряда в электродинамике связано с инвариантностью этой теории относительно фазовых преобразований, т.е. с  $U(1)$  симметрией. Открытие Гейзенбергом изоспина нуклона привело к  $SU(2)_F$ -симметрии ( $F$  характеризует аромат). Как оказалось, эта симметрия приближённая, на

рушенная электромагнитным взаимодействием. После открытия странных частиц возникла  $SU(3)_F$  симметрия Гелл-Манна и Неймана. В настоящее время основой понимания взаимодействий элементарных частиц является стандартная модель сильных и электрослабых взаимодействий, основанная на  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  группе симметрии.

Достаточно очевидно, что стандартная модель не является “окончательной теорией”. Это утверждение следует как из “внутренних” проблем этой теории, рассмотренных в книге, так и её невозможности описать уже наблюдаемые данные. Речь, прежде всего, идёт о существовании тёмной материи. Эта материя состоит из частиц, не входящих в стандартную модель. С частицами стандартной модели они взаимодействуют лишь посредством гравитации. Стандартную модель следует считать, по-видимому, эффективной квантовой теорией поля, имеющей ограниченную область применимости. Необходимо предполагать существование более общей теории с расширенным составом частиц, новыми взаимодействиями и новыми симметриями. Возможностей, некоторые из которых рассмотрены в книге, здесь чрезвычайно много. Какую (какие?) из них выбрала Природа? Может быть, результаты БАК укажут на “правильные” направления.

Книга организована следующим образом. Во введении приведена классификация пространственно-временных и внутренних симметрий. Лоренцевская и конформная симметрии рассмотрены в главе 1. Обсуждаются представления группы Лоренца, описываются релятивистские состояния массивных и безмассовых частиц. Если происходит спонтанное нарушение лоренцевской симметрии (СНЛС), и при этом все лоренц-неинвариантные эффекты, вызванные СНЛС, являются ненаблюдаемыми, то из этого базисного принципа можно получить калибровочно-инвариантные теории (абелевы и неабелевы), стартуя с произвольного релятивистски-инвариантного лагранжиана.

Глава 2 содержит доказательство СРТ-теоремы, принадлежащее Йосту и основанное на функциях Вайтмана – аналитических продолжениях вакуумных матричных элементов от произведения полей. Показано, что фундаментальность СРТ обусловлена её связью с лоренц-инвариантностью. Глава 3 посвящена симметриям стандартной модели. Рассмотрены как симметрии квантовой хромодинамики, так и симметрии электрослабого сектора. Точные и нару-

шенные симметрии в физике частиц составляют предмет изучения главы 4. В этой главе рассмотрены вигнер-вейлевская и намбу-голдстоуновская реализации симметрии, а также теорема Голдстоуна и механизм Хиггса. Глава 5 посвящена изучению глобальных симметрий стандартной модели. Рассмотрены киральные аномалии, проблемы  $\theta$ -вакуума, сильная CP-проблема и её киральное решение. Обсуждаются вопросы существования реальных намбу-голдстоуновских бозонов и влияние гравитации на глобальные симметрии. В главе 6 обсуждаются дискретные симметрии (пространственная инверсия  $P$ , зарядовое сопряжение  $C$ , обращение времени  $T$ ), а также их комбинации. Приведены наблюдаемые следствия нарушения дискретных симметрий.

Суперсимметрия и супергравитация обсуждаются в главе 7. Показано, что SUSY – один из способов разрешения проблемы иерархий стандартной модели. В этой главе рассмотрены теоретические основы суперсимметрии, спиноры и их свойства по отношению к преобразованиям Лоренца. Построен простейший суперсимметричный лагранжиан и минимальная суперсимметричная стандартная модель. Рассмотрены общие свойства теорий супергравитации в 4-х измерениях. Глава 8 посвящена симметриям Большого объединения. Обсуждаются группы симметрии  $SU(5)$ ,  $SO(10)$ ,  $E_6$ ,  $SU(5) \times SU(5)$ ,  $SU(6)$ , а также их суперсимметричные версии.

Механизмы нарушения фундаментальных симметрий – лоренцевской и CPT – рассматриваются в главе 9. В главе 10 обсуждаются проверки лоренц и CPT – инвариантности в физике высоких энергий, астрофизике и космологии. Проблемы CP-нарушения и возможные пути её разрешения рассматриваются в главе 11. Наконец, в главе 12 содержится обсуждение фундаментальных констант и их связей с фундаментальными симметриями.

Предлагаемая книга является продолжением предыдущей работы автора “Стандартная модель и её расширения”, знакомство с которой рекомендуется читателю.

Выражаю глубокую признательность Б.А. Долгошеину и А.А. Петрухину за интерес к работе и поддержку. Благодарю К.И. Шибаева, А.А. Кириллова и Е.Ю. Солдатову за помощь в подготовке рукописи.

*Москва-CERN, Июнь 2008.*

*В. Емельянов*



## Введение

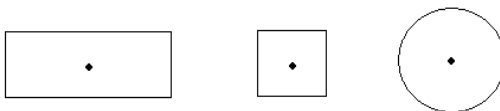
В повседневной жизни под симметрией обычно понимают симметрию между левым и правым (зеркальная симметрия). Для объекта в плоскости это означает существование линии симметрии; а для объекта в пространстве – плоскости симметрии. Если заменить одну часть объекта на другую, он будет выглядеть совершенно одинаково. Пожалуй, это первая симметрия, с которой мы встречаемся в повседневной жизни. Есть ли какие либо причины для появления подобной симметрии у человека и животных? Очевидно, существуют два выделенных направления: направление движения и направление силы тяготения. Вместе эти два направления образуют плоскость в пространстве. Что можно узнать, исследуя отражения? Симметрии обычно отражают некоторые внутренние свойства или характеристики объектов, а также того пространства, к которому принадлежат эти объекты. Легко заметить, что симметрии в природе часто реализованы приближенно, т.е. симметрии бывают нарушенными.

Остановимся на примере кустарников и деревьев. В этом случае есть только одно выделенное направление, задаваемое гравитацией, все горизонтальные направления одинаково хорошо приспособлены для поглощения света, углекислого газа и т.д. Следовательно, деревья и кустарники имеют одну ось симметрии, т.е. обладают вращательной симметрией. Деревья со многими ветками приближенно имеют непрерывную вращательную симметрию относительно вертикальной оси, цветы же обладают дискретной вращательной симметрией. Действительно, многие цветы характеризуются дискретной вращательной симметрией 5-го порядка: они преобразуются сами в себя при повороте на угол  $\frac{n}{5} \cdot 360^\circ$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) относительно оси симметрии. Интересно отметить, что модели роста цветка называют на симметрию  $n \cdot 360^\circ/k$ , где  $k$  – число Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13...).

Что мы понимаем под симметрией?

Грубо говоря, объект называется симметричным (обладает симметрией) если существуют такие его преобразования, при заверше-

нии которых объект выглядит точно так же. Другими словами, преобразование симметрии геометрического объекта (являющегося частью плоскости или пространства) – это преобразование, которое невозможно детектировать. Например, для следующих геометрических фигур невозможно обнаружить эффект вращения относительно их осей симметрии на углы  $180^\circ$ ,  $90^\circ$  и на произвольный угол.



Чем больше симметрий присуще объекту, тем более он симметричен.

Чтобы сформулировать точнее определение симметрии, напомним, что изометрией геометрического объекта в евклидовом пространстве называется преобразование, которое сохраняет все расстояния. Примерами изометрий являются вращения, сдвиги и отражения.

Симметрией или преобразованием симметрии геометрического объекта в евклидовом пространстве называется изометрия, которая отображает объект в самого себя. Если объект допускает определенную симметрию, то говорят, что он обладает инвариантностью относительно преобразований этой симметрии.

Набор всех преобразований симметрии может образовать группу. В этом случае говорят о группе симметрии объекта.

### *Симметрии законов природы*

Симметрия закона природы означает, что мы можем определенным образом преобразовывать этот закон, но при этом мы не встречаемся с какими-либо наблюдаемыми изменениями. Более точно, рассмотрим физическую систему, описываемую некоторыми уравнениями, содержащими набор переменных, зависящих от пространственно-временных координат. Например, рассматривается распространение импульса со скоростью света  $c$ , описываемое

уравнением  $\square \varphi(\vec{r}, t) = 0$ , где  $\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$  – волновой оператор.

Преобразование симметрии физического закона – это такое изменение переменных или пространственно-временных координат, при котором уравнения, описывающие закон, не меняют своего вида в новых переменных и координатах. Говорят, что уравнения сохраняют свою форму, т.е. они ковариантны по отношению к преобразованиям симметрии. Таким образом, реализацию преобразования симметрии невозможно детектировать.

В нашем примере волнового уравнения можно осуществить лоренц-преобразование (сдвиг) скорости  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ . При этом преобразовании пространственно – временные координаты трансформируются в следующие значения

$$x' = \gamma(x - Vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad (\text{B.1})$$

где  $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ . При этих преобразованиях волновой оператор инвариантен, т.е.  $\square' = \square$ . Результат, установленный Лоренцем, состоит в том, что скалярная функция  $\varphi$  имеет одно и то же значение как в трансформированной, так и в первоначальной системе отсчета, т.е.  $\varphi'(\vec{r}', t') = \varphi(\vec{r}, t)$ . Другими словами, волны распространяются одинаково и с одной скоростью  $c$  в двух инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Анализируя распространение волн в космическом корабле, наблюдатель не может определить, находится ли этот корабль в покое (или равномерно и прямолинейно движется).

При дальнейшем рассмотрении ограничимся плоским четырехмерным пространством-временем. Искривленные пространства и симметрии многомерных пространств требуют отдельного рассмотрения.

При классификации симметрий следует различать те, которые действуют на пространственно-временные координаты (геометри-

ческие или пространственно – временные), и те, на которые эти преобразования не действуют (внутренние симметрии).

Геометрические (пространственно-временные симметрии).

К ним относятся:

- временные трансляции:  $t' = t + a^0$  ;
- пространственные трансляции

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a} ; \quad (B.2)$$

- вращения в пространстве:  $\vec{r}' = R\vec{r}$  , где  $a^0 \in R$ ,  $a \in R^3$ ,  $R$  – 3×3 матрица вращений.

Эти преобразования сохраняют форму уравнений временной эволюции, например, уравнения  $m\ddot{\vec{r}} = 0$  в классической механике. Происхождение фундаментальных инвариантностей связано со свойствами пространства (таблица B.1).

Таблица B.1

Свойство	Инвариантность уравнений	Сохраняющаяся величина
Однородность времени	Временная трансляционная инвариантность	Энергия
Однородность пространства	Трансляционная инвариантность	Импульсы
Изотропия пространства	Вращательная инвариантность	Угловой момент

Поскольку изменения координат (B2) – непрерывные преобразования симметрии, то применима **теорема Нетер**:

Ковариантность уравнений движения по отношению к непрерывному преобразованию с  $n$  параметрами подразумевает существование  $n$  сохраняющихся величин (сохраняющихся зарядов или интегралов движения), т.е. подразумевает закон сохранения.

В нерелятивистских теориях, подобных ньютоновской механике или квантовой механике, уравнения временной эволюции ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{V} \cdot t, \quad \vec{V} \in R^3. \quad (B.3)$$

В релятивистских теориях, подобных электромагнетизму, эти преобразования симметрии заменяются преобразованиями Лоренца.

Чтобы обсуждать релятивистские симметрии, с формальной точки зрения, удобно ввести пространство Минковского  $(R^4, (ds)^2)$ , т.е. вещественное векторное пространство  $R^4$ , параметризованное пространственно-временными координатами  $x = (x^\mu)_{\mu=0,1,2,3} = (ct, \vec{r})$  и снабженное метрикой

$$(ds)^2 = (dx)^2 \equiv c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2. \quad (\text{B.4})$$

По определению, группа Лоренца  $L$  – это набор всех вещественных  $4 \times 4$  матриц  $\Lambda$ , которые оставляют метрику Минковского (B.4) инвариантной, т.е. все линейные координатные преобразования  $x \rightarrow x' = \Lambda x$ , для которых  $(dx')^2 = (dx)^2$ . Эти преобразования включают вращения и лоренцевские сдвиги, а также преобразования четности ( $\vec{r}' \rightarrow -\vec{r}$ ) и обращения времени ( $t' \rightarrow -t$ ). Последние преобразования относятся к дискретным, в отличие от непрерывных преобразований.

Пространственно-временные трансляции  $x \rightarrow x + a$  оставляют инвариантной метрику Минковского, поскольку  $d(x + a) = dx$ . Они формируют группу – группу трансляций  $T_\eta$ , т.е. набор отображений  $T_a (a = (a^0, \vec{a}) \in R^4)$ , определенных следующим образом

$$\begin{aligned} T_a : R^4 &\rightarrow R^4, \\ x &\rightarrow T_a(x) = x + a. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Объединяя преобразования Лоренца и трансляции, получаем группу Пуанкаре:

$$P = L \otimes T_\eta \quad (\text{B.6})$$

чьи элементы  $(\Lambda, T_a)$  действуют на  $R^4$ :  $x \rightarrow \Lambda x + a$ . Эти преобразования являются изометриями пространства Минковского.

Обратимся теперь к симметрии «элементарных» частиц.

Элементарная частица – это такой объект, природа которого не изменяется, если он транслируется в пространстве и времени, а также вращается или изучается наблюдателем, движущимся относительно частицы равномерно и прямолинейно. На этой основе Вигнер выдвинул постулат о том, что квантовомеханические состояния такой частицы должны принадлежать гильбертову пространству, содержащему представления группы Пуанкаре. Таким образом, определение элементарной частицы основано на пространственно-временных симметриях, а также на их классификации по массе и спину. Частицы можно рассматривать как квант релятивистского классического поля  $(A_1(x), \dots, A_n(x))$ , т.е. набора пространственно-временных функций  $A_i(x)$ , имеющих определенные трансформационные свойства по отношению к преобразованиям Пуанкаре. Способ взаимодействия этих полей между собой определяется требованием релятивистской ковариантности уравнений движения.

Итак, группа Пуанкаре – это группа инвариантности всех релятивистских теорий, определяющая общую структуру этих теорий.

Следует отметить, что непрерывные симметрии в физике часто формируются в терминах бесконечно малых, а не конечных преобразований, т.е. рассматриваются алгебры Ли (см. Приложение 1).

Есть ли более общие группы (или алгебраические структуры), которые бы включали группу Пуанкаре как подгруппу и представляли физический интерес? Такие расширения группы Пуанкаре существуют, и мы рассмотрим два из них.

### *Конформная группа*

Конформными преобразованиями пространства Минковского являются координатные преобразования  $x \rightarrow x'(x)$ , которые приводят к изменению метрики на положительную функцию

$$(ds')^2 = e^{\Omega(x)} ds^2, \quad (B.7)$$

где  $\Omega$  – плавная вещественная функция. Геометрически это означает, что конформное преобразование сохраняет углы по величине и направлению, хотя оно способно локально плавным образом изменять расстояния. Это свойство существенно при построении гео-

графических карт. Еще Птолемей осуществил стереографическую проекцию сферы на плоскость как конформное отображение. Набор всех конформных преобразований пространства Минковского образует конформную группу. Очевидно, эта группа содержит группу Пуанкаре, для которой  $\Omega = 0$ . Однако она содержит дилатации (рескейлинг или масштабные преобразования) с положительным постоянным фактором  $e^\lambda$

$$x' = e^\lambda x \Rightarrow (ds')^2 = e^\lambda ds^2. \quad (\text{B.8})$$

Конформные теории поля, основанные на конформной группе как группе симметрии, интенсивно изучаются в последние десятилетия. Их отношение к физике частиц сильно ограничивается тем фактом, что наличие массивных частиц в таких моделях предполагает существование непрерывного массового спектра. Масштабные преобразования играют важную роль в описании критических явлений (фазовых переходов) в статистической физике. Двумерные конформные теории поля являются неотъемлемой частью струнных теорий, которые рассматриваются как кандидаты на единую теорию фундаментальных взаимодействий.

### *Пуанкаре супералгебра*

Обозначим через  $P$  алгебру Ли, ассоциированную с группой Пуанкаре, – набор инфинитезимальных трансляций, вращений и сдвигов. Под супералгеброй Пуанкаре понимается прямая сумма

$$G_0 \oplus G_1 \equiv \text{Lie } P \oplus \{\text{SUSY}\}. \quad (\text{B.9})$$

Это супералгебра Ли ( $Z_2$  – градуированная алгебра Ли). Элементам векторных пространств  $G_0$  и  $G_1$  – присваивается степень или четность 0 и 1, т.е. они считаются четными и нечетными (бозонными или фермионными) и записываются в виде  $B = G_0$ ,  $F = G_1$ . Вместо обычного коммутатора Ли  $[A, B] = AB - BA$  вводится  $Z_2$  градуированный коммутатор  $[A, B]$ , который имеет свойства антикоммутатора  $\{A, B\} = AB + BA$ , если  $A$  и  $B$  – оба фермионных элемента. В противном случае,  $\{ \}$  имеет свойства коммутатора. Схематично можно записать

$$[B, B] = B; \quad [B, F] = F; \quad [F, F] = B. \quad (B.10)$$

В супералгебре Пуанкаре соотношение  $[B, B] = B$  суммирует коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре  $B = \text{Ли } P$  и  $F = \{\text{SUSY}\}$ , в которую входят генераторы суперсимметрии  $(Q_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, 4$ . Тогда соотношение  $[F, F] = B$  имеет вид

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{\mu=0}^3 f_{\alpha\beta}^\mu p_\mu, \quad (B.11)$$

где  $f_{\alpha\beta}^\mu \in C$  – структурные константы,  $(p_\mu) \mu = 0, \dots, 3$  – генераторы пространственно-временных трансляций (поскольку  $p_\mu = i\partial_\mu$  в представлении дифференциальными операторами).

Соотношение (B.11) означает, что генераторы суперсимметрии являются «корнями квадратными» из генераторов трансляций.

Если ввести  $4N$  ( $N = 2, 3, \dots$ ) генераторов суперсимметрии  $Q_\alpha^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), то можно определить  $N$ -расширенную супералгебру Пуанкаре.

Суперсимметричная квантовая механика и суперсимметричные теории поля представляют собой реализации Пуанкаре супералгебры. Суперсимметричные генераторы связывают бозонные и фермионные поля, т.е. характеризуют симметрию между этими полями.

### *Внутренние глобальные симметрии*

Рассмотрим в качестве примера эволюцию в квантовой механике свободной частицы массы  $m$  и заряда  $e$ . Эта эволюция описывается уравнением Шредингера

$$H\Psi = i\hbar\partial_t\Psi, \quad (B.12)$$

где  $H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}^2\right)$  – оператор Гамильтона,  $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$  – волновая функция, ассоциированная с частицей. Очевидно, что уравнение (B.12) инвариантно относительно глобального (от  $\vec{r}$  и  $t$  независящего) фазового преобразования



$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha} \Psi, \quad (\text{B.13})$$

где  $\alpha \in R$  и принимает постоянное значение. Заметим, что  $e^{i\alpha}$  – элементы абелевой группы  $U(1)$ .

Подчеркнем, что инвариантность (B.13) представляет собой внутреннюю симметрию: преобразование действует в пространстве полей  $\Psi$ , но не на пространственно-временном многообразии. Согласно теореме Нетер, инвариантность уравнения движения относительно непрерывных преобразований (B.13) подразумевает существование сохраняющегося заряда. Действительно, легко проверить, что интеграл  $\int_{R^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3x$ , который ассоциируется с электрическим зарядом частицы, не зависит от переменной  $t$ , если  $\Psi$  – решение уравнения (B.12).

### *Локальные симметрии*

Теперь рассмотрим локальные (зависящие от  $\vec{r}$  и  $t$ ) или калибровочные преобразования фазы

$$\Psi'(\vec{r}, t) = e^{i\alpha(\vec{r}, t)} \Psi(\vec{r}, t), \quad \alpha(\vec{r}, t) \in R. \quad (\text{B.14})$$

В этом случае уравнение Шредингера (B.12) уже не будет инвариантным относительно этих преобразований. Чтобы это проверить, введем релятивистские обозначения (а также систему единиц, в которой  $c = 1$ ) для производных  $(\partial_\mu \Psi) \equiv \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right) = (\partial_t \Psi, \vec{\nabla} \Psi)$  по

пространственно-временным координатам  $(x^\mu)_{\mu=0,3} = (t, \vec{r})$ . Тогда

$$\partial_\mu \Psi' = e^{i\alpha} \left[ \partial_\mu \Psi + i(\partial_\mu \alpha) \Psi \right], \quad (\text{B.15})$$

т.е. члены  $\partial_\mu \alpha$  присутствуют в «штрихованном» (калибровочно преобразованном) уравнении Шредингера. Таким образом, чтобы калибровочные преобразования (B.14) являлись симметрией теории, нам следует модифицировать уравнения движения (B.12) так, чтобы они сохраняли свою форму при преобразованиях (B.14). Для

этого следует ввести в уравнение движения новые поля, которые бы обеспечили их ковариантность. Простой способ реализации этой идеи – ввести скалярный  $\phi(\vec{r}, t)$  и векторный  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  потенциалы в уравнение Шредингера с помощью процедуры «минимальной» связи: заменить обычные производные на ковариантные

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu^{(A)} \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} A_\mu, \quad (\text{B.16})$$

где  $(A_\mu) = (\phi, -\vec{A})$ .

Иначе говоря, заменить  $\partial_t \rightarrow \partial_t + \frac{ie}{\hbar} \phi$ ,  $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}$ . Кроме того, следует потребовать, чтобы калибровочное векторное поле  $(A_\mu)$  преобразовывалось при калибровочных преобразованиях неоднородно

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{\hbar}{e} \partial_t \alpha \\ A'_\mu &= A_\mu - \frac{\hbar}{e} \partial_\mu \alpha; \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \frac{\hbar}{e} \vec{\nabla} \alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

т.е. компенсировать нежелательные члены с  $\partial_\mu \alpha$  в «штрихованном» уравнении. Действительно

$$\begin{aligned} (D_\mu^{(A)} \Psi)' &\equiv D_\mu^{(A')} \Psi' = (\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} A'_\mu)(e^{i\alpha} \Psi) = \\ &= e^{i\alpha} \left[ D_\mu^{(A)} \Psi + i(\partial_\mu \alpha) \Psi - i(\partial_\mu \alpha) \Psi \right], \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

т.е. ковариантная производная от  $\Psi$  преобразуется точно так же, как и само поле  $\Psi$

$$(D_\mu^{(A)} \Psi)' = e^{i\alpha} D_\mu^{(A)} \Psi. \quad (\text{B.19})$$

После применения процедуры «минимальной» связи уравнение Шредингера принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}\right)^2\Psi=i\hbar\left(\partial_t+\frac{ie}{\hbar}\phi\right)\Psi \quad (\text{B.20})$$

или

$$\frac{1}{2m}(\vec{P}-e\vec{A})\Psi+e\phi\Psi=i\hbar\partial_t\Psi. \quad (\text{B.21})$$

Это дифференциальное уравнение описывает взаимодействие частицы массы  $m$  и заряда  $e$  с электромагнитным полем, ассоциированным с потенциалом  $(A_\mu)$

$$\begin{aligned}\vec{E} &\equiv -\overrightarrow{\text{grad}}\phi - \partial_t\vec{A}, \\ \vec{B} &\equiv \text{rot}\vec{A}.\end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

По своему построению уравнение Шредингера (B.21) инвариантно относительно калибровочных преобразований  $\Psi$  и  $A_\mu$  (которые оставляют неизменным  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ).

Таким образом, мы начали обсуждение с уравнения Шредингера для свободной частицы. Это уравнение инвариантно относительно глобальных  $U(1)$  и преобразований, подразумевающих, согласно теореме Нетер, сохранение электрического заряда. Требование же локальной  $U(1)$  инвариантности подразумевает: 1) введение калибровочного поля  $A_\mu$ ; 2) характер взаимодействия между полями материи и калибровочными полями фиксируется требованием инвариантности. Это проявление калибровочного принципа, играющего важнейшую роль при построении современных моделей элементарных частиц и их взаимодействий. Так, идея неабелевой калибровочной симметрии лежит в основе стандартной модели.

Обратимся теперь к неабелевым калибровочным теориям, основанным на компактных группах Ли  $G$ , например, на унитарной группе  $SU(n)$ . Это группа  $n \times n$  матриц  $A$  с комплексными элементами, при этом  $A^+A=1$  и  $\det A=1$ . Как и в случае квантовой механики, будем предполагать следующее:

а) имеется набор полей материи  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – скалярных или спинорных полей, которые образуют мультиплет  $\Phi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)^t$ ;

б) имеется непрерывная группа симметрии  $G$ ;

в) существует гамильтониан (или лагранжиан), описывающий динамику самовзаимодействия полей  $\Phi_i$  и который инвариантен относительно глобальных внутренних преобразований симметрии  $g \in G$ , т.е.

$$g = e^{i\alpha}, \quad \alpha = \sum_{a=1}^{\dim G} \alpha^a t_a, \quad (\text{B.23})$$

где  $\{t_a\}$   $a=1, \dots, \dim G$  обозначает базис (генераторы) алгебры Ли группы  $G$ ,  $\alpha^a \in R$ .

Заметим, что  $g$  действует на мультиплет посредством  $N \times N$  представления матрицы  $D(g)$ .

Калибровочная процедура  $\alpha^a \rightarrow \alpha^a(x)$  приводит к введению калибровочного поля со значениями в алгебре Ли группы  $G$

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a(x) t_a, \quad (\text{B.24})$$

трансформирующегося неоднородно относительно  $g(x) = e^{i\alpha(x)}$  следующим образом:

$$A'_\mu = g^{-1} A_\mu g + \frac{i}{\lambda} g^{-1} \partial_\mu g, \quad (\text{B.25})$$

где  $\lambda$  – константа связи.

Отметим, что для абелевой группы  $U(1)$  в выражении (B25) следует положить  $G = 1$ ,  $t_1 = 1$ ,  $\alpha^1 \equiv \alpha$  и  $\lambda = \frac{e}{\hbar}$ .

Калибровочные теории, основанные на группах  $U(1)$ ,  $SU(2)$  и  $SU(3)$ , описывают электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия. При этом сохраняющимися зарядами являются электрический заряд, слабый изоспин и барионное число.

Калибруя трансляции ( $a_\mu \rightarrow a_\mu(x)$ ), можно построить общую теорию относительности, которая инвариантна относительно группы общих координатных преобразований  $x \rightarrow x' \approx x + a(x)$ . Аналогично, калибруя преобразования суперсимметрии, приходим к супергравитации – суперсимметричному расширению общей теории

относительности. На самом деле, однако, общая теория относительности строилась иначе. Эйнштейн вывел теорию из единственного симметричного принципа – принципа эквивалентности (инерционной и гравитационной массы), который нашел свое формальное выражение в принципе общей ковариантности: эквивалентности всех систем отсчета при описании физических законов.

### *Локальная симметрия и динамика*

Согласно теореме Нетер, каждая непрерывная симметрия приводит к сохраняющемуся току  $j^\mu(x)$ . Локальная симметрия, такая как калибровочная симметрия электромагнетизма или диффеоморфная симметрия уравнений Эйнштейна, содержит бесконечное число симметрий в каждой пространственно-временной точке. Это означает, что должно быть бесконечное число сохраняющихся токов. Где же они? Определенно, у нас нет бесконечного числа сохраняющихся величин в электромагнетизме.

Чтобы разрешить эту загадку в случае  $U(1)$  локальной симметрии, обозначим через  $F^{\mu\nu}(x)$  напряженность электромагнитного поля,  $A^\mu(x)$  – векторный потенциал, связанный с плотностью тока

$J^\mu(x)$  посредством лагранжиана  $L(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu$ . При инфинитезимальном калибровочном преобразовании  $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x)$  плотность лагранжиана изменяется на величину  $\delta L = J_\mu \partial_\mu \lambda$ . Ток  $j_\lambda^\mu(x) = -F^{\mu\nu}(x)\partial_\nu \lambda(x)$  вызван источником в  $\delta L$ .

При этом

$$\partial_\mu j_\lambda^\mu(x) = \partial_\mu (-F^{\mu\nu}(x)\partial_\nu \lambda(x)) = \delta L(x) = J^\nu(x)\partial_\nu \lambda(x). \quad (B.26)$$

Поскольку  $F^{\mu\nu}(x)$  антисимметричен по двум индексам, то

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + J^\nu(x))\partial_\nu \lambda(x) = 0. \quad (B.27)$$

Отсюда получаем

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + J^\nu(x) = 0, \quad (B.28)$$

поскольку  $\lambda(x)$  – произвольна. Соотношение (B.28) – уравнения Максвелла. Таким образом, локальная калибровочная симметрия полностью определяет динамику, содержащуюся в уравнениях Максвелла.

Как быть с бесконечным числом сохраняющихся зарядов?  $J^\mu$  не сохраняется до тех пор, пока  $J^\mu \neq 0$ . Рассмотрим этот случай. Сохраняющийся заряд

$$Q_\lambda(t) = \int d^3x j_\lambda^0(\vec{x}, t) = - \int d^3x F^{0k} \partial_k \lambda. \quad (\text{B.29})$$

Выполняя интегрирование по частям, и считая, как обычно, что интеграл по поверхности дает ноль, приходим к выводу, что  $Q(t)=0$  для всех  $\lambda(x)$ , если справедлива теорема Гаусса  $d_k F^{0k} = 0$ . Таким образом, в уравнениях Максвелла содержится бесконечное число сохраняющихся токов. Аналогичное явление происходит и с другими локальными симметриями. Локальные симметрии, как известно из стандартной модели и эйнштейновской гравитации, являются симметриями для калибровочных полей со спином единица и гравитационных полей со спином 2. В настоящее время неизвестно локальной симметрии, которая бы включала фермионы и задавала бы их уравнения движения. Удовлетворяет ли этому требованию локальная суперсимметрия?

Теория суперструн указывает на то, что пространство-время 10-мерно, а калибровочная группа либо  $SO(32)$ , либо  $E_8 \times E_8$ . Если Вселенная обладает «изначальной» симметрией, то информация о ней в значительной степени утрачена. Действительно, мы живем в мире с низкой температурой в поздней Вселенной, когда большинство из симметрий спонтанно нарушено.

## *Комбинация пространственно-временных и внутренних симметрий*

Обратимся, к примеру, к группе  $SU(2)$ . Это трехмерная группа Ли, чья алгебра  $SU(2)$  задается матрицами Паули  $\sigma_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . В теориях поля с  $SU(2)$  как группой внутренней симметрии, можно ввести поля  $\pi(x)$ , которые принимают значения в алгебре Ли  $SU(2)$ , т.е.  $\pi(x) = \sum_{a=1}^3 \pi^a(x) \sigma_a$ . Для статических конфигураций

три компоненты  $\pi^a(\vec{r})$  можно связать с тремя компонентами обычного вектора  $\vec{r} = (x^a)$ ,  $a = 1, 2, 3$ ; т.е.  $\pi^a(r) = f(r)x^a$ , где  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ . Обычно этот подход используется в моделях Скирма в ядерной физике. Подобные примеры связаны с монополями и инстантонными конфигурациями в  $SU(2)$  калибровочных теориях. Таким образом, для этих конфигураций (состояний) существует определенное смешивание индексов, связанных с внутренними и пространственно-временными симметриями.

Можно было бы надеяться, что такое сочетание внутренних и пространственно-временных симметрий может существовать на более фундаментальном уровне как общее свойство теории поля, а не только как некоторые полевые конфигурации в конкретных моделях. Эта особенность весьма привлекательна при построении единой теории фундаментальных взаимодействий, включающей гравитацию. Однако это оказывается невозможным в силу, так называемых, no-go теорем. В частности, в силу теоремы Коулмена-Мандулы (см. Приложение 2), наиболее общая группа инвариантности релятивистской квантовой теории поля есть прямое произведение группы Пуанкаре и внутренней группы симметрии, т.е., нет смешивания между этими преобразованиями симметрии.

Однако эти no-go теоремы не дают оснований считать, что такое смешивание невозможно, если набор преобразований симметрий представлен более общей алгебраической структурой, чем группа Ли. Известная теорема Хаага и др. утверждает, что наиболее общей супергруппой Ли симметрий локальной теории поля является

$N$  – расширенная Пуанкаре супергруппа, в которой имеет место нетривиальное смешивание пространственно-временных и внутренних  $SU(N)$  преобразований. Этот результат можно рассматривать как аргумент в пользу существования суперсимметрии как природной симметрии.

### *Дуальные суперсимметрии*

Рассмотрим уравнения Максвелла, содержащие как электрические, так и магнитные источники (гипотетические магнитные монополи)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e; & \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= -\vec{j}_m; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= \rho_m; & \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{j}_e. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Эти уравнения инвариантны относительно дуального преобразования:

$$(\vec{E}, \vec{B}, \rho_e, \rho_m, \vec{j}_e, \vec{j}_m) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E}, \rho_m, -\rho_e, \vec{j}_m, -\vec{j}_e). \quad (\text{B.31})$$

В квантовой механике, как известно, присутствие монополей приводит к квантованию электрических и магнитных зарядов: для заданной частицы эти заряды связаны дираковским условием  $q_e q_m = 2\pi n$ , где  $n$  – целое число. Таким образом, минимальные заряды удовлетворяют соотношению  $q_m = \frac{2\pi}{q_e}$ . Поскольку дуальная

симметрия меняет электрические и магнитные переменные, то можно сказать, что дуальность меняет константу связи  $q_e$  на обратную ей константу (с точностью до фактора  $2\pi$ ). Иначе говоря, и это чрезвычайно важно, дуальные симметрии изменяют режим слабой связи на режим сильной связи и наоборот. Таким образом, в дуальной формулировке теории оказывается возможным изучение физики в области сильной связи, исходя из режима слабой связи. Эта идея оказалась очень плодотворной в струнных теориях и привела к изучению таких протяженных объектов, как мембран или многомерных объектов, которые относятся к  $p$ -бранам ( $p = 1$  для струн,  $p = 2$  для двумерных мембран, ...). Все эти объекты и свя-



занные с ними теории основаны на рассмотрении преобразований дуальности.

### *Дискретные симметрии*

Дискретные пространственно-временные симметрии – четности (P), обращения времени (T) обычно обсуждаются в связи с зарядовым сопряжением (C), которое преобразует заряженную частицу в античастицу с противоположным зарядом. Эта симметрия связывает комплексное поле с комплексно-сопряженным полем. Знаменитая CPT теорема, которую мы будем обсуждать в этой книге, утверждает, что произведение всех трех дискретных симметрий в любой локальной теории поля сохраняется.

Элементарные частицы характеризуются не только массой и спином (связанными с пространственно-временными симметриями) и их зарядом по отношению к калибровочным симметриям (например, электрическим зарядом и слабым изоспином для  $U(1)$  и  $SU(2)$  симметрией), но и другими аддитивными квантовыми числами (например, лептонным числом). Эти аддитивные квантовые числа всегда можно связать с глобальной  $U(1)$  симметрией, поскольку  $g(Q_1) g(Q_2) = g(Q_1+Q_2)$  для  $g(Q) = \exp(iQ\alpha) \in U(1)$ . Таким образом, соответствующие законы сохранения отражают  $U(1)$  инвариантность лагранжиана.

### *Математическое описание симметрий и их применение в физических теориях*

1. *Группы Ли и алгебры.* При изучении нескольких преобразований симметрии можно обнаружить, что они образуют группу. Чтобы ввести точное определение группы, рассмотрим несколько прототипов группы. Наборы  $Z$  и  $R$  чисел, снабженные законом умножения, являются примерами абелевых (коммутативных) групп. Очень полезная группа может быть построена из аддитивной группы  $(Z,+)$  путем идентификации соответственно четных и нечетных чисел: это так называемая фактор-группа

$$Z_2 = Z / 2Z = \{\bar{0}, \bar{1}\} , \quad (B.32)$$

которая состоит из классов эквивалентности четных и нечетных чисел. В этом случае «таблица умножения» выглядит так

$$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}; \quad \overline{0} + \overline{1} = \overline{1} = \overline{1} + \overline{0}; \quad \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}. \quad (\text{B.33})$$

$Z_2$  – представляет собой конечную дискретную группу,  $Z$  – бесконечная дискретная группа,  $R$  – бесконечная группа, характеризуемая одним непрерывным вещественным параметром. Все это примеры одномерных групп Ли. Можно сказать, что группа Ли – это группа, чьи элементы могут быть параметризованы одним или несколькими вещественными числами (их полное число определяет размерность группы). Таким образом,  $(R^n, +)$   $n$ -мерная абелева группа Ли.

Прежде чем обратиться к другим примерам групп, нужно отметить определенные соответствия между группами. Две группы называются изоморфными по отношению друг к другу, если имеется взаимно однозначное соответствие между их элементами, и они имеют одинаковую структуру. Например, группа  $(T_n, \circ)$  трансляций  $R^n$  изоморфна аддитивной группе  $(R^n, +)$ , поскольку соответствие  $T_a \leftrightarrow a$  сохраняет групповое умножение  $T_a \circ T_b = T_{a+b}$ .

Существует большое число конечномерных групп Ли, имеющих физическое значение. Примеры, рассмотренные нами до сих пор, включали группы трансляций и вращений, группы Лоренца, Пуанкаре, группу конформных преобразований (связанных с пространственно-временными симметриями) или специальные унитарные группы, относящиеся к внутренним симметриям. Кроме этих конечномерных групп Ли, существуют и бесконечномерные группы, играющие важную роль в физике. Группа Ли диффеоморфизмов (общих координатных преобразований) является важнейшей составной частью общей теории относительности. Группа Вирасоро – группа диффеоморфизмов единичного цикла составляет фундамент двухмерных конформных теорий поля, которые находят свое приложение в статистической механике и физике твердого тела.

Помимо группы Ли, часто рассматриваются ассоциированные алгебры Ли: это набор инфинитезимальных преобразований дополненный скобкой Ли, которая в случае матричных алгебр представ-

ляет собой обычный коммутатор  $[A, B] = AB - BA$ . Путем экспоненцирования элементов алгебры Ли (т.е. интегрирования инфинитезимальных преобразований) можно восстановить элемент группы Ли.

2. *Физические приложения: представления.* В физике часто встречаются с проблемой, как описать действие преобразования симметрии на определенные объекты. Например, на волновые функции, описывающие электрон в квантовой механике. Для этих целей используется понятие представление группы (или алгебры в зависимости от типа рассматриваемой симметрии).

N-мерное представление  $D$  группы  $G$  определяется следующим образом: каждому  $g \in G$  ставится в соответствие  $N \times N$  матрица  $D(g)$  (линейный оператор N-мерном векторном пространстве) таким образом, чтобы групповая структура сохранялась:  $D(gg') = D(g)D(g')$ . Если соответствие  $g \rightarrow D(g)$  взаимно однозначное, то набор всех представлений  $D(g)$  образует группу, которая изоморфна группе  $G$ . Например, бесконечномерное представление группы трансляций  $(T_n, \circ)$  гильбертова пространства волновых функций  $\Psi(x)$  определяется так:  $T_a \rightarrow D(T_a)$  с  $D(T_a)\Psi = \Psi_a$  и  $\Psi_a(x) = \Psi(x - a)$ .

3. *Обобщения.* Кроме групп Ли и алгебр Ли, при описании симметрии за последние несколько десятилетий в физике использовались и другие алгебраические структуры. Упомянем о них тоже. Преобразования перенормировки, используемые для описания динамических систем в статистической механике или в квантовой теории поля, оказываются необратимыми и образуют полугруппу, традиционно называемую ренорм-группой.

Супералгебры Ли или  $Z_2$  – градуированные алгебры, о которых мы уже упоминали, являются  $Z_2$  – градуированными расширениями обычных алгебр Ли. Пуанкаре супералгебра представляет собой базис всех суперсимметричных теорий поля.

## *Применение симметрий при построении физических теорий*

Как групповые представления применяются при построении физических теорий? Пожалуй, точнее всего ситуацию выразил Вейль: «Насколько я понимаю, все априорные утверждения в физике имеют в своей основе симметрию». Законы природы представляют собой реализацию симметрий природы. «Строительные блоки» физических теорий зачастую определяются и классифицируются, исходя из симметричных соображений. Форма взаимодействия определяется пространственно-временными симметриями (релятивистская ковариантность) и калибровочными симметриями. Использование симметричных соображений является решающим фактором при изучении физической проблемы.

Даже если ничего неизвестно о симметриях физических законов или они не используются при решении конкретной проблемы, симметрии способны проявить себя в решениях. Например, если не рассматривать симметрии уравнения Ньютона  $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}(x)$ , то

для его решения  $x=x(t)$  комбинация  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x(t))$  не зависит от переменной  $t$ . Полная энергия сохраняется вследствие временной трансляционной инвариантности уравнений движения.

### *Различные проявления симметрий*

До сих пор обсуждались точные симметрии законов природы, не заботясь об области их применимости. Имея дело с симметриями, естественным образом возникают следующие вопросы:

а) симметрии чего? Можно говорить о симметриях уравнений движения (лагранжиана и гамильтониана), граничных условий, а также о симметриях решений (состояний);

б) симметрии на каком масштабе? На микроскопическом или макроскопическом масштабе, при высоких (низких) энергиях (температурах);

в) симметрии на каком уровне? Можно говорить о симметриях на классическом или квантовом уровнях. Не всегда эти симметрии совпадают, тогда говорят об аномалиях;

г) какой тип симметрии? Симметрии бывают точными, приближенными и нарушенными. И если симметрия нарушена, то каким образом: точно, спонтанно или аномалией?

Рассмотрим более подробно нарушенные симметрии.

### *Нарушенные симметрии*

Когда атом помещают в электрическое или магнитное поле, вращательная симметрия оказывается нарушенной (эффекты Штарка и Зеемана). В этом случае гамильтониан содержит дополнительное слагаемое, которое неинвариантно относительно вращений. Это пример точного нарушения симметрии. С подобной ситуацией можно встретиться и в теории поля, если рассматривать лагранжиан, который инвариантен относительно определенных преобразований симметрии и к нему добавлено слагаемое, этой инвариантностью не обладающее (например, массовые члены в  $SU(3)$  теории).

Даже если симметрия явно нарушена, можно сделать важные выводы, исходя из этой симметрии. Действительно, если нарушающий член имеет малую амплитуду, то вблизи решений симметричной теории можно развить теорию возмущений.

### *Аномальное нарушение*

Если определенное число симметрий присутствует в классической теории, но не все они существуют в соответствующей квантовой теории, то говорят об аномальном нарушении симметрии. Слагаемое в эффективном действии, которое неинвариантно в квантовой теории, называется аномалией.

Присутствие аномалий в квантовой теории поля нарушает ее перенормируемость. Поэтому отсутствие аномалий в стандартной модели физики частиц весьма существенно: оно эквивалентно наличию равного числа кварковых и лептонных поколений.

В струнных теориях требование отсутствия аномалий приводит к заключению о том, что струны могут распространяться в пространственно-временных многообразиях определенной размерности, так называемой критической размерности ( $d=10$  для суперструн). Стоит упомянуть, что аксиальная аномалия в теории поля проявляет себя в физических процессах, например, в распаде нейтрального пиона на два фотона.

### *Спонтанное нарушение симметрии*

О спонтанном нарушении симметрии говорят в том случае, если симметрия уравнений движения и граничных условий не присутствует в наблюдаемых решениях. Иначе говоря, симметрия основного состояния теории (вакуума) оказывается ниже симметрии уравнений движения (гамильтониана или лагранжиана).

Простой нерелятивистской моделью спонтанного нарушения симметрии является ферромагнетик: в каждом узле  $\vec{x} \in z^3$  регулярной кубической решетки помещается спин  $\vec{S}(3)$ , и магнитному взаимодействию двух соседних спинов соответствует член  $-\vec{S}(\vec{x})\vec{S}(\vec{y})$  в энергии. Таким образом, гамильтониан, который получается суммированием этих вкладов по всей решетке, инвариантен относительно вращений всех спинов на одну и ту же величину. Основное состояние – это состояние с минимальной энергией. При температурах  $T < T_{\text{кюри}}$  основное состояние ферромагнетика содержит области спонтанной намагниченности (домены), которые имеют другую симметрию, чем гамильтониан.

Идею спонтанного нарушения симметрии можно использовать при построении физических моделей, например, суперсимметричных теорий поля. Действительно, если суперсимметрия является фундаментальной симметрией природы, то у каждой известной частицы с целым (полуцелым) спином должен быть суперсимметричный партнер с полуцелым (целым) спином точно такой же массы. Однако частиц с подобными свойствами пока не наблюдалось. Это исключает суперсимметрию как точную симметрию природы, но не как спонтанно нарушенную симметрию: в этом случае симметрия существует, но состояния теории ее не проявляют, т.е. су-

перпартнеры известных частиц имеют гораздо большие массы, чем сами частицы.

Заметим, что механизм спонтанного нарушения симметрии находит свое применение в стандартной модели. Калибровочные бозоны и фермионы получают свои массы за счет ненулевого вакуумного среднего хиггсовского поля.

Обратимся теперь к систематическому рассмотрению пространственно-временных и внутренних симметрий. Начнём обсуждение с лоренцевской и конформной симметрий.

### 1.1. Группа Лоренца

Это группа неоднородных преобразований Лоренца, т.е. группа преобразований, сопровождающихся пространственно-временными трансляциями. Группа Пуанкаре является прямым произведением группы Лоренца и группы трансляций. Два оператора Казимира этой группы соответствуют квадрату массы и квадрату спина частицы. Действительно, масса частицы и ее спин – лоренц-инвариантные величины.

Как построить представления группы Лоренца, имеющие физическое значение? Еще в 1939 г. Вигнер рассматривал подгруппы группы Лоренца, которые не изменяли 4-импульс свободной частицы. Максимальная подгруппа группы Лоренца, оставляющая 4-импульс, инвариантным была названа Вигнером малой группой. Поскольку малая группа не меняет 4-импульс частицы, то эта группа определяет внутренние пространственно-временные симметрии релятивистских частиц. Вигнер показал, что внутренние пространственно-временные симметрии массивных и безмассовых частиц определяются, соответственно,  $O(3)$ - и  $E(2)$ -подобными малыми группами.  $O(3)$ -подобная малая группа локально изоморфна группе трехмерных вращений. Например, группа, описывающая спин электрона, является  $O(3)$ -подобной малой группой. Группа  $E(2)$  – евклидова группа двумерного пространства, включающая трансляции и вращения плоского пространства. Группа лоренцевских преобразований состоит из трех сдвигов и трех вращений. Таким образом, вращения образуют подгруппу группы Лоренца. Если массивная частица находится в покое относительно некоторой системы отсчета, ее 4-импульс инвариантен относительно вращений. Поэтому малая группа массивной покоящейся частицы – группа трехмерных вращений. На что действует преобразование вращения? Очевидно, что вращение, вообще говоря, изменяет направление спина.



Если частица движется в  $z$ -направлении, она имеет ненулевую компоненту импульса в этом направлении. Сдвиг не изменяет алгебру Ли группы вращений, т. е. при этом «сдвинутая» малая группа будет сохранять 4-импульс. Если считать, что 4-импульс покоящейся частицы  $(0, 0, 0, m)$ , то трехмерная группа вращений оставляет инвариантным 4-импульс, и ее генераторы

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (1.2)$$

Для безмассовой частицы нельзя выбрать систему отсчета, в которой бы она покоилась. Вигнер показал, что малая группа безмассовой частицы, движущейся вдоль оси  $z$ , состоит из генератора вращения вокруг оси  $z$  ( $J_3$  в (1.1)) и двух других генераторов, имеющих вид

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Если обозначить через  $K_i$  генератор сдвига вдоль  $i$ -ой оси, то матрицы (1.3) можно представить в виде:

$$N_1 = K_1 - J_2, \quad N_2 = K_2 + J_1, \quad (1.4)$$

где

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Генераторы  $J_3$ ,  $N_1$  и  $N_2$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[N_1, N_2] = 0, \quad [J_3, N_1] = iN_2, \quad [J_3, N_2] = -iN_1. \quad (1.6)$$

Ниже мы будем подробно обсуждать генераторы  $E(2)$ -группы. Здесь же отметим, что они включают  $J_3$ , связанный с вращением вокруг оси  $z$ , а также  $P_1$  и  $P_2$ , генерирующие трансляции вдоль осей  $x$  и  $y$ . Если заменить  $N_1$  и  $N_2$  в соотношении (1.6) на  $P_1$  и  $P_2$ , то это будут коммутационные соотношения для группы  $E(2)$ . По этой причине малой группой для безмассовых частиц является  $E(2)$ . Очевидно, что  $N_1$  и  $N_2$  генерируют лоренцевские преобразования.

Нетрудно ассоциировать генератор вращений  $J_3$  со спиральностью безмассовой частицы. Какая физическая величина связана с  $N_1$ - или  $N_2$ -генераторами? Вигнер обнаружил существование этих генераторов, но не дал физической интерпретации этим трансляционным генераторам. В течение многих лет рассматривались представления только с нулевыми собственными значениями операторов  $N$ . И только в 1971 г. Janner и Janssen связали преобразования, генерируемые этими операторами, с калибровочными преобразованиями.

### 1.1.1. Трансляции и калибровочные преобразования

Чтобы продемонстрировать идею Janner и Jansen, найдем матрицу преобразования

$$\exp(-i(uN_1 + vN_2)), \quad (1.7)$$

генерируемую  $N_1$  и  $N_2$ . Это  $4 \times 4$  матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -u & u \\ 0 & 1 & -v & v \\ u & v & 1 & (u^2 + v^2)/2 \\ u & 0 & -(u^2 + v^2)/2 & 1 + (u^2 + v^2)/2 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Если подействовать этой матрицей на 4-вектор

$$p = (0, 0, \omega, \omega) \quad (1.9)$$

безмассовой частицы, то 4-импульс остается неизменным. Таким образом, матрица (1.8) принадлежит малой группе. Если подействовать этой матрицей на электромагнитный 4-потенциал

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_0) \exp(i(kz - \omega t)), \quad (1.10)$$

используя лоренцевское условие  $A_3 = A_0$ , то в результате придем к калибровочному преобразованию. Именно это обнаружили Janner и Janssen.  $N_1$  и  $N_2$  генерируют калибровочные преобразования.

### 1.1.2. Сжатие $O(3)$ до $E(2)$

Покажем, как группа  $E(2)$  получается из группы трехмерных вращений в приближении плоской (цилиндрической) поверхности. При этой процедуре сжатия  $E(2)$ -симметрия безмассовых частиц возникает из  $O(3)$ -симметрии массивных частиц в пределе бесконечного импульса.

$E(2)$ -преобразования включают вращение и две трансляции плоского пространства. Начнем с матрицы вращений, действующей на вектор-столбец  $(x, y, 1)$ :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Выберем матрицу трансляций в виде

$$T(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Произведение  $T(a, b)R(\theta)$ :

$$E(a, b, \theta) = T(a, b)R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a \\ \sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Это матрица евклидова преобразования в двумерной  $x$ -плоскости. Матрицы  $R(\theta)$  и  $T(a, b)$  относятся к подгруппам вращений и трансляций. Выражение (1.13) не является прямым произведением,

поскольку  $R(\theta)$  и  $T(a, b)$  не коммутируют. Трансляции образуют абелеву инвариантную подгруппу, поскольку различные матрицы  $T$  коммутируют друг с другом. Кроме того,

$$R(\theta)T(a, b)R^{-1}(\theta) = T(a', b'). \quad (1.14)$$

Подгруппа же вращений – неинвариантная, поскольку сопряжение

$$T(a, b)R(\theta)T^{-1}(a, b) \quad (1.15)$$

не сводится к вращению.

Попытаемся записать трансформационную матрицу (1.13) в терминах генераторов. Вращения определяются генератором

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Трансляции связаны с генераторами

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [J_3, P_1] = iP_2, \quad [J_3, P_2] = -iP_1. \quad (1.18)$$

Как получить  $E(2)$  малую группу из  $O(3)$  малой группы? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем генераторы  $O(3)$ . Матрицы  $J_i$  задаются соотношениями (1.1). Евклидова группа  $E(2)$  определяется генераторами  $J_3, P_1, P_2$ , и их алгебра Ли обсуждалась выше.

Рассмотрим транспонированную алгебру Ли группы  $E(2)$ . Тогда  $P_1$  и  $P_2$  преобразуются в  $Q_1$  и  $Q_2$ :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Совместно с  $J_3$  эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[Q_1, Q_2] = 0, \quad [J_3, Q_1] = iQ_2, \quad [J_3, Q_2] = -iQ_1. \quad (1.20)$$

Эти матрицы генерируют преобразование точки на цилиндре. Вращения вокруг оси цилиндра генерируются  $J_3$ , матрицы же  $Q_1$  и  $Q_2$  генерируют трансляции вдоль оси  $z$  цилиндра. Группа, включающая эти матрицы, называется цилиндрической группой. Сжатия на евклидову и цилиндрическую группы можно достичь в пределе очень большого радиуса цилиндра:

$$P_1 = \frac{1}{R} B^{-1} J_2 B, \quad P_2 = -\frac{1}{R} B^{-1} J_1 B, \quad (1.21)$$

$$Q_1 = -\frac{1}{R} B J_2 B^{-1}, \quad Q_2 = \frac{1}{R} B J_1 B^{-1}, \quad (1.22)$$

где

$$B(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Векторные пространства, на которые действуют генераторы,  $-(x, y, z/R)$  и  $(x, y, Rz)$  соответственно для евклидовой и цилиндрической групп. Их можно рассматривать как приближение северного полюса и экваториальное приближение для сферической поверхности. На рис 1.1 показано, как происходит евклидово и цилиндрическое сжатие.

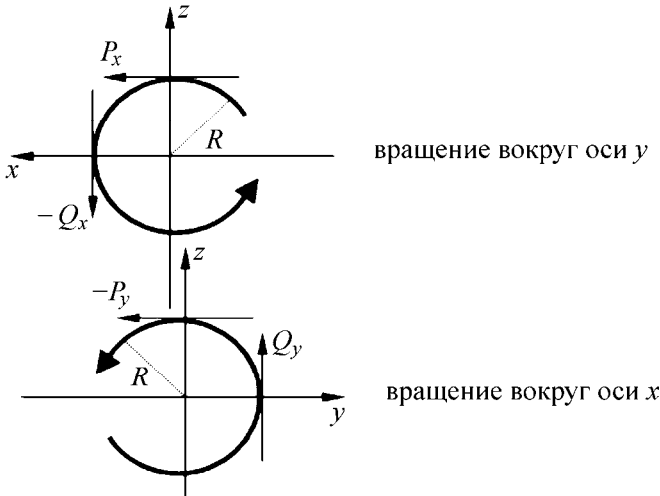


Рис. 1.1

Приближение «северного полюса» ведет к сжатию  $O(3)$  до  $E(2)$ . Приближение «экваториальное» – к сжатию  $O(3)$  до цилиндрической группы.

Поскольку  $P_1(P_2)$  коммутируют с  $Q_2(Q_1)$ , запишем следующую комбинацию генераторов:

$$F_1 = P_1 + Q_1, \quad F_2 = P_2 + Q_2. \quad (1.24)$$

Новые операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[F_1, F_2] = 0, \quad [J_3, F_1] = iF_2, \quad [J_3, F_2] = -iF_1. \quad (1.25)$$

Однако мы не можем, используя  $3 \times 3$  матрицы  $P_i$  и  $Q_i$ , построить  $3 \times 3$  матрицы  $F_1$  и  $F_2$ , поскольку векторные пространства для  $P_i$  и  $Q_i$  представлений различны. Однако это различие можно учесть, добавив две различные  $z$ -координаты: одну для сжатых  $z$ , другую – для расширенных  $z$ :  $(x, y, Rz, z/R)$ .

Тогда генераторы имеют вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

и

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Операторы  $F_1$  и  $F_2$ :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Генератор вращения  $J_3$  выберем в виде (1.1). Тогда  $4 \times 4$  матрицы удовлетворяют  $E(2)$ -подобным коммутационным соотношениям (1.25). Матрицу  $B$  из (1.23) можно представить в виде:

$$B(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Эта матрица включает как сжатую, так и расширенную координату светового конуса, показанные на рис. 1.2.

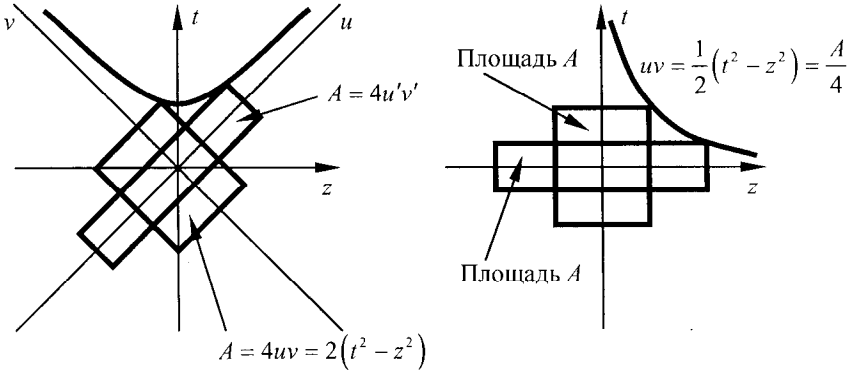


Рис. 1.2

Когда система испытывает Лоренц-сдвиг, одна из осей расширяется, а другая – сжимается. Как расширение, так и сжатие необходимы для сжатия  $O(3)$ -подобной малой группы до  $E(2)$ -подобной малой группы.

Если произвести преобразование подобия матрицы (1.29), используя матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

что соответствует вращениям на  $45^\circ$  третьей и четвертой координат, то матрица (1.29) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \eta & \sin \eta \\ 0 & 0 & \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где  $R = e^\eta$ . Это матрица лоренцевских сдвигов вдоль оси  $z$ . Если мы стартуем с набора расширенных генераторов вращений  $J_3$  в соотношении (1.1) и приходим к соотношениям (1.21), то

$$N_1 = \frac{1}{R} B^{-1} J_2 B, \quad N_2 = -\frac{1}{R} B^{-1} J_2 B, \quad (1.32)$$

причем  $N_1$  и  $N_2$  задаются соотношением (1.3). Генераторы  $N_1$  и  $N_2$  — это сжатые генераторы  $J_2$  и  $J_1$ , соответственно, в пределе бесконечного импульса (или в безмассовом пределе).

Как отмечалось выше,  $N_1$  и  $N_2$  генерируют калибровочные преобразования безмассовых частиц. Таким образом, сжатие поперечных вращений приводит к калибровочным преобразованиям.

Итак, мы показали, что для безмассовых частиц  $O(3)$ -подобная малая группа может быть сжата до  $E(2)$ -подобной малой группы. Был рассмотрен случай спина 1, но рассматриваемый механизм применим и для других спинов. Для частиц со спином  $1/2$  существуют калибровочные преобразования, и поляризация нейтрино является следствием калибровочной инвариантности.

## 1.2. Представления группы Лоренца

### 1.2.1. Преобразования Лоренца. Нормальные параметры

В релятивистской теории переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся со скоростью  $\vec{v}$ , задается лоренцевским преобразованием. Если скорость  $\vec{v}$  параллельна оси  $OZ$ , эти преобразования выглядят следующим образом:

$$x \rightarrow x; \quad y \rightarrow y; \quad z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (z + vt); \quad t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( t + \frac{v}{c^2} z \right), \quad (1.33)$$



величина  $c$  – скорость света в вакууме. В кратких обозначениях преобразования (1.33) можно представить в виде:

$$\vec{r} \rightarrow L(v_i) \vec{r}, \quad t \rightarrow L(v_z) t. \quad (1.34)$$

Если вектор  $\vec{v}$  ориентирован произвольно, обычно используют такой трюк. Пусть  $R(z \rightarrow \vec{v})$  – вращение, переводящее ось  $OZ$  в направление  $\vec{v}$ . Например, можно выбрать

$$R(z \rightarrow \vec{v}) = R(\vec{\alpha}), \quad R(\vec{\alpha}) \vec{z} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (1.35)$$

с  $\vec{z}$  – единичным вектором в направлении  $OZ$  и

$$\cos \alpha = \frac{v_z}{v}, \quad \vec{\alpha} = \left( \frac{\alpha}{v} \right) (\sin \alpha) [\vec{z} \times \vec{v}]. \quad (1.36)$$

Обозначив через  $L(\vec{v})$  лоренц-сдвиг со скоростью  $\vec{v}$ , определим

$$L(\vec{v}) = R(\vec{z} \rightarrow \vec{v}) L(\vec{v}_z) R^{-1}(\vec{z} \rightarrow \vec{v}), \quad (1.37)$$

где  $\vec{v}_z$  – вектор длины  $v$  вдоль  $OZ$ . Используя точные формулы для  $L(v_z)$  и  $R$ , находим

$$\begin{aligned} \vec{r} \rightarrow L(\vec{v}) \vec{r} &= \vec{r} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v^2} \vec{v} + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{1}{v^2} \vec{v} \cdot \vec{r} + t \right) \vec{v}, \\ t \rightarrow L(\vec{v}) t &= \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{r} + t \right) \vec{v}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Параметры  $\vec{v}$  не являются «нормальными»: произведение сдвигов  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$  не дает сдвига  $\vec{v} + \vec{v}'$  (он не существует, если  $|\vec{v} + \vec{v}'| \geq c$ ).

Удобнее использовать другие параметры  $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ . Если  $\vec{\xi}, \vec{\eta}$  параллельны, то

$$L(\vec{\xi}) L(\vec{\eta}) = L(\vec{\xi} + \vec{\eta}). \quad (1.39)$$

Выберем  $\vec{\xi}$  вдоль  $OZ$ . Если записать

$$\begin{aligned} L(\vec{\xi}) z &= A(\xi) z + B(\xi) ct, \\ L(\vec{\xi}) t &= \frac{1}{c} C(\xi) z + D(\xi) t, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где  $A, B, C, D$  – функции, которые необходимо определить и которые удовлетворяют условиям

$$AB = CD, \quad A^2 - C^2 = D^2 - B^2 = 1. \quad (1.41)$$

Введем функцию  $\varphi(\vec{\xi})$  с помощью соотношений

$$A = D = \cosh \varphi(\vec{\xi}), \quad B = C = \sinh \varphi(\vec{\xi}). \quad (1.42)$$

Эти соотношения подразумевают, что

$$\begin{aligned} \cosh(\varphi(\vec{\xi}) + \varphi(\vec{\eta})) &= \cosh(\varphi(\vec{\xi})) \cosh(\varphi(\vec{\eta})) + \\ &+ \sinh(\varphi(\vec{\xi})) \sinh(\varphi(\vec{\eta})); \\ \sinh(\varphi(\vec{\xi}) + \varphi(\vec{\eta})) &= \cosh(\varphi(\vec{\xi})) \sinh(\varphi(\vec{\eta})) + \\ &+ \sinh(\varphi(\vec{\xi})) \cosh(\varphi(\vec{\eta})), \end{aligned} \quad (1.43)$$

поэтому можно выбрать  $\varphi(\vec{\xi}) = \xi = |\vec{\xi}|$ . Окончательно

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x; \quad y \rightarrow y'; \\ z &\rightarrow (\cosh \xi) z + (\sinh \xi) ct; \\ t &\rightarrow \frac{1}{c} (\sinh \xi) z + (\cosh \xi) t; \quad \vec{\xi} \parallel OZ. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Соотношение между  $\vec{\xi}$  и  $\vec{v}$  определяют выражения

$$\cosh \xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \sinh \xi = \frac{|\vec{v}|}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\xi} \parallel \vec{v}. \quad (1.45)$$

Величину  $\xi$  обычно называют быстротой. Для произвольного сдвига  $\vec{\xi}$  находим

$$\begin{aligned} \vec{r} \rightarrow L(\vec{\xi}) \quad \vec{r} &= \vec{r} - \frac{\vec{\xi} \cdot \vec{r}}{\xi^2} \vec{\xi} + \frac{1}{\xi} \left( (\cosh \xi) \frac{\vec{\xi} \cdot \vec{r}}{\xi} \vec{\xi} + c (\sinh \xi) t \vec{\xi} \right); \\ t \rightarrow L(\vec{\xi}) \quad t &= (\cosh \xi) t + \frac{1}{c} \frac{\sinh \xi}{\xi} \vec{\xi} \cdot \vec{r}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Для  $|\vec{v}| \ll c$

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad (1.47)$$

поэтому лоренцевский сдвиг совпадает с галилеевым сдвигом.

Преобразования  $\Lambda$  набора  $(\vec{r}, t)$  – вращения и сдвиги

$$\Lambda = LR, \quad (1.48)$$

называются преобразованиями Лоренца. Как будет видно ниже, они образуют группу, называемую группой Лоренца или ортохронной собственной группой Лоренца. Если включить возможные произведения пространственных и временных отражений

$$I_s : \vec{r} \rightarrow -\vec{r}, t \rightarrow t; \quad I_t : \vec{r} \rightarrow \vec{r}, t \rightarrow -t, \quad (1.49)$$

получим полную группу Лоренца. Её элементы имеют вид

$$LR, I_s LR, I_t LR, I_s I_t LR. \quad (1.50)$$

### 1.2.2. Пространство Минковского.

#### Полная группа Лоренца

Как было показано выше, лоренцевские сдвиги смешивают пространство и время. Единое трактование релятивистских преобразований требует, чтобы мы работали с набором величин, содержащих как пространственные, так и временные характеристики. Такую возможность дает пространство Минковского. Его элементы (или точки), обозначаются буквами  $x, y, \dots$  называются 4-векторами и определяются четырьмя координатами  $x_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )

$$x \sim \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

где  $x_0 = ct$  – временная координата, а  $x_j = r_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  – пространственные координаты.

Обычно координаты пространства Минковского обозначают греческими индексами  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ ; латинские индексы  $i, j$  изменяются от 1 до 3. Иногда обозначают через  $\vec{r}$  пространственную часть  $x$

$$x \sim \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Лоренцевские сдвиги можно представить посредством  $4 \times 4$  матриц  $L$ ,  $x \rightarrow Lx$  с элементами  $L_{\mu\nu}$ . При этом

$$(Lx)_\mu = \sum_{\nu=0}^3 L_{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.53)$$

В явном виде

$$(Lx)_0 = (\cosh \xi) x_0 + \frac{\sinh \xi}{\xi} \sum_{j=1}^3 \xi_j x_j$$

$$(Lx)_i = x_i - \frac{1}{\xi^2} \left( \sum_{j=1}^3 \xi_j x_j \right) \xi_i + \frac{1}{\xi} \left( \cosh \xi \left( \sum_{j=1}^3 \xi_j x_j \right) + x_0 \sinh \xi \right) \xi_i. \quad (1.54)$$

Вращения, определяющие преобразования пространства Минковского:  $x \rightarrow Rx$

$$(Rx)_\mu = \sum_\nu R_{\mu\nu} x_\nu; \quad (Rx)_0 = x_0$$

$$(Rx)_i = (\cos \theta) x_i + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \left( \sum_j \theta_j x_j \right) \theta_i + \frac{\sin \theta}{\theta} \sum_{k,l} \epsilon_{ikl} \theta_k x_l. \quad (1.55)$$

В последнее соотношение входит  $\epsilon_{ikl}$  – символ Леви-Чевита.

Преобразования  $L$ ,  $R$  оставляют инвариантной квадратичную форму  $x \cdot y$ , определенную следующим образом

$$x \cdot y = x_0 y_0 - \sum_{j=1}^3 x_j y_j. \quad (1.56)$$

Эта форма известна как (псевдо) скалярное произведение в пространстве Минковского и может быть записана в терминах псевдометрического тензора  $G$  с компонентами  $g_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu; g_{\mu\nu} = 1,$$

$$\mu = \nu = 0, g_{\mu\nu} = -1, \mu = \nu \neq 0 \quad (1.57)$$

$$x \cdot y = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} x_\mu y_\nu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x_\mu y_\nu = x^T G y.$$

В последнем соотношении  $x$ ,  $y$  – матрицы. Если  $\Lambda = LR$  для любых  $L$ ,  $R$  то для каждой пары  $x$ ,  $y$

$$(\Lambda x)(\Lambda y) = x \cdot y. \quad (1.58)$$

В терминах метрического тензора

$$\bar{\Lambda}^T G \Lambda = G. \quad (1.59)$$

Очевидно, что  $\bar{\Lambda}$  образуют группу: легко проверить, что

$$\bar{\Lambda} G \bar{\Lambda}^T = G. \quad (1.60)$$

Вычислив определители в выражении (1.59), получим,  $(\det \bar{\Lambda})^2 = 1$ , следовательно  $(\det \bar{\Lambda}) = \pm 1$ .

Рассмотрим обращение пространственных координат в пространстве Минковского:  $(I_s x)_0 = x_0$ ,  $(I_s x)_i = -x_i$ . Очевидно, что  $I_s$  входит в  $\bar{\Lambda}$  и  $\det I_s = -1$ . Если  $\det \bar{\Lambda} = -1$ , то можно записать

$$\bar{\Lambda} = I_s (I_s \bar{\Lambda}). \quad (1.61)$$

При это  $\det(I_s \bar{\Lambda}) = +1$ . Если обозначить, через  $L_+$  подгруппу  $\bar{L}$ , состоящую из матрицы с единичным определителем, то окажется, что  $\bar{L}$  состоит либо из матриц  $L_+$ , либо из произведений  $I_s$  и матриц  $L_+$ .

Выберем единичный 4-вектор  $n_t$  вдоль временной оси с компонентами  $n_{\mu} = \delta_{\mu 0}$ . Для заданного  $\bar{\Lambda}$  из  $\bar{L}$  мы можем иметь или  $(\bar{\Lambda} n_t)_0 > 0$  или  $(\bar{\Lambda} n_t)_0 < 0$ . Невозможно иметь  $(\bar{\Lambda} n_t)_0 = 0$ . Более того, если  $(\bar{\Lambda} n_t)_0 > 0$  и  $(\bar{\Lambda}' n_t)_0 > 0$ , то  $(\bar{\Lambda}^{-1} n_t)_0 > 0$  и  $(\bar{\Lambda} \bar{\Lambda}' n_t)_0 > 0$ .

Таким образом, подмножество из  $\bar{L}$ , состоящее из преобразований  $\bar{\Lambda}$  с  $(\bar{\Lambda} n_t)_0 > 0$ , образует группу, называемую ортохронной группой Лоренца и обозначаемой  $\bar{L}^\uparrow$ . Соответствующие ей преобразования сохраняют направление времени. Если матрица  $\bar{\Lambda}$  из  $\bar{L}$  такова, что  $(\bar{\Lambda} n_t)_0 < 0$ , то можно записать

$$\bar{\Lambda} = I(I\bar{\Lambda}), \quad (1.62)$$

где  $I$  – полное обращение  $I = I_t I_s$ :  $Ix = -x$ . Очевидно, что в этом случае  $(I\bar{\Lambda} n_t)_0$  положительно. Любой элемент  $\bar{L}$  является либо элементом  $\bar{L}^\uparrow$ , либо произведением  $I\Lambda$  с  $\Lambda \in \bar{L}^\uparrow$ .

Наконец, собственная ортохронная группа  $L_+^\uparrow$  (которую обычно называют просто группой Лоренца) – это группа матриц  $\Lambda$ , таких, что

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \quad \det \Lambda = 1, \Lambda_{00} > 0. \quad (1.63)$$

Как было показано выше, любой элемент  $\bar{\Lambda}$  из  $\bar{L}$  имеет одну из форм

$$I_s \Lambda, \quad I_t \Lambda, \quad I_s I_t \Lambda, \quad \Lambda, \quad (1.64)$$

где  $\Lambda \in L_+^\uparrow$ .

Преобразования  $I_s$ ,  $I_t$ ,  $I$  иногда называют несобственными преобразованиями. Покажем, что если  $R \in L$  и  $Rn_t = n_t$ , то  $R$  – вращение.

Условие  $Rn_t = n_t$  подразумевает, что  $R$  имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \hat{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (1.65)$$

где  $\hat{R}$  – матрица  $3 \times 3$ . Условие  $R^T G R = G$  дает  $\hat{R}^T \hat{R} = 1$ , а условие  $\det R = +1$  означает, что  $\det \hat{R} = +1$ . Поэтому  $\hat{R} \in SO(3)$ , т.е. является 3-мерным вращением. Пусть  $\Lambda$  произвольное вращение из  $L$  и пусть  $u \equiv \Lambda u_t$ . Тогда  $u_0 > 0$  и  $u \cdot u = 1$ . Выберем вектор  $\vec{\xi}$ , такой, что  $u_0 = \cosh |\vec{\xi}|$ ,  $|\vec{u}| = \sinh |\vec{\xi}|$ . Это возможно, поскольку

$$1 = u \cdot u = (u_0)^2 - |\vec{u}|^2 = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi. \quad (1.66)$$

Пусть  $\vec{\xi}$  ориентирован вдоль  $\vec{n}$

$$\frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \quad (1.67)$$

так что

$$u_0 = \cosh \xi, \quad u_i = \frac{1}{2} (\sinh \xi) \xi_i. \quad (1.68)$$

Используя точные выражения для  $L(\vec{\xi})$ , получаем,  $L(\vec{\xi}) n_i = u$ . Таким образом, преобразование  $L^{-1}(\vec{\xi}) \Lambda$ , обладающее свойством

$$L^{-1}(\vec{\xi}) \Lambda n_i = n_i \quad (1.69)$$

должно быть вращением, характеризуемым некоторым  $\vec{\theta}$ .

Иначе говоря, любое ортохронное лоренцевское преобразование  $\Lambda$  можно представить в виде

$$\Lambda = L(\vec{\xi}) R(\vec{\theta}), \quad (1.70)$$

где  $R$  – вращение,  $L$  – лоренцевский сдвиг (однако такое разложение – не единственное).

Группа Лоренца является 6-мерной группой Ли (три параметра от  $\vec{\theta}$  и три от  $\vec{\xi}$ ). Она очевидным образом некомпактна (параметры  $\vec{\xi}$  могут принимать произвольно большие значения), является простой и дважды связанной группой. Ниже мы найдем её накрывающую группу, которая совпадает с  $SL(2, C)$ . Заметим, что лоренцевский сдвиг  $L(\vec{\xi})$  может быть записан в виде

$$R' L(\vec{\xi}_z) R'', \quad (1.71)$$

где  $R'$ ,  $R'' = R'^{-1}$  – вращения и  $L(\vec{\xi}_z)$  – ускорение вдоль оси  $OZ$ . Таким образом, общие лоренцевские преобразования сводятся к вращениям и ускорениям, которые можно считать происходящими вдоль оси  $OZ$ .

Вместо параметризации лоренцевского преобразования  $\Lambda = L(\vec{\xi}) R(\vec{\theta})$  параметрами  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\theta}$  часто используют ковариантную параметризацию. Определим набор параметров  $\omega_{\mu\nu}$  в терминах  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\theta}$ :

$$\sum_{j,k} \epsilon_{jkl} \omega_{jk} = \theta_l, \quad \omega_{j0} = \frac{1}{2} \xi_j, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}. \quad (1.72)$$

Тогда бесконечно малое преобразование Лоренца записывается в виде

$$\Lambda = 1 - \sum \omega_{\alpha\beta} X^{(\alpha\beta)} + O(\omega^2). \quad (1.73)$$

Матрицы  $X^{(\alpha\beta)}$  имеют компоненты

$$X^{(\alpha\beta)} = -(\delta_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}). \quad (1.74)$$

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что с одной стороны, из определения  $X$ , имеем

$$(\Lambda(\omega)x)_{\mu} = x_{\mu} - \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\nu} \omega_{\alpha\beta} X_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)} x_{\nu}. \quad (1.75)$$

С другой стороны, с учетом точных формул для  $R, L$ :

$$\begin{aligned} (R(\vec{\theta})x)_0 &= x_0; \quad (R(\vec{\theta})x)_i = x_i - \sum 2\omega_{ik} x_k; \\ (L(\vec{\xi})x)_0 &= x_0 + \sum 2\omega_{j0} x_j; \quad (L(\vec{\xi})x)_i = x_i + 2\omega_{i0} x_0; \end{aligned} \quad (1.76)$$

Поэтому, полагая  $\Lambda = LR$ , получим

$$(\Lambda x)_0 \approx x_0 - \sum 2\omega_{j0} x_j; \quad (\Lambda x)_i \approx x_i + 2\omega_{i0} x_0 - \sum 2\omega_{ik} x_k. \quad (1.77)$$

Откуда и следует ожидаемый результат (1.73), (1.74).

Помимо  $L_+^{\uparrow}$ , группа симметрии теории относительности включает пространственные трансляции

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}, \quad (1.78)$$

и временные трансляции

$$ct \rightarrow ct + a_0. \quad (1.79)$$

В 4-векторных обозначениях

$$x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} + a_{\mu}. \quad (1.80)$$

Группа, получающаяся при объединении  $L$  и трансляций, называется группой Пуанкаре или неоднородной группой Лоренца, и обозначается обычно через  $\mathfrak{L}$ . Её элементы – пары  $(a, \Lambda)$  4-векторов  $a$  и  $\Lambda \in L$ . Они действуют на произвольный вектор  $x$  следующим образом

$$(a, \Lambda)x = a + \Lambda x \quad (1.81)$$

и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} (a, \Lambda)(a', \Lambda') &= (a + \Lambda a', \Lambda \Lambda'), \\ (a, \Lambda)^{-1} &= (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Единичный элемент группы Пуанкаре – преобразование  $(0, 1)$ .



### 1.2.3. Геометрия пространства Минковского

Векторы  $v$  пространства Минковского можно релятивистски инвариантным образом разделить на следующие классы: времениподобные, светоподобные и пространственноподобные вектора. Времениподобные – это такие вектора, для которых  $v \cdot v > 0$ . Если  $v_0 > 0$ , то о таких векторах говорят как о положительных времениподобных векторах; если  $v_0 < 0$  – отрицательных времениподобных векторах ( $v_0 = 0$  – невозможно). Для светоподобных векторов  $v \cdot v = 0$ . Вектора называют положительными светоподобными, если  $v_0 > 0$  и отрицательными, если  $v_0 < 0$ . Случай  $v_0 = 0$  возможен только для нулевого вектора  $v = 0$ . Наконец  $v$  – пространственноподобен, если  $v \cdot v < 0$ ; знак в этом случае не является инвариантом. Если  $v$  – положительный (отрицательный) времениподобный вектор, то существует вектор  $v^{(0)}$  и Лоренц преобразование  $\Lambda$  такое, что  $v = \Lambda v^{(0)}$  и  $v_0^{(0)} = \pm m$ ,  $\vec{v}^0 = 0$ ,  $m > 0$ .

Если  $v$  – положительный (отрицательный) светоподобный вектор, то существует вектор  $\bar{v}$  и преобразование  $\Lambda$ , для которых  $v = \Lambda \bar{v}$  и  $\bar{v}_0 = \pm 1$ ,  $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ ,  $\bar{v}_3 = 1$ .

Если  $v$  – пространственноподобный вектор, то существует вектор  $v^{(3)}$  и преобразование  $\Lambda$ , для которых  $v = \Lambda v^{(3)}$ , причем  $v_\mu^{(3)} = \delta_{\mu 3} v_3^{(3)}$ ,  $v_3^{(3)} > 0$ . Эти утверждения означают, что в некоторой системе отсчета положительный светоподобный вектор может быть выбран в виде

$$\bar{v} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1). \quad (1.83)$$

Отличие между евклидовым пространством и пространством Минковского проявляется в двух приведенных ниже утверждениях.

1. Если  $v$  и  $v'$  светоподобны и ортогональны, т.е.  $v \cdot v' = 0$ , то они параллельны:  $v' = \alpha v$ .

2. Если  $v \cdot v' \geq 0$  и  $v \cdot u = 0$ , то либо  $v$  и  $u$  пропорциональны, либо  $u$  – пространственноподобный вектор.

Единственными инвариантными тензорами в пространстве Минковского являются комбинации метрического  $g_{\mu\nu}$  и символа Леви-Чевита  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 1, \text{ если } \mu\nu\rho\sigma - \text{четная перестановка } 1230 \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -1, \text{ если } \mu\nu\rho\sigma - \text{нечетная перестановка } 1230 \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 0, - \text{если два индекса одинаковы.}\end{aligned}\quad (1.84)$$

Для заданного вектора  $v$  пространства Минковского набор лоренцевских преобразований  $\Gamma$ , которые оставляют вектор неизменным, называется, как уже отмечалось, малой группой (или стабилизатором)  $W(v)$ . Малая группа вектора  $v$  зависит только от знака  $v \cdot v$  в том смысле, что если  $v \cdot v > 0$  и  $u \cdot u > 0$ , то малые группы  $W(v)$  и  $W(u)$  изоморфны. Чтобы доказать это утверждение, заметим, что  $W(v)$  и  $W(\Lambda v)$  изоморфны для любого  $\Lambda$ . Действительно, если  $\Gamma v = v$ , то  $\Gamma v \Gamma^{-1}$  принадлежит  $W(\Lambda v)$  и наоборот. Более того,  $W(v)$  идентична с  $W(\alpha v)$  для любого числа  $\alpha \neq 0$ . Таким образом, оказываются существенными только три малые группы. Точнее, если  $v \cdot v > 0$ , малая группа изоморфна  $W(n_i)$ , если же  $v \cdot v = 0$ , малая группа изоморфна  $W(\bar{v})$ ,  $\bar{v}_0 = \bar{v}_3$ ,  $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ ; если  $v \cdot v < 0$ , малая группа изоморфна  $W(n^{(3)})$ ,  $n_\mu^{(3)} = \delta_{\mu 3}$ . Это обстоятельство упрощает изучение малых групп.

Малая группа  $W(n_i) = SO(3)$  – группа 3-мерных вращений.  $W(\bar{v}) = SO(2) \otimes T_2$ ,  $SO(2)$  – группа вращений вокруг оси  $OZ$ , а  $T_2$  будет определена ниже.

$W(n^{(3)}) = Z_+^\uparrow(3)$ , где  $Z_+^\uparrow(3)$  – «лоренцеподобная» группа в 3-х измерениях, действующая только на время и на плоскости  $XOY$  и оставляющая  $OZ$  неизменной. Первое из утверждений нам уже известно. Обратимся ко второму (светоподобному) случаю. Пусть  $\Gamma$  – элемент  $W(\bar{v})$  и  $N$  – подпространство пространства Минковского, ортогональное к  $\bar{v}$ , т.е. если  $u \in N$ , то  $u \cdot \bar{v} = 0$ . Очевидно, что подпространство  $N$  инвариантно относительно  $\Gamma$ . Базис  $N$  образуют три вектора  $v^{(a)}$ ,  $a = 1, 2, 3$  с  $v^{(1)} = n^{(1)}$ ,  $v^{(2)} = n^{(2)}$ ,  $n_\mu^{(a)} = \delta_{a\mu}$  и  $v^{(3)} = \bar{v}$ . Поскольку  $\bar{v}$  – светоподобный вектор, подпространство, ортого-

нальное к  $\bar{v}$ , содержит  $\bar{v}$ . Если  $u \in N$ , запишем  $u = \sum_a \alpha_a v^{(a)}$ . Так

как  $\Gamma u \in N$ , то

$$\Gamma u = \sum_{ab} \Gamma_{ab} \alpha_b v^{(a)}. \quad (1.85)$$

Таким образом, матричные элементы  $\Gamma_{ab}$  определяют  $\Gamma$  и наоборот. Условия  $\Gamma u \cdot \Gamma u' = u \cdot u'$  и  $\Gamma \bar{v} = \bar{v}$  подразумевают, что

$$\Gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

с произвольными значениями  $\Gamma_{31}$ ,  $\Gamma_{32}$ . Этот набор матриц имеет структуру, подобную евклидовой группе плоскости:  $SO_z(2) \times T_2$ , где  $SO_z(2)$  – вращение вокруг оси  $OZ$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

и трансляции

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

В заключение этого раздела сформулируем несколько определений. Световым конусом называется набор векторов для которых  $v^2=0$ . Если, кроме того,  $v_0 > 0$  ( $v_0 < 0$ ), то говорят о переднем (заднем, отрицательном) световом конусе, обозначаемом  $V^+$  ( $V^-$ ). Набор векторов  $U$  с  $u^2 = m^2 > 0$  обозначается  $\Omega^+(m)$ ,  $(\pm)$  соответствует знаку  $u_0$  и называется передним положительным (задним, отрицательным) массовым гиперboloидом для  $u_0 > 0$  ( $u_0 < 0$ ). Набор векторов  $\omega$ , таких, что  $\omega \cdot \omega = -\mu^2$ ,  $\mu^2 > 0$  называется гиперboloидом мнимых масс  $\Omega(i\mu)$ .

Нетрудно проверить, что наборы  $V^+$ ,  $V^-$ ,  $\Omega^+(m)$ ,  $\Omega^-(m)$ ,  $\Omega(i\mu)$  инвариантны относительно  $L_+^\uparrow$ , и каждый вектор из одного из этих наборов получается соответствующим преобразованием любого другого элемента из того же набора.

### 1.2.4. Соответствие $L \rightarrow SL(2, C)$

Каждому вектору  $v$  с компонентами  $v_\mu$  сопоставим  $2 \times 2$ -компонентную матрицу

$$\tilde{v} = v_0 + \tilde{\sigma} \vec{v} = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \tilde{\sigma}_\mu v_\nu = \begin{pmatrix} v_0 + v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & v_0 - v_3 \end{pmatrix}; \quad (1.89)$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 = 1; \quad \tilde{\sigma}_i = -\sigma_i.$$

Тогда имеем

$$\tilde{\sigma}_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} \sigma_\nu; \quad \text{tr} \tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu = 2 g_{\mu\nu} \quad (1.90)$$

$$\det \tilde{v} = v \cdot v; \quad v_\mu = \frac{1}{2} \text{tr} \sigma_\mu \tilde{v}; \quad \tilde{v}^+ = \tilde{v},$$

причем соотношение выполняется, если  $v_\mu$  – вещественны.

Для каждого преобразования Лоренца

$$\Lambda : v \rightarrow \Lambda v \equiv v_\Lambda. \quad (1.91)$$

имеется соответствующая матрица  $A \in SL(2, C)$ . Определим  $A$  следующим образом:

$$A \tilde{v} A^+ = \tilde{v}_\Lambda = \tilde{\sigma} \Lambda v. \quad (1.92)$$

На самом деле, обе матрицы  $\pm A$  соответствуют одному  $\Lambda$ . Точная формула для рассматриваемого соответствия может быть установлена так: выберем вектора  $v^{(\alpha)}$  с  $v_\mu^{(\alpha)} = \delta_{\alpha\mu}$ . Применяя формулу (1.92) к ним, получаем

$$\Lambda_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \text{tr} \sigma_\beta A \sigma_\alpha A^+. \quad (1.93)$$

Формулу для инверсии получить несколько сложнее. Будем рассматривать отдельно ускорения  $L(v)$ :

$$L(v) n_t = v_i, \quad n_{t_\mu} = \delta_{\mu 0} \quad (1.94)$$

и вращения  $R$ . Для ускорений с учетом  $\tilde{n}_t = 1$  и соотношения (1.92) получаем

$$A(L(v)) A^+ (L(v)) = \tilde{v}. \quad (1.95)$$

Это уравнение имеет решение

$$A(L(v)) = +\tilde{v}^{1/2}. \quad (1.96)$$

Заметим, что  $\tilde{v} = L(v)n_t$  — положительно определен. Выберем знак (+) для корня квадратного в силу непрерывности. Для сдвигов  $A(L(v))^+ = A(L(v))$ . Для вращений  $R$  имеем  $Rn_t = n_t$ , и соотношение (1.92) дает

$$A(R)A(R)^+ = 1, \quad (1.97)$$

т.е. матрица  $A$  — унитарна. Пусть  $\vec{\theta}$  — набор параметров вращения  $R$ . Для инфинитезимальных  $\vec{\theta}$  и  $v_0 = 0$

$$\tilde{v} \equiv \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{v} + \sum \sigma_j \theta_k v_l \varepsilon_{jkl}. \quad (1.98)$$

Если представить

$$A(R) = \exp(i\vec{\theta}\vec{\lambda}) \simeq 1 + i\vec{\theta}\vec{\lambda}, \quad (1.99)$$

то с помощью (1.92) получим

$$(1 + i\vec{\theta}\vec{\lambda})\vec{\sigma}\vec{v}(1 - i\vec{\theta}\vec{\lambda}) \simeq \vec{\sigma}\vec{v} + \sum \sigma_j \theta_k v_l \varepsilon_{jkl}, \quad (1.100)$$

для которых

$$[\lambda_j, \sigma_k] = -\sum \varepsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (1.101)$$

следовательно,  $\vec{\lambda} = -\frac{\vec{\sigma}}{2}$  и

$$A(R(\vec{\theta})) = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}\right). \quad (1.102)$$

Если 4-вектор  $v$  удовлетворяет условию  $v^2 = 1$ ,  $v_0 > 0$ , определим  $\vec{\xi}$  следующим образом:

$$\cosh \xi = v_0; \quad \sinh \xi = |\vec{v}|, \quad \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (1.103)$$

Тогда

$$\tilde{v}^{1/2} = \cosh \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi} \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma} \sinh \frac{\xi}{2} = \exp\left(\frac{1}{2} \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad (1.104)$$

и поэтому

$$A(L(v)) = \exp\left(\frac{1}{2} \vec{\xi} \vec{\sigma}\right). \quad (1.105)$$

Найдем далее изображения малых групп в  $SL(2, C)$ . Для временноподобного случая выберем вектор  $n_t$  с  $n_{t\mu} = \delta_{\mu 0}$ . Тогда  $n_t = 1$ , изображение  $U$  вращения  $R$  удовлетворяет условию  $UU^\dagger = 1$ , т.е.

изображением подгруппы  $SO(3)$  группы  $L$  является подгруппа  $SU(2)$  группы  $SL(2, C)$ .

Для светоподобных векторов выберем  $n = n_t + n^{(3)}$ , причем  $n_t$  выберем, как и раньше, а  $n_\mu^{(3)} = \delta_{\mu 3}$ . Тогда

$$\tilde{n} = 1 + \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.106)$$

Если  $N$  – изображение в  $SL(2, C)$  – малой группы преобразования  $\Gamma$ :  $\Gamma u = n$ , то оно должно удовлетворять условиям:

$$N \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det N = 1. \quad (1.107)$$

Отсюда следует, что  $N$  можно представить в виде

$$N = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & e^{-i\theta/2}(a + ib) \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (1.108)$$

Введем обозначения

$$D_{\alpha\beta}^{(1/2)}(\Lambda) \equiv A_{\alpha\beta}(\Lambda), \quad D_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{(1/2)}(\Lambda) \equiv (A^{-1+}(\Lambda))_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad (1.109)$$

$$\text{а также} \quad \hat{v} = v_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{v} = \sigma \cdot v, \quad v_\Lambda \equiv \sigma \Lambda v. \quad (1.110)$$

Легко проверить, что

$$A^{-1+} \hat{v} A^{-1} = \hat{v}_\Lambda, \quad (1.111)$$

Эта формула является дополнительной к (1.92), и она определяет другое представление группы  $L$  в  $SL(2, C)$ , неэквивалентное (1.92). Свяжем это представление со стандартным дираковским формализмом. Для этого заметим, что в вейлевской реализации гамма-матриц

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 1 \quad (1.112)$$

$$\text{имеем} \quad \gamma \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{v} \\ \hat{v} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.113)$$

Далее определим

$$D(\Lambda) = \begin{pmatrix} D^{(1/2)}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \tilde{D}^{(1/2)}(\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\alpha\beta}(\Lambda) & 0 \\ 0 & (A^{-1+}(\Lambda))_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (1.114)$$

В качестве приложения докажем трансформационные свойства дираковских  $\gamma$ -матриц. В вейлевской реализации для произвольного 4-вектора  $v$ :

$$\begin{aligned}
 D^{-1}(\Lambda)\gamma \cdot v D(\Lambda) &= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{v} \\ \hat{v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1+} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & A^{-1}\hat{v}A^{-1+} \\ A\hat{v}A^+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}\Lambda^{-1}v \\ \sigma\Lambda^{-1}v & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & (\Lambda\tilde{\sigma})v \\ (\sigma\Lambda)v & 0 \end{pmatrix} = (\Lambda\gamma) \cdot \sigma,
 \end{aligned} \tag{1.115}$$

где использованы соотношения (1.92) и (1.111).

В силу произвольности  $v$ , получаем

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma_\mu D(\Lambda) = \sum \Lambda_{\mu\nu}\gamma_\nu. \tag{1.116}$$

### 1.2.5. Конечномерные представления $SL(2, C)$

Обозначим через  $M_2$  алгебру Ли  $SL(2, C)$  – она состоит из  $2 \times 2$  комплексных матриц с нулевыми следами. Если  $A_1$  – алгебра подгруппы  $SU(2)$  группы  $SL(2, C)$ , то  $A_1^C = M_2$ . Поэтому представления группы Лоренца можно получить с помощью представлений группы вращений. В частности, коэффициенты Клебша-Гордона для  $SU(2)$  и  $SL(2, C)$  – одинаковые. Таким образом, с помощью простого тензорного произведения

$$A_{\alpha_1\beta_1} A_{\alpha_2\beta_2} \dots A_{\alpha_j} B_j \tag{1.117}$$

можно построить представление  $SL(2, C)$ , которое при ограничении на группу вращений соответствует спину  $j/2$ .

### 1.2.6. Общее описание релятивистских состояний

Во многих приложениях удобно ввести абстрактные характеристики релятивистских состояний. Будем считать, что этим состояниям соответствует импульс  $\vec{p}$  и другие величины, обозначаемые через  $\xi$  (это может быть компонента спина). Задача будет состоять

в построении состояний  $|\vec{p}, \xi\rangle$  и изучении их трансформационных свойств при релятивистских преобразованиях. Инвариантной группой в теории относительности является группа Пуанкаре, иногда называемая неоднородной группой Лоренца. Её элементы – пары  $(a, \Lambda)$ , где  $a$  – 4-мерные трансляции, состоящие из пространственных трансляций на вектор  $\vec{a}$  и временных трансляций на  $a_0/c$ , а также собственного (ортохронного) Лоренц-преобразования  $\Lambda$ . Генераторы группы Пуанкаре включают генераторы вращений, сдвигов и трансляций. Для любого представления  $U(a, \Lambda)$  группы Пуанкаре инфинитезимальные преобразования имеют вид

$$U(0, R(\vec{\theta})) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\theta} \vec{L}, \quad U(0, L(\vec{\xi})) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\xi} \vec{N}, \quad U(a, 1) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar} a \cdot P. \quad (1.118)$$

Коммутационные соотношения между генераторами можно определить в любом представлении. Выберем для этих целей регулярное представление, в котором  $U$  действует на скалярные функции  $a, \Lambda$ . Тогда

$$L_j = i\hbar \sum \varepsilon_{jkl} x_k \partial_l; \quad N_j = i\hbar (x_0 \partial_j - x_j \partial_0); \quad P_j = i\hbar \partial_j; \quad P_0 = i\hbar \partial_0. \quad (1.119)$$

Используя эти соотношения, найдем соответствующие коммутаторы:

$$\begin{aligned} [L_k, L_j] &= i\hbar \sum \varepsilon_{jkl} L_l; & [L_k, N_j] &= i\hbar \sum \varepsilon_{jkl} N_l; \\ [L_k, P_j] &= i\hbar \sum \varepsilon_{jkl} P_l; & [L_k, P_0] &= 0; & [P_\mu, P_\nu] &= 0; \\ [N_k, N_j] &= i\hbar \sum \varepsilon_{jkl} L_l; & [N_k, P_j] &= -i\hbar \delta_{kj} P_0; & [N_k, P_0] &= -i\hbar P_k. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Эти соотношения можно записать в ковариантной форме

$$U(\Lambda) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}. \quad (1.121)$$

С помощью простого вычисления, используя то факт, что

$$[\partial_\mu, x_\nu] = g_{\mu\nu}, \quad (1.122)$$

получаем для коммутационных соотношений



$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, P_\alpha] &= i\hbar(g_{\nu\alpha}P_\mu - g_{\mu\alpha}P_\nu); \\
[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] &= i\hbar(g_{\mu\alpha}M_{\beta\nu} + g_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} + g_{\nu\beta}M_{\alpha\mu}); \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0.
\end{aligned} \quad (1.123)$$

Рассмотрим теперь квантовую систему чье состояние  $|\psi\rangle$ . Пуанкаре-преобразование  $g$  переводит его в новое состояние  $|\psi_g\rangle$ . В духе квантовой механики, считаем, что этому переходу соответствует линейный унитарный оператор

$$U(g) = U(a, \Lambda), \quad |\psi_g\rangle = U(a, \Lambda)|\psi\rangle. \quad (1.124)$$

При этом считаем, что  $U$  – представление группы Пуанкаре. На самом деле, представление определяется с точностью до фазы

$$U(a, \Lambda)U(a', \Lambda') = e^{i\varphi}U(a + \Lambda a', \Lambda\Lambda'). \quad (1.125)$$

Ниже будет построено точное представление для  $\varphi = 0$ . Рассматриваться будут унитарные представления группы Пуанкаре. Поскольку приводимое представление разлагается на ортогональные неприводимые представления, достаточно рассмотреть только неприводимые, они описывают элементарные системы, которые будем называть частицами. Заметим, что здесь термин «элементарность» используется в нединамическом смысле. Он означает лишь, что соответствующая изолированная система не может быть описана как две и более систем, тоже изолированные.

### 1.2.7. Релятивистские одночастичные состояния. Общее описание

Обозначим через  $G$  гильбертово пространство свободных одночастичных состояний. Построим базис  $G$ , работая в гейзенберговском подходе. Рассмотрим операторы трансляций  $U(a, 1) \equiv U(a)$ . Если их записать в экспоненциальной форме

$$U(a) = \exp(ia \cdot P), \quad (1.126)$$

то унитарность  $U$  подразумевает эрмитовость  $P_\mu$ . Будем идентифицировать  $P_0$  с оператором энергии (гамильтонианом) и  $\vec{P}$  – с оператором импульса;  $P_\mu$  образует оператор 4-импульса.

Из коммутационных соотношений следует, что оператор  $P^2 = P \cdot P$  коммутирует со всеми генераторами группы Пуанкаре, следовательно, со всеми  $U(a, \Lambda)$ . По лемме Шура, это означает, что  $P^2 = \text{const}$ , которую будем идентифицировать с квадратом массы (она может быть равной нулю)

$$m^2 = P \cdot P. \quad (1.127)$$

Отсюда следует, что для свободной частицы оператор  $P_0$  является функцией  $\vec{P}$

$$P_0 = + \left( m^2 + \vec{P}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.128)$$

где выбран положительный знак, чтобы обеспечить положительность энергии. Если  $\vec{p}$  – собственные значения оператора  $\vec{P}$ , то  $p_0$  – собственные значения  $P_0$ , и тогда

$$p_0 = + \sqrt{\left( m^2 + \vec{p}^2 \right)}, \quad (1.129)$$

как можно было ожидать для релятивистской частицы.

Как известно, компоненты  $P_\mu$  коммутируют друг с другом. Их можно диагонализировать и рассматривать как соответствующие собственные векторы в базисе пространства  $G$ , который будем обозначать через  $|p; \xi\rangle$ , где  $\xi$  – набор квантовых чисел, определяющий состояния. Как будет видно,  $\xi$  включает спиновую компоненту.

Поскольку  $|p; \xi\rangle$  – собственные состояния  $P_\mu$ , то

$$P_\mu |p; \xi\rangle = p_\mu |p; \xi\rangle. \quad (1.130)$$

Экспоненцируя и записывая  $U(a)$  вместо  $U(a, 1)$ , получим

$$U(a) |p; \xi\rangle = e^{ia \cdot P} |p; \xi\rangle = e^{ia \cdot p} |p; \xi\rangle. \quad (1.131)$$

Выберем определенный импульс  $\vec{p}$ , причем  $\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$ ,  $\vec{p}_0 > 0$ . Это означает, что выбрана определенная система отсчета. Любой допустимый 4-вектор частицы можно записать в виде

$$p = \Lambda(p) \vec{p}, \quad (1.132)$$

где  $\Lambda(p)$  – преобразование Лоренца (это представление не единственное). Если выбрать для каждого  $p$  семейство  $\Lambda(p)$  таких преобразований Лоренца, то базис будет зависеть от выбранного се-

мейства  $\Lambda(p)$ . Определим базис  $|\Lambda(p), \xi\rangle$  с помощью соотношения

$$|\Lambda(p), \xi\rangle \equiv U(\Lambda(p))|\bar{p}, \xi\rangle. \quad (1.133)$$

Покажем, что состояние  $|\Lambda(p), \xi\rangle$  соответствует 4-импульсу  $P$ . Чтобы это обнаружить, запишем

$$U(a)|\Lambda(p), \xi\rangle = U(a)U(\Lambda(p))|\bar{p}, \xi\rangle. \quad (1.134)$$

Используя тождество

$$U(a, \Lambda(p)) = U(a, \Lambda(p)) = U(\Lambda(p)) U(\Lambda^{-1}(p)a), \quad (1.135)$$

получим

$$U(a)|\Lambda(p), \xi\rangle = U(\Lambda(p))U(\Lambda(p)^{-1}a)|\bar{p}, \xi\rangle. \quad (1.136)$$

Учитывая, что

$$(\Lambda(p)^{-1}a) \cdot \bar{p} = a\Lambda(p)\bar{p} = a \cdot p, \quad (1.137)$$

имеем

$$\begin{aligned} U(\Lambda(p))U(\Lambda(p)^{-1}a)|\bar{p}, \xi\rangle &= U(\Lambda(p))e^{i(\Lambda(p)^{-1}a)p}|\bar{p}, \xi\rangle = \\ &= e^{ip \cdot a}U(\Lambda(p))|\bar{p}, \xi\rangle = e^{ip \cdot a}|\Lambda(p), \xi\rangle. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Таким образом, показано, что

$$U(a)|\Lambda(p), \xi\rangle = e^{ia \cdot p}|\Lambda(p), \xi\rangle, \quad (1.139)$$

т.е.  $|\Lambda(p), \xi\rangle$  – состояние с импульсом  $p$

$$P_\mu|\Lambda(p), \xi\rangle = p_\mu|\Lambda(p), \xi\rangle. \quad (1.140)$$

Это соотношение определяет, как трансляции действуют на базисные вектора  $|\Lambda(p), \xi\rangle$ . Выведем теперь соответствующие формулы для лоренцевских преобразований. Начнем с рассмотрения преобразований, которые обозначим через  $\Gamma, \Gamma', \dots$ , содержащиеся в малой группе  $W(\bar{p})$  вектора  $\bar{p}$ . Поскольку  $\Gamma$  оставляет инвариантным  $\bar{p}$ , то собственный вектор  $U(\Gamma)|\bar{p}, \xi\rangle$ , будет соответствовать импульсу  $\bar{p}$ , т.е. он должен быть линейной комбинацией векторов  $|\bar{p}, \xi'\rangle$

$$U(\Gamma)|\bar{p}, \xi\rangle = \sum_{\xi'} D_{\xi\xi'}(\Gamma)|\bar{p}, \xi'\rangle, \quad (1.141)$$

где  $D_{\xi\xi'}$  – определенные коэффициенты. Итак, в случае массивной частицы со спином  $1/2$ , параметр  $\xi$  будет являться третьей компонентой спина, т.е.  $\xi = \pm 1/2$ . Легко проверить, что условия

$$U(\Gamma)U(\Gamma') = U(\Gamma\Gamma'), \quad U(\Gamma^{-1}) = U^{-1}(\Gamma), \quad U^+(\Gamma) = U^{-1}(\Gamma) \quad (1.142)$$

подразумевают

$$D(\Gamma)D(\Gamma') = D(\Gamma\Gamma'), \quad D(\Gamma^{-1}) = D(\Gamma)^{-1}, \quad D^+(\Gamma) = D(\Gamma)^{-1}. \quad (1.143)$$

Это означает, что матрицы  $D$  реализуют унитарное представление малой группы  $W(\bar{p})$ . Конкретная форма матрицы  $D$  будет обсуждаться ниже. Здесь же будем считать, что такое представление существует и известны коэффициенты  $D_{\xi\xi'}(\Gamma)$ . С их помощью можно разрешить проблему: как действует произвольное преобразование Лоренца? Действительно,

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Lambda(p), \xi\rangle &= U(\Lambda)U(\Lambda(p))|\bar{p}, \xi\rangle = \\ &= U(\Lambda(\Lambda p))U(\Lambda(\Lambda p)^{-1}U(\Lambda\Lambda^{-1}(p)))|\bar{p}, \xi\rangle = \\ &= U(\Lambda(\Lambda p))U(\Lambda(\Lambda p)^{-1}\Lambda\Lambda(p))|\bar{p}, \xi\rangle, \end{aligned} \quad (1.144)$$

где  $\Lambda(\Lambda p)\bar{p} = \Lambda p$  и введен член  $U(\Lambda(\Lambda p)) \cdot U(\Lambda(\Lambda p))^{-1} = 1$ .

$$\text{Тогда} \quad (\Lambda(\Lambda p))^{-1}\Lambda\Lambda(p)\bar{p} = (\Lambda(\Lambda p))^{-1}\Lambda p = \bar{p}, \quad (1.145)$$

т.е. преобразование  $(\Lambda(\Lambda p))^{-1}\Lambda\Lambda(p)$ , которое мы обозначили через  $\Gamma(p, \Lambda)$  действительно принадлежит  $W(\bar{p})$ , т.к. оставляет  $\bar{p}$  инвариантным.

Таким образом, находим

$$U(\Gamma(p, \Lambda))|\bar{p}, \xi\rangle = \sum_{\xi'} D_{\xi\xi'}(\Gamma(p, \Lambda))|\bar{p}, \xi'\rangle. \quad (1.146)$$

Иначе говоря,

$$U(\Lambda)|\Lambda(p), \xi\rangle = \sum_{\xi'} D_{\xi\xi'}(\Gamma(p, \Lambda))|\Lambda(\Lambda p), \xi'\rangle; \quad (1.147)$$

$$\Gamma(p, \Lambda) \equiv (\Lambda(\Lambda p))^{-1}\Lambda\Lambda(p).$$

Помимо выбора семейства  $\Lambda(p)$  и нахождения точных значений  $D_{\xi\xi'}$ , нам нужно определить нормировку состояний  $|\Lambda(p), \xi\rangle$ , которые при релятивистских преобразованиях остаются инвариантными (т.е.  $U(a, \Lambda)$  – унитарны).

Оператор  $U(a)$  является унитарным по своему построению. Если предположить, что  $\xi$  – собственные значения наблюдаемой величины, то

$$\langle \Lambda(p), \xi | \Lambda(p'), \xi' \rangle = N(p) \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\xi\xi'}, \quad (1.148)$$

где  $N$  – фактор, определяемый требованием того, что для любого  $\Lambda$

$$\langle U(\Lambda)(\Lambda(p)), \xi | U(\Lambda)(\Lambda(p')), \xi' \rangle = \langle \Lambda(p), \xi | \Lambda(p'), \xi' \rangle. \quad (1.149)$$

Подставляя сюда выражения (1.146) и имея в виду, что матрица  $D_{\xi\xi'}$  – унитарна, получаем условие

$$N(\Lambda p) \delta(\Lambda \vec{p} - \Lambda \vec{p}') = N(p) \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.150)$$

Если  $\Lambda$  является вращением  $R$  и  $\delta(R\vec{p}) = \delta(\vec{p})$ , то  $N$  может зависеть лишь от  $|\vec{p}|$ , или, эквивалентно, от  $p_0$ :  $N = N(p_0)$ . Рассмотрим далее сдвиг вдоль оси  $OZ$  с параметром  $\xi$

$$\begin{aligned} L_z : p_0 &\rightarrow (\cosh \xi) p_0 + (\sinh \xi) p_3; \\ p_3 &\rightarrow (\cosh \xi) p_3 + (\sinh \xi) p_0; \quad p_1 \rightarrow p_1; p_2 \rightarrow p_2, \end{aligned} \quad (1.151)$$

находим

$$N((\cosh \xi) p_0) \frac{1}{\cosh \xi} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = N(p_0) \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (1.152)$$

для любого  $\xi$ . Таким образом, получаем, что  $N(p_0) = \text{const} \times p_0$ . Обычно константа полагается равной 2, т.е. инвариантная форма скалярного произведения

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(p), \xi | \Lambda(p'), \xi' \rangle &= 2 p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\xi\xi'}, \\ p_0 &= +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Отметим, что приведенный анализ справедлив как для массивных, так и безмассовых частиц. Может показаться, что этот анализ зависит от фиксированного вектора (или системы отсчета)  $\vec{p}$ , но это не

так. Поскольку малые группы двух векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{p}'$  изоморфны, то подстановка  $\vec{p}'$  вместо  $\vec{p}$  просто приводит к изменению базиса  $G$ . То же самое справедливо при замене семейства  $\Lambda(p)$  другим семейством  $\Lambda'(p)$ .

### 1.2.8. Релятивистские состояния массивных частиц

Выберем систему отсчета, в которой  $\vec{p}_i = 0$ , т.е. систему отсчета, в которой частица покоится. В этом случае будем обозначать квантовые числа  $\lambda$  вместо  $\xi$ :  $|\vec{p}, \lambda\rangle$ . Малая группа  $\vec{p}$  состоит из трехмерных вращений, которые обозначим через  $R$  (вместо  $\Gamma$ ). Матрицы  $D(R)$  – это стандартные матрицы  $D^{(s)}(R(\vec{\theta}))$  для частицы со спином  $s$ :

$$D^{(s)}(R(\vec{\theta})) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{\theta} \vec{s}\right), \quad (1.154)$$

где  $\vec{s}$  – известные спиновые операторы. Для  $s=1/2$

$$D^{(1/2)}(R(\vec{\theta})) = \exp(-i\vec{\theta} \vec{\sigma} / 2). \quad (1.155)$$

Таким образом,

$$U(R)|\vec{p}, \lambda\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(s)} |\vec{p}, \lambda'\rangle. \quad (1.156)$$

Для состояний в произвольной системе отсчета с импульсом  $p$  нужно произвести сдвиг:  $L(p)\vec{p} = p$ . Состояния  $|L(p), \lambda\rangle$  определяются следующим образом

$$|L(p), \lambda\rangle \equiv U(L(p))|\vec{p}, \lambda\rangle. \quad (1.157)$$

Эти состояния нормированы

$$\langle \Lambda(p), \lambda | \Lambda(p'), \lambda' \rangle = 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.158)$$

Чтобы найти трансформационные свойства  $|L(p), \lambda\rangle$  относительно произвольного преобразования Лоренца  $\Lambda$ , нужно заметить, что  $\Lambda$  будет связано с  $p$  посредством  $\Lambda p$ . Поэтому нужно перейти в систему отсчета, в которой частица находится в покое:  $L^{-1}(p)$ . Далее следует в этой системе рассмотреть, как это состояние преобразуется, и совершить сдвиг  $L(\Lambda p)$ :

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)|L(p), \lambda\rangle &= U(\Lambda)U(L(p))|\bar{p}, \lambda\rangle = \\
&= U(L(\Lambda p))U(L(\Lambda p)^{-1})U(\Lambda)U(L(p))|\bar{p}, \lambda\rangle \quad (1.159) \\
&= U(L(\Lambda p))U(R(p, \Lambda))|\bar{p}, \lambda\rangle,
\end{aligned}$$

где 
$$R(p, \Lambda) = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p), \quad (1.160)$$

называется вигнеровским вращением. Это действительно вращение, поскольку  $R(p, \Lambda)\bar{p} = \bar{p}$ .

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)|L(p), \lambda\rangle &= U(L(\Lambda p))U(R(p, \Lambda))|\bar{p}, \lambda\rangle = \\
&= U(L(\Lambda p))\sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(s)}(R(p, \Lambda))|\bar{p}, \lambda'\rangle = \quad (1.161) \\
&= \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(s)}(R(p, \Lambda))|L(\Lambda p), \lambda'\rangle,
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)|\Lambda(p), \lambda\rangle &= \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(s)}(R(p, \Lambda))|R(p, \Lambda), \lambda'\rangle, \quad (1.162) \\
R(p, \Lambda) &= L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p).
\end{aligned}$$

Этот результат уже был получен в предыдущем разделе. Базис  $|L(p), \lambda\rangle$  иногда называют ковариантным спинным базисом. Другой полезный базис – спиральный базис. Чтобы его построить, выберем вместо сдвигов  $L(p)$  преобразования  $H(p)$ , определенные следующим образом: сначала произведем «чистый» сдвиг  $L(\vec{p})$ , который преобразует  $\bar{p}$  в  $p^Z$  с компонентами  $p_0^Z = p_0$ ,  $p_1^Z = p_2^Z = 0$ ,  $p_3^Z = p_3$ . Затем, пусть  $R(\vec{z} \rightarrow \vec{p})$  вращение вокруг оси  $\vec{z} \times \vec{p}$ , переводящее ось  $OZ$  по направлению  $\vec{p}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
H(p) &\equiv R(\vec{z} \rightarrow \vec{p})L(p^Z), \quad (1.163) \\
|H(p), \eta = \xi\rangle &= U(H(p))|\bar{p}, \xi\rangle.
\end{aligned}$$

Соответствующие состояния  $|H(p), \eta = \xi\rangle$  – спиральные состояния, поскольку  $\eta$  – проекция спина на вектор  $\vec{p}$ .

Этот анализ непосредственно обобщается на массивные частицы. В нерелятивистском пределе  $|\vec{p}| \ll m$ ,  $p_0 \approx m$ . В этом случае нормировка

$$\langle L(p), \lambda | L(p'), \lambda' \rangle = 2m \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (1.164)$$

т.е.

$$\begin{aligned} |L(p), \lambda\rangle &= \sqrt{2p_0} |\vec{p}, \lambda\rangle \approx \sqrt{2m} |\vec{p}, \lambda\rangle, \\ \langle \vec{p}, \lambda | \vec{p}', \lambda' \rangle &= \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (1.165)$$

В литературе можно встретить два различных определения

$$|L(p), \lambda\rangle_I = \frac{1}{\sqrt{2m}} |L(p), \lambda\rangle \quad (1.166)$$

и

$$|L(p), \kappa\rangle_{II} = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} |L(p), \lambda\rangle. \quad (1.167)$$

Обратимся теперь к дискретным  $C$ ,  $P$ ,  $T$  – симметриям.  $C$  – преобразование определим соотношением

$$C|p, \lambda\rangle \equiv \eta_c |\bar{p}, \bar{\lambda}\rangle, \quad (1.168)$$

где  $|\bar{p}, \bar{\lambda}\rangle$  обозначает состояние античастицы с тем же самым импульсом  $p$  и спином  $\lambda$ , как и у частицы  $|p, \lambda\rangle$ . Что касается четности, определим оператор  $P$  как преобразование инверсии пространства  $I_s$ :  $(I_s x)_\mu = g_{\mu\nu} x_\nu$ ,  $P = U(I_s)$ , т.е.

$$\begin{aligned} P|L(p), \lambda\rangle &= U(I_s) U(L(p)) |\bar{p}, \lambda\rangle = \\ &= U(L(I_s p)) U(L(I_s p)^{-1} I_s L(p)) |\bar{p}, \lambda\rangle. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Тогда  $L(I_s p)^{-1} I_s L(p)$  оставляет вектор  $\vec{p}$  неизменным, причем это преобразование не является вращением, т.к. детерминант этого преобразования равен  $(-1)$ . Однако

$$R(p, I_s) \equiv L(I_s p)^{-1} I_s L(p) I_s \quad (1.170)$$

является вращением.

В нерелятивистском случае

$$P|\bar{p}, \lambda\rangle = \eta_p |\bar{p}, \lambda\rangle, \quad (1.171)$$

т.е.

$$P|L(p), \lambda\rangle = \eta_p \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(s)}(R(p, I_s)) |L(I_s p), \lambda'\rangle. \quad (1.172)$$



Для обращения времени нужно повторить предыдущий анализ, имея в виду, что  $T$  – антиунитарное преобразование.

С помощью соотношения

$$TP_{\mu}T^{-1} = (I_s P)_{\mu} \quad (1.173)$$

находим

$$T|L(p), \lambda\rangle = \eta_T \sum_{\lambda'} D_{\lambda, -\lambda'}^{(s)}(R(p, I_s)) (-i)^{2\lambda} |L(I_s p), \lambda'\rangle. \quad (1.174)$$

### 1.2.9. Состояния безмассовых частиц

Поскольку безмассовая частица не может находиться в состоянии покоя, то выбор  $\bar{p}$  оказывается существенным. Выберем пространственные оси так, чтобы  $\bar{p}$  был направлен, скажем, вдоль оси  $OZ$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0, \quad \bar{p}_3 = \bar{p}_0. \quad (1.175)$$

Величина  $\bar{p}_0$  для систем, состоящих из одной частицы, не имеет значения. Можно считать  $\bar{p}_0$  единицей измерения энергии.

Рассмотрим малую группу  $W(\bar{p})$  этого состояния  $\bar{p}$ . Если  $\Gamma \in W(\bar{p})$ , то разложим

$$\Gamma = \Lambda_t R_z(\theta), \quad (1.176)$$

где  $R_z(\theta)$  – вращение вокруг  $OZ$  на угол  $\theta$ , т.е. матрица  $\Gamma$

$$(\Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.177)$$

$$\Gamma_{31} = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta; \Gamma_{32} = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta.$$

$$\text{Первый член в } (\Gamma) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \quad (1.178)$$

соответствует  $\Lambda_t$ , второй –  $R_z(\theta)$ . Поскольку произведение двух преобразований  $\Gamma_1, \Gamma_2$  из  $W(\bar{p})$  принадлежит  $W(\bar{p})$ , можно записать

$$\Gamma_i = \Lambda_{ii} R_z(\theta_i), \quad i=1,2 \quad (1.179)$$

$$\text{и} \quad \Gamma_1 \Gamma_2 = \Lambda_{12i} R_z(\theta_{12}), \quad (1.180)$$

где угол  $\theta_{12}$  будет зависеть от  $\Gamma_1, \Gamma_2$

$$\theta_{12} = \theta_{12}(\Gamma_1, \Gamma_2). \quad (1.181)$$

Чтобы получить представление группы Пуанкаре, необходимо знать представление малой группы  $W(\bar{p})$ . Эта малая группа изоморфна евклидовой группе в двух измерениях, и её представления можно найти, используя тот же метод, который применяется при нахождении представлений группы Пуанкаре. Для частиц с дискретными значениями спина представления должны иметь вид

$$D(\Gamma) = D(R_z(\theta)), \quad (1.182)$$

т.е. должно быть

$$D(\Lambda_t) \equiv 1. \quad (1.183)$$

Более того, представление  $D(R_z(\theta))$  оказывается двузначным

$$D(R_z(2\pi)) = \pm 1, \quad (1.184)$$

поскольку накрывающая подгруппа Лоренца  $SL(2, C)$  является просто-связанной и накрывает дважды  $L$ . Заметим, что нет каких-либо физических причин, исключающих частицы с непрерывными значениями спина. Однако до сих пор в природе наблюдались лишь частицы с дискретными значениями спина, т.е. нужно потребовать выполнения условия (1.183). Имея в виду это ограничение, завершим анализ представлений. Неприводимые представления  $R_z(\theta)$  (вращение вокруг оси  $OZ$ ) – тривиальны. Поскольку группа абелева, по лемме Шура, эти представления должны быть одномерными. Это означает, что индекс  $\lambda$  в классификации состояний

$$|\bar{p}, \lambda\rangle \quad (1.185)$$

может принимать только одно значение. Матрицы  $D_{\lambda\lambda'}(\Gamma)$  будут просто числами, равными  $\delta_{\lambda\lambda'} d_\lambda(\theta)$ . Так как представление унитарное, эти числа равны по модулю единице, и их можно записать в виде

$$d_\lambda(\theta) = e^{-i\lambda\theta}. \quad (1.186)$$

Из-за того, что представление двузначное, число  $\lambda$  может быть целым или полуцелым. При сравнении выражения для  $d(\theta)$  с выражением для вращения вокруг оси  $OZ$ , записанного в терминах  $S_z$  компоненты оператора спина, получаем

$$U(R_z(\theta)) = \exp\left(-i\theta \frac{S_z}{\hbar}\right). \quad (1.187)$$

Таким образом,  $\lambda$  – компонента спина в направлении  $OZ$  (или вдоль  $\vec{\bar{p}}$ , так как его направление совпадает с осью  $OZ$ ). По определению, эта величина – спиральность. Так как допустимо только одно значение  $\lambda$ , можно заключить, что для безмассовых частиц спиральность – релятивистский инвариант. Поскольку трансформационные свойства состояний  $|\bar{p}, \lambda\rangle$  относительно малой группы  $W(\bar{p})$ :

$$U(\Gamma)|\bar{p}, \lambda\rangle = e^{-i\lambda\theta(\Gamma)}|\bar{p}, \lambda\rangle \quad (1.188)$$

известны, то можно определить семейство преобразований  $\Lambda(p): \Lambda(p)\bar{p} = p$  и распространить приведенный выше анализ на произвольные преобразования. Выбрав  $\bar{p}_0 = 1$ , для произвольного  $p$  имеем

$$\Lambda(p) = H(p), \quad H(p) = R(\vec{z} \rightarrow \vec{p})L(p^z), \quad (1.189)$$

где  $L(p^z)$  – сдвиг вдоль оси  $OZ$ , такой, что

$$L(p^z)\bar{p} = p^z, \quad p_0^z = p_0, p_1^z = p_2^z = 0, p_3^z = p_0. \quad (1.190)$$

$R(\vec{z} \rightarrow \vec{p})$  – вращение вокруг оси  $\vec{z} \times \vec{p}$ . Определим состояние

$$|p, \lambda\rangle \equiv U(H(p))|\bar{p}, \lambda\rangle, \quad (1.191)$$

тогда

$$U(\Lambda)|p, \lambda\rangle = e^{-i\lambda\theta(p, \Lambda)}|\Lambda p, \lambda\rangle. \quad (1.192)$$

Угол  $\theta(p, \Lambda)$  – угол вращения вокруг оси  $OZ$ , содержащийся в преобразовании

$$\Gamma(p, \Lambda) = H(\Lambda p)^{-1} \Lambda H(p), \quad (1.193)$$

при его разложении

$$\Gamma(p, \Lambda) = \Lambda_z R_z(\theta(p, \Lambda)). \quad (1.194)$$

Состояния нормированы следующим образом

$$\langle p, \lambda | p, \lambda \rangle = 2p_0 \delta(\vec{p}, \vec{p}'). \quad (1.195)$$

Обратимся теперь к дискретным симметриям  $P^\perp$ ,  $T$ . Начнем с пространственной четности. Соответствующий оператор должен удовлетворять условиям

$$PP_0P^{-1} = P_0, P\vec{P}P^{-1} = -\vec{P}, \quad P\vec{L}P^{-1} = \vec{L}, P\vec{S}P^{-1} = \vec{S}. \quad (1.196)$$

Если определить оператор спиральности

$$S_{\vec{p}} = \frac{1}{|\vec{p}|} (\vec{P} \cdot \vec{S}), \quad (1.197)$$

то получаем

$$PS_{\vec{p}}P^{-1} = -S_{\vec{p}}. \quad (1.198)$$

Поэтому следует постулировать, что

$$P|p, \lambda\rangle = \eta_p |I_s p, -\lambda\rangle. \quad (1.199)$$

В общем случае это условие не выполнимо. Так как величина  $\lambda$  является инвариантом, то нужно предполагать, что существуют два независимых состояния – одно со спиральностью  $\lambda$ , а другое со спиральностью  $(-\lambda)$ .

В природе существуют два типа частиц. Один тип образуют частицы, подобные фотону, глюону и, видимо, гравитону, которые несут два спиральных состояния ( $\pm 1$  для  $\gamma$ ,  $g$ ) и  $\pm 2$  – для гравитона. Другой тип частиц образуют нейтрино, обладающие спиральностью  $(-1/2)$ , и антинейтрино со спиральностью  $(+1/2)$ . Для этих частиц четность не определена, и взаимодействия, в которых они участвуют, нарушают четность.

Для нейтрино и антинейтрино можно определить комбинированную операцию  $CP$ -произведение преобразования четности и зарядового сопряжения, которая переводит нейтрино (со спиральностью  $-1/2$ ) в антинейтрино (со спиральностью  $+1/2$ ) и наоборот. В принципе, возможен и третий класс – частицы со спиральностью  $\lambda$ , для которых нет частиц, и античастицы со спиральностью  $(-\lambda)$ , но таких частиц пока не наблюдалось. Для обращения времени

$$T\vec{S}T^{-1} = -\vec{S}; \quad T\vec{P}T^{-1} = -\vec{P}; \quad TS_{\vec{p}}T^{-1} = S_{\vec{p}} \quad (1.200)$$

можно ввести антиунитарный оператор  $T$ , для которого

$$T|p, \lambda\rangle = \eta_T (-i)^{2\lambda} |I_s p, \lambda\rangle. \quad (1.201)$$

Фаза  $(-i)^{2\lambda}$  введена скорее по техническим соображениям, чтобы безмассовый и массивный случай трактовать одинаково. Вернемся снова к четности. Если состояние  $|I_s p, -\lambda\rangle$  существует, то нам следует удвоить гильбертово пространство состояний. Определим полный спин как  $S = \max|\lambda|$  и киральность  $\delta$  как  $\delta = \frac{\lambda}{S} = \pm 1$ . Тогда можно обозначать состояния через

$$|p, s, \delta\rangle, \quad (1.202)$$

а трансформационные свойства этих состояний

$$U(\Lambda)|p, s, \delta\rangle = e^{-i\delta S\theta(p, \Lambda)}| \Lambda p, s, \delta\rangle; \quad P|p, s, \delta\rangle = \eta_p|I_s p, s, -\delta\rangle. \quad (1.203)$$

Это представление оказывается приводимым как представление группы Пуанкаре, поскольку подпространства с  $\delta = 1$  и  $\delta = -1$  по отдельности инвариантны. Это же представление является неприводимым как представление ортохронной (но не собственной) группы, полученной путем объединения пространственной инверсии  $I_s$  с  $U(I_s) \equiv P$  ортохронной собственной группы Пуанкаре.

### 1.2.10. Связь с формализмом волновых функций

Построение релятивистских состояний с определенным значением координаты  $|\vec{r}, t, a\rangle$  ( $t$  – время,  $a$  – дополнительный индекс) не имеет физического смысла. Поэтому связь между абстрактным формализмом «кэт» и «бра» состояний и формализмом волновых функций оказывается не столь очевидна, как в нерелятивистском случае, где обычно полагается  $\psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r}, t, a | \psi \rangle$ . Найдем связь с импульсным пространством волновых функций, а затем путем фурье-преобразований перейдем в  $x$ -пространство. Таким образом, мы хотели бы установить соответствие между «кэт» состояниями и (многокомпонентными) волновыми функциями  $\psi_a^{(\vec{k}, \lambda)}(\vec{P})$ , отвечающими импульсу  $\vec{k}$  и компонентам спина  $\lambda$  (заметим, что  $\vec{P}$  – переменная). Будем работать в гейзенберговском представлении, т.е. считаем  $\psi$  не зависящими от времени. Временная зависимость может быть введена, при желании, с помощью соотношений

$$\Psi_a^{(\vec{k}, \lambda)}(\vec{p}, t) = e^{-ik_0 t} \Psi_a^{(\vec{k}, \lambda)}(\vec{p}), \quad k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}. \quad (1.204)$$

В самом простом – бесспиновом случае

$$\Psi^{(\vec{k})}(\vec{p}) = \langle p | k \rangle = 2k_0 \delta(\vec{p} - \vec{k}). \quad (1.205)$$

Спин же создает серьезные проблемы. Для простоты рассмотрим случай спина  $\frac{1}{2}$ .

Волновая функция частицы со спином  $\frac{1}{2}$  с третьей компонентой  $s_3$ , импульсом  $\vec{k}$  может быть записана (исключая временную зависимость) в виде

$$\Psi^{(k, s_3)}(\vec{p}) = D(L(k)u(0, s_3)) 2k_0 \delta(\vec{k} - \vec{p}). \quad (1.206)$$

Учитывая, что

$$u(0, 1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(0, -1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.207)$$

В вычислениях удобно заменить  $s_3 = \pm \frac{1}{2}$  на  $\tau = 1, 2$ , т.е.  $\frac{1}{2} \rightarrow 1, -\frac{1}{2} \rightarrow 2$ . Тогда можно записать  $u_a(0, \tau) = \delta_{a\tau}$ , и

$$\Psi_a^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = D_{a\tau}(L(k)) 2k_0 \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (1.208)$$

$$\text{т.е.} \quad u_a(k, \tau) = D_{a\tau}(L(k)). \quad (1.209)$$

$D_{ab}(L(k))$  –  $ab$  – матричные элементы матрицы  $D(L(k))$ . В вейлевском представлении  $\gamma$ -матриц

$$\gamma_\mu^W = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_i = -\sigma_i, \quad \sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 = 1 \quad (1.210)$$

$$\text{имеем} \quad D^W(L(k)) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} (k \cdot \tilde{\sigma})^{1/2} & 0 \\ 0 & (k \cdot \sigma)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (1.211)$$

Отсюда видна причина, почему вейлевское представление столь удачно: матрица  $D^W$  становится «бокс-диагональной». Учитывая матрицу перехода между паулиевским и вейлевским представлением

$$\frac{1}{2}(\gamma_0^P + \gamma_5^P) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.212)$$

и зная вид спиноров в паулиевской реализации  $u(0, \tau)$ , получаем в вейлевской реализации

$$u^W(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^W(0,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.213)$$

Волновую функцию перепишем в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \psi_a^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = \varphi_a^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}), \quad a = \alpha = 1, 2; \quad (1.214)$$

$$\psi_b^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = \tilde{\varphi}_{\dot{\beta}}^{(\vec{k}, \tau)}(p), \quad b = \dot{\beta} + 2 = 3, 4, \quad ,$$

где

$$\varphi_{\alpha}^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left( (k \cdot \tilde{\sigma})^{1/2} \right)_{\alpha\tau} 2k_0 \delta(\vec{p} - \vec{k}); \quad (1.215)$$

$$\varphi_{\dot{\beta}}^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left( (k \cdot \sigma)^{1/2} \right)_{\dot{\beta}\tau} 2k_0 \delta(\vec{p} - \vec{k}).$$

Так как  $\psi$  удовлетворяет уравнению Дирака, можно выразить  $\tilde{\varphi}$  в терминах  $\varphi$  и наоборот. Действительно,

$$\tilde{\varphi}_{\dot{\beta}}^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = \sum_{\alpha} \left( \frac{k \cdot \sigma}{m} \right)_{\dot{\beta}\alpha} \varphi_{\alpha}^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}). \quad (1.216)$$

С помощью этого соотношения можно установить связь между состояниями  $|k, \tau\rangle$  и волновыми функциями  $\varphi_{\alpha}^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p})$ . Этого можно добиться путем введения так называемых спинорных состояний, определяемых следующим образом:

$$\varphi_{\alpha}^{(\vec{k}, \tau)}(\vec{p}) = \langle p, \alpha | k, \tau \rangle. \quad (1.217)$$

Учитывая точный вид функции  $\varphi$ , получим формулу, связывающую спинорные состояния с состояниями  $|k, \tau\rangle$

$$|p, \alpha\rangle = \sum_{\tau} \int \frac{d^3 k}{2k_0} \left( \left( \frac{k \cdot \tilde{\sigma}}{2m} \right)^{1/2} \right)_{\tau\alpha} 2k_0 \delta(\vec{p} - \vec{k}) |k, \tau\rangle. \quad (1.218)$$

При получении соотношения (1.186) мы воспользовались эрмитовостью матрицы  $(k \cdot \tilde{\sigma})^{1/2}$ . Очевидно, что матрица  $\left(\frac{k \cdot \tilde{\sigma}}{2m}\right)^{1/2}$  не является унитарной. Поэтому базис  $|p, \alpha\rangle$  – неортогональный

$$\langle p', \alpha' | p, \alpha \rangle = \frac{(k \cdot \tilde{\sigma})_{\alpha' \alpha}}{2m} 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{k}). \quad (1.219)$$

При этом индекс  $\alpha$  не связан с каким-либо квантовым числом.

### 1.3. Лоренц-инвариантность как источник симметрии

Весьма привлекательной выглядит идея о том, что локальная симметрия всех фундаментальных взаимодействий частиц материи и соответствующих безмассовых калибровочных полей способна генерироваться динамически. Обратимся к роли лоренцевской симметрии в динамической генерации калибровочной симметрии.

При рассмотрении наиболее общих взаимодействий между векторным полем и фермионной материей удобно использовать для представления фермионов 2-компонентные левые вейлевские поля  $\psi_{L_i}$ . Для простоты выберем случай двух вейлевских полей ( $i=1,2$ ), которые будем объединять в дираковско-подобное поле

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{L_1} \\ \psi_{L_2} \end{pmatrix}.$$

Наиболее общая плотность лагранжиана, имеющего члены до размерности 4 по массе, а также содержащего векторное поле спина 1 и два вейлевских фермиона:

$$\begin{aligned} L(A, \Psi) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A_\mu^2 + i \sum_{j=1}^2 \Psi_{L_j}^\dagger \sigma_\mu \partial_\mu \Psi_{L_j} - \\ & - \sum_{j,k=1}^2 \varepsilon^{\alpha\beta} \left( m_{jk} \Psi_{L_j \alpha} \Psi_{L_k \beta} + m_{jk}^* \Psi_{L_j \alpha}^\dagger \Psi_{L_k \beta}^\dagger \right) + \\ & + \sum_{j,k=1}^2 e_{jk} A_\mu \Psi_{L_j}^\dagger \sigma_\mu \Psi_{L_k} + \frac{f}{4} A_\mu^2 A_\mu^2. \end{aligned} \quad (1.220)$$



Лоренцевское условие  $(\partial_\mu A_\mu = 0)$  подразумевает, что после соответствующего изменения масштаба кинетическое слагаемое для  $A_\mu$  записывается в обычной  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  форме.

Заметим, что  $m_{jk} = m_{kj}$ , как следствие ферми-статистики. Всегда возможно упростить плотность лагранжиана (1.220), определяя два новых левых вейлевских спинорных поля, которые преобразуют «зарядовый член»  $\sum_{j,k=1}^2 e_{jk} A_\mu \Psi_{L_j}^+ \sigma_\mu \Psi_{L_k}$  в диагональную форму

$$\sum_{k=1}^2 e_k A_\mu \Psi_{L_k}^+ \sigma_\mu \Psi_{L_k}.$$

Теперь предположим, что происходит спонтанное нарушение лоренцевской симметрии (СНЛС). Пусть векторное поле  $A_\mu$  имеет вид

$$A_\mu = a_\mu(x) + n_\mu \quad (1.221)$$

при СНЛС. В этом выражении постоянный лоренцевский 4-вектор  $n_\mu$  – классическое фоновое поле, которое появляется тогда, когда векторное поле  $A_\mu$  формирует вакуумное среднее  $VEV$ . Подстановка (1.221) в (1.220) показывает, что кинетический член для векторного поля  $A_\mu$  трансформируется в кинетический член для  $a_\mu$   $(F_{\mu\nu}^{(A)} = F_{\mu\nu}^{(a)})$ , а массовые члены и члены со взаимодействием испытывают изменения. Что касается взаимодействия, то опять-таки оказывается возможным провести унитарное преобразование к двум новым вейлевским фермионным полям

$$\Psi_{L_k} = \exp[ie_k \omega(x)] \Psi_{L_k}, \quad \omega(x) = n \cdot x, \quad (1.222)$$

так, чтобы нарушающий лоренц-симметрию член  $n_\mu \cdot \sum_{k=1}^2 e_k \Psi_{L_k}^+ \sigma_\mu \Psi_{L_k}$  точно сократился в плотности лагранжиана  $L(a_\mu + n_\mu, \Psi)$ .

Однако массовые члены при преобразованиях (1.222) изменяются:

$$m_{jk} \Psi_{L_j \alpha} \Psi_{L_k \beta} \rightarrow m_{jk} \exp \left[ i(e_j + e_k) n \cdot x \right] \Psi_{L_j \alpha} \Psi_{L_k \beta}. \quad (1.223)$$

Если  $e_j + e_k \neq 0$  для некоторых ненулевых матричных элементов  $m_{jk}$ , то преобразованный массовый член будет зависеть от  $n_\mu$  посредством трансляционно-неинвариантного фактора  $\exp \left[ i(e_j + e_k) n \cdot x \right]$ , который очевидным образом нарушает лоренцевскую симметрию. Если предположить, что все лоренц-неинвариантные эффекты, вызванные СНЛС, являются физически ненаблюдаемыми, то из этого базисного принципа можно получить калибровочно-инвариантные теории (абелевы и неабелевы), стартуя с произвольного релятивистски-инвариантного лагранжиана.

Применяя этот принцип к рассматриваемому случаю, получаем, что СНЛС подразумевает, что для  $e_j + e_k = 0$  мы можем иметь только ненулевые значения  $m_{jk}$ . После использования этих условий на зарядовые члены остающиеся «следы» СНЛС содержатся в массовом члене  $A_\mu^2 A_\mu^2$  векторного поля. Поэтому остающееся условие ненаблюдаемости СНЛС:

$$\left[ M^2 + f(a^2 + (n \cdot a) + n^2) \right] (n \cdot a) = 0. \quad (1.224)$$

Дополнительное калибровочное условие  $n \cdot a = n_\mu a_\mu = 0$  было бы несовместимо с лоренцевской калибровкой  $(\partial_\mu A_\mu = 0)$ , уже использованной для векторного поля  $a_\mu$ . Поэтому, чтобы удовлетворить условию (1.224), следует считать  $M^2 = 0$  и  $f = 0$ . Таким образом, используя принцип ненаблюдаемости СНЛС, условие лоренцевской калибровки и присутствие в лагранжевой плотности членов с размерностью не выше четырех, приводит к плотности лагранжиана киральной электродинамики:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\sum_{k=1}^2\Psi_{L_k}^+\sigma_\mu(\partial_\mu - ie_k a_\mu)\Psi_{L_k} -$$

$$- \sum_{j,k=1}^2\left(m_{jk}\Psi_{L_j\alpha}\Psi_{L_k\beta}\epsilon^{\alpha\beta} + \text{э.с.}\right) \quad (1.225)$$

с ограничением  $m_{jk}=0$  до тех пор, пока  $e_j + e_k = 0$ . Вообще говоря, при  $\sum_k e_k^3 \neq 0$  даже форма (1.225) ведет к наблюдаемости СНЛС

из-за наличия *ABJ* аномалии в токе  $j_\mu^A = \sum_k e_k \Psi_{L_k}^+ \sigma_\mu \Psi_{L_k}$ , связанном с  $A_\mu$ . Мы хотели бы интерпретировать  $\Psi_{L_k}$  как физические фермионные поля, однако в импульсном представлении преобразование (1.222) соответствует замене импульса каждого фермиона на величину  $e_k n_\mu$ . Это вызывает нарушение в сохранении импульса, которое можно отнести к ненаблюдаемым, поскольку заряд, ассоциированный с током  $j_\mu^A$ , сохраняется. Это означает, что аномалия в сохранении тока будет также нарушать сохранение импульса за счет членов, пропорциональных  $n_\mu$ . Такое нарушение импульса приводило бы к наблюдаемым следствиям нарушения Лоренц-симметрии. Поэтому есть только один способ удовлетворить принципу ненаблюдаемости СНЛС – потребовать, чтобы выполнялось условие:

$$\sum_k e_k^3 = 0. \quad (1.226)$$

Для простого случая двух вейлевских полей это означает, что два заряда должны быть равны по величине и противоположны по знаку  $e_1 + e_2 = 0$ . Это как раз то условие, которое необходимо для ненулевых массовых матричных элементов  $m_{12} = m_{21} \neq 0$ . Если заряды ненулевые, диагональные (майорановские) массовые матричные элементы обращаются в ноль:  $m_{11} = m_{22} = 0$  и два вейлевских поля,

соответствующих массивной частице, описываются дираковским полем  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{L_1} \\ \Psi_{L_2}^+ \end{pmatrix}$ .

Таким образом, мы приходим к калибровочно-инвариантной КЭД как единственной версии теории, которая совместима с лоренц-инвариантностью при наличии СНЛС.

Теперь обратимся к многовекторному случаю и покажем, что он приводит к неабелевой калибровочной симметрии. Предположим, что имеется набор векторных полей (спин 1)  $A_\mu^i(x)$ ,  $i=1, \dots, N$ , удовлетворяющих лоренцевскому калибровочному условию, но не обладающих глобальной симметрией. Поля материи образуют набор дираковских полей  $\psi = (\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)})$ . Плотность лагранжиана  $L(A_\mu^i, \psi)$ , описывающая все взаимодействия

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + \frac{1}{2} (M^2)_{ij} A_\mu^i A_\mu^j + \alpha^{ijk} \partial_\mu A_\mu^i A_\mu^j A_\mu^k + \beta^{ijkl} A_\mu^i A_\nu^j A_\mu^k A_\nu^l - \bar{\psi} m \psi + A_\mu^i \bar{\psi} \gamma_\mu T^i \psi. \quad (1.227)$$

В этом выражении  $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ ,  $(M^2)_{ij}$  –  $N \times N$  массовые матрицы для векторных полей,  $\alpha^{ijk}$  и  $\beta^{ijkl}$  – безразмерные константы связи.

Матрицы  $r \times r$   $m$  и  $T$  содержат произвольные фермионные массы и константы связи, описывающие взаимодействия между фермионами и векторными полями.

Предположим, что векторные поля имеют вид

$$A_\mu^i(x) = a_\mu^i + n_\mu^i \quad (1.228)$$

после СНЛС. Здесь снова постоянные 4-вектора  $n_\mu^i$  – VEV векторных полей. Подставляя (1.228) в плотность лагранжиана (1.227) обнаруживаем, что кинетический член для векторных полей  $A_\mu^i$  трансформируется в кинетический член для векторных полей  $a_\mu^i$

$(F_{\mu\nu}^{(A)} = F_{\mu\nu}^{(a)})$ , а массовые и члены со взаимодействием соответствующим образом изменяются. Сначала рассмотрим бесконечно малые  $n_\mu^i$  4-вектора. Далее воспользуемся принципом ненаблюдаемости СНЛС, требуя точного сокращения между не-Лоренц-инвариантными членами одинаковой структуры в плотности лагранжиана  $L(a_\mu^i + n_\mu^i, \psi)$  для любого набора инфинитезимальных векторов  $n_\mu^i$ . Определим новый набор векторных полей  $\bar{a}_\mu^i$ , определяемых инфинитезимальным преобразованием

$$a_\mu^i = \bar{a}_\mu^i - \alpha^{ijk} \omega^j(x) \bar{a}_\mu^k, \quad \omega^i(x) = n_\mu^i \cdot x_\mu, \quad (1.229)$$

которое включает константы связи  $\alpha^{ijk}$  и линейные «калибровочные» функции  $\omega^i(x)$ . Потребуем, чтобы Лоренц-нарушающие члены в кубических и четверных взаимодействиях векторных полей  $\bar{a}_\mu^i$  сокращали все вклады, содержащие произвольный инфинитезимальный вектор  $n_\mu^i$ . Это условие выполняется тогда (и только тогда), когда константы связи  $\alpha^{ijk}$  и  $\beta^{ijkl}$  удовлетворяют условиям:

А)  $\alpha^{ijk}$  – полностью антисимметричны по индексам  $i, j, k$  и подчиняются структурным соотношениям

$$\alpha^{ijk} \equiv \alpha^{[ijk]} \equiv \alpha_{[jk]}^i, \quad [\alpha^i, \alpha^j] = -\alpha^{ijk} \alpha^k, \quad (1.230)$$

где  $\alpha^i$  определены как матрицы с элементами  $(\alpha^i)^{jk} = \alpha^{ijk}$ .

Б)  $\beta^{ijkl}$  принимают факторизованную форму

$$\beta^{ijkl} = -\frac{1}{4} \alpha^{ijm} \alpha^{klm}. \quad (1.231)$$

Из условия (а) следует, что матрицы  $\alpha^k$  образуют присоединенное представление алгебры Ли, относительно которого векторные поля преобразуются, согласно соотношения (1.229).

Обратимся к массовому члену для векторных полей в лагранжиане  $L(a_\mu^i + n_\mu^i, \psi)$ . Если его выразить в терминах преобразован-

ных векторных полей  $\vec{a}_\mu^i$  (1.229), он содержит «остатки» СНЛС, которые следует считать обращающимися в ноль:

$$\left(M^2\right)_{ij} \left(\alpha^{ikl} \omega^k \vec{a}_\mu^l \vec{a}_\mu^j + \vec{a}_\mu^i n_\mu^j\right) = 0. \quad (1.232)$$

В этом выражении для вещественной эрмитовой матрицы  $M^2$  использовано симметричное свойство  $\left(M^2\right)_{ij} = \left(M^2\right)_{ji}$  и оставлены только члены первого порядка по  $n_\mu^i$ . Два типа «остатков» СНЛС имеют различные структуры, следовательно, должны обращаться в ноль независимо. Из-за антисимметрии структурных констант, первое слагаемое в (1.232) можно переписать в форме, содержащей коммутатор матриц  $M^2$  и  $\alpha^k$ :

$$\left[M^2, \alpha^k\right]_{jl} \omega^k \vec{a}_\mu^l \vec{a}_\mu^j = 0. \quad (1.233)$$

Таким образом, массовая матрица  $M^2$  должна коммутировать со всеми матрицами  $\alpha^k$ , чтобы удовлетворить соотношению (1.233) для всех наборов «калибровочных» функций  $\omega^i = n_\mu^i \cdot x_\mu$ . Так как матрицы  $\alpha^k$  образуют неприводимое представление алгебры Ли, лемма Шура утверждает, что матрица  $M^2$  должна быть кратной единичной матрице  $\left(M^2\right)_{ij} = M^2 \delta_{ij}$ , причем для всех векторных полей.

Условие обращения в ноль второго члена в выражении (1.232) приводит к условию:

$$M^2 \left(n^i \cdot \vec{a}^i\right) = 0 \quad (1.234)$$

для любого бесконечно малого  $n_\mu^i$ . Поскольку лоренцевское калибровочное условие уже использовано, мы не можем вводить дополнительные условия типа  $n^i \cdot \vec{a}^i = n_\mu^i \cdot \vec{a}_\mu^i$ . Поэтому мы с необходимостью приходим к условию

$$\text{В) безмассовости векторных полей } \left(M^2\right)_{ij} = M^2 \delta_{ij} = 0.$$

Наконец, рассмотрим член в лагранжевой плотности,  $L(a_\mu^i + n_\mu^i, \psi)$ , содержащий взаимодействия между векторными и фермионными полями. В терминах преобразованных векторных полей  $\vec{a}_\mu^i$  (1.229) это слагаемое имеет вид:

$$(\vec{a}_\mu^i - \alpha^{ijk} \omega^j \vec{a}_\mu^k + n_\mu^i) \bar{\psi} \gamma_\mu T^i \psi. \quad (1.235)$$

Можно убедиться, что лоренц-нарушающие члены (второй и третий) могут быть исключены, если ввести новый набор фермионных полей  $\Psi$  с помощью преобразования

$$\psi = \exp[iT^i \omega^i(x)] \Psi, \quad \omega^i(x) = n^i \cdot x. \quad (1.236)$$

Один из компенсирующих членов появляется из фермионной кинетической части, причем компенсация происходит для любого набора «калибровочных» функций  $\omega^i(x)$  тогда, и только тогда, если:

Г) матрицы  $T^i$  образуют представление алгебры Ли со структурными константами  $\alpha^{ijk}$ :

$$[T^i, T^j] = i\alpha^{ijk} T^k. \quad (1.237)$$

Вообще говоря, это будет приводимое представление, но для простоты считаем его неприводимым. Это означает, что фермионы  $\Psi$  относятся к неприводимому мультиплету, определяемому матрицами  $T^i$ . Унитарное преобразование (1.236) изменяет массовый член фермионов следующим образом:

$$\Psi(m + i\omega^k [m, T^k]) \Psi. \quad (1.238)$$

Обращение в ноль Лоренц-неинвариантного члена (второго в (1.238) для произвольного набора «калибровочных» функций  $\omega^i(x)$  требует, чтобы матрица  $m$  коммутировала со всеми матрицами  $T^k$ . Согласно лемме Шура, это означает, что матрица  $m$  пропорциональна единичной матрице.

Д) все фермионные поля одного неприводимого мультиплета должны иметь одинаковую массу:

$$m_{rs} = m\delta_{rs} \quad (1.239)$$

Если же фермионы разлагаются в несколько неприводимых мультиплетов, их массы в пределах одного мультиплета должны быть одинаковыми.

Объединяя все условия (A)–(E), полученные из принципа ненаблюдаемости СНЛС для любого набора инфинитезимальных векторов  $n_\mu^i$ , примененного к лагранжевой плотности (1.227), получаем калибровочно-инвариантную янг-миллсовскую теорию для новых полей  $\vec{a}_\mu^i$  и  $\Psi$ :

$$L_{YM} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}^i\vec{F}_{\mu\nu}^i + i\bar{\Psi}\gamma\partial\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g\vec{a}_\mu^i\Psi\gamma_\mu\vec{T}^i\Psi \quad (1.240)$$

В этом выражении  $\vec{F}_{\mu\nu}^i = \partial_\mu\vec{a}_\nu^i - \partial_\nu\vec{a}_\mu^i + g\vec{a}_\mu^{ijk}\vec{a}_\nu^j\vec{a}_\nu^k$ ,  $g$  – универсальная калибровочная константа связи, извлекаемая из соответствующих матриц  $\alpha^{ijk} = g\vec{a}^{ijk}$  и  $T^i = g\vec{T}^i$ .

Обратимся теперь к обобщению  $VEV$  векторного поля с инфинитезимального на конечные фоновые классические поля  $n_\mu^i$ . К сожалению, не удастся обобщить СНЛС (1.228) на конечные вектора  $n_\mu^i$ . С другой стороны,  $n_\mu^i$  для различных векторных полей могут не коммутировать и могут быть ориентированы в разных направлениях в лоренцевском пространстве, приводя к ненулевым напряженностям в соответствующем вакууме. Такой вакуум не был бы Лоренц-инвариантным, и это означало бы физическое нарушение Лоренц-инвариантности. Эту проблему можно автоматически избежать, если конечный СНЛС вектор сдвига в соотношении (1.228) выбрать в факторизованной форме  $n_\mu^i = n_\mu \cdot f^i$ , где  $n_\mu$  – постоянный Лоренц-вектор, как и в абелевом случае, а  $f^i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) – вектор во внутреннем зарядовом пространстве. Используя выражение (1.240) для лагранжиана, нетрудно показать, что эффекты СНЛС не будут наблюдаемыми для любого набора



конечных факторизованных  $VEV$  с  $n_\mu^i = n_\mu \cdot f^i$ . Для этих целей обобщим выражение (1.229) на конечное преобразование

$$a_\mu \alpha = \exp[(\omega \alpha)] \bar{a}_\mu \alpha \exp[-(\omega \alpha)]. \quad (1.241)$$

Таким образом, калибровочно-инвариантные абелевы и неабелевы теории могут быть получены, исходя из требования физической ненаблюдаемости СНЛС.

## 1.4. Конформная симметрия

Среди общих координатных преобразований 4-мерного пространства Минковского, сохраняющих интервал  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ , имеются такие преобразования, которые изменяют только масштаб метрики:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g w(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (1.242)$$

и, следовательно, оставляют углы на световом конусе инвариантными. Такого типа преобразования относятся к конформной группе. Очевидно, что конформные преобразования соответствуют обобщенной группе Пуанкаре, поскольку метрика Минковского не меняется при трансляциях и лоренцевских вращениях. Примерами конформных преобразований могут служить дилатации (глобальные преобразования метрики) и инверсия:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu; \quad x^\mu = x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \quad (1.243)$$

с вещественными  $\lambda$ . Другой важный пример – специальное конформное преобразование

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a \cdot x + q^2 x^2}, \quad (1.244)$$

которое соответствует инверсии, трансляции на произвольный постоянный вектор  $a_\mu$  и еще одной инверсии относительно того же центра.

Конформная алгебра в 4-х измерениях содержит 15 генераторов

$$\begin{array}{ll}
P_\mu & (4 \text{ трансляции}) \\
M_{\mu\nu} & (6 \text{ лоренцевских вращений}) \\
D & (\text{дилатация}) \\
K_\mu & (4 \text{ специальных конформных преобразования})
\end{array} \tag{1.245}$$

и обобщение известной 10-параметрической алгебры Ли группы Пуанкаре, генерируемой  $P_\mu$  и  $M_{\mu\nu}$ :

$$i[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad i[M_{\alpha\beta}, P_\mu] = g_{\alpha\mu}P_\beta - g_{\beta\mu}P_\alpha; \tag{1.246}$$

$$\begin{aligned}
i[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] &= g_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} - \\
&- g_{\alpha\nu}M_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}M_{\alpha\mu}.
\end{aligned} \tag{1.247}$$

Оставшиеся коммутационные соотношения, определяющие конформную алгебру

$$\begin{aligned}
i[D, P_\mu] &= P_\mu, \quad i[D, K_\mu] = K_\mu; \quad i[M_{\alpha\beta}, K_\mu] = g_{\alpha\mu}K_\beta - g_{\beta\mu}K_\alpha; \\
i[P_\mu, K_\nu] &= -2g_{\mu\nu} + 2M_{\mu\nu}; \quad i[D, M_{\mu\nu}] = i[K_\mu, K_\nu] = 0.
\end{aligned} \tag{1.248}$$

Генераторы действуют на фундаментальное поле  $\Phi(x)$  произвольного спина следующим образом

$$\begin{aligned}
\delta_P^\mu \Phi(x) &\equiv i[P^\mu, \Phi(x)] = \partial^\mu \Phi(x); \\
\delta_M^{\mu\nu} \Phi(x) &\equiv i[M^{\mu\nu}, \Phi(x)] = (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu - \Sigma^{\mu\nu}) \Phi(x); \\
\delta_D \Phi(x) &\equiv i[D, \Phi(x)] = (x \cdot \partial + l) \Phi(x);
\end{aligned} \tag{1.249}$$

$$\delta_K^\mu \Phi(x) \equiv i[K^\mu, \Phi(x)] = (2x^\mu x \cdot \partial - x^2 \partial^\mu + 2lx^\mu - 2x_\nu \Sigma^{\mu\nu}) \Phi(x).$$

Например, если рассматриваются бесконечно малые трансляции  $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu$ , то поле  $\Phi$  преобразуется следующим образом

$$\Phi'(x) = [1 + \varepsilon_\mu \delta_P^\mu] \Phi(x) \tag{1.250}$$

$\Sigma^{\mu\nu}$  – генератор спиновых вращений поля  $\Phi(x)$ . Для скаляров, дираковских спиноров (кварков) и векторных (глюонных) полей

$$\Sigma^{\mu\nu} \varphi(x) = 0, \quad \Sigma^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \psi; \tag{1.251}$$

$$\Sigma^{\mu\nu} A^\alpha = g^{\nu\alpha} A^\mu - g^{\mu\alpha} A^\nu,$$

где  $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ .

Параметр  $l$  называется масштабной размерностью, этот параметр определяет изменение поля при дилатациях. В свободной теории (на классическом уровне) масштабная размерность совпадает с канонической размерностью ( $l^{can}$ ), которая фиксируется требованием безразмерности действия. В квантовой теории  $l \neq l^{can}$ , и их размерность называется аномальной размерностью. Для ультрарелятивистской частицы (кварка или глюона), распространяющейся вблизи поверхности светового конуса, оказывается существенным разделение продольных и поперечных координат. Удобно ввести следующие обозначения для проекций на два независимых светоподобных вектора. Для произвольного 4-вектора  $A_\mu$  определим величины

$$A_+ \equiv A_\mu n^\mu, \quad A_- \equiv A_\mu \bar{n}^\mu, \quad n^2 = \bar{n}^2 = 0, \quad n \cdot \bar{n} = 1 \quad (1.252)$$

и метрический тензор в направлениях, ортогональных к световому конусу

$$g_{\mu\nu}^\perp = g_{\mu\nu} - n_\mu \bar{n}_\nu - n_\nu \bar{n}_\mu. \quad (1.253)$$

Будем использовать также обозначение  $A_\perp$  для поперечной проекции и  $A_\perp^\mu$  для вектора, имеющего только поперечные компоненты. Например,

$$x^\mu = x_- n^\mu + x_+ \bar{n}^\mu + x_\perp^\mu; \quad x_\perp^\mu \equiv g_{\perp}^{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.254)$$

При этом  $x^2 = 2x_+ x_- - x_\perp^2$ .

Рассмотрим случай конформных преобразований (1.244), для которых  $a_\mu$  – светоподобный вектор  $a_\mu = a \bar{n}^\mu$ . Тогда

$$x_- \rightarrow x'_- = \frac{x_-}{1 + 2ax_-}. \quad (1.255)$$

Эти преобразования отображают световой луч в  $x$ -направлении на самого себя. Совместно с трансляциями и дилатациями в этом направлении  $x_- \rightarrow x_- + c$  и  $x_- \rightarrow \lambda x_-$ , эти преобразования составляют коллинеарную подгруппу полной конформной группы. Эта под-

группа  $-SL(2, R)$ , и именно она играет центральную роль в последующем анализе.

В партонной модели адронные состояния заменяются пучком коллинеарных партонов, движущихся в том же направлении, скажем,  $\vec{p}_\mu$ . Вне зависимости от конкретной модели, необходимо лишь считать, что кантовые поля «живут» на световом луче

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(\alpha n), \quad (1.256)$$

где  $\alpha$  – вещественное число.

Для упрощения обозначений часто считают, что  $\Phi(x) \equiv \Phi(\alpha n)$ . Предположим, что поле  $\Phi$  является собственным состоянием оператора спина  $\Sigma_{+-}$  и имеет фиксированную проекцию  $s$  на  $(+)$  направление:

$$\Sigma_{+-} \Phi(\alpha) = s \Phi(\alpha). \quad (1.257)$$

В общем случае для разделения различных спиновых компонент необходимо использовать соответствующие проекционные операторы. Примеры будут обсуждаться ниже.

С учетом этих определений и обозначений, 4-мерные конформные преобразования сводятся к коллинеарной подгруппе, генерирующей проективные преобразования на линии

$$\alpha \rightarrow \alpha' = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad ad - bc = 1, \quad (1.258)$$

$$\Phi(\alpha) \rightarrow \Phi'(\alpha) = (c\alpha + d)^{-2j} \Phi\left(\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}\right),$$

где  $a, b, c, d$  – вещественные числа, причем

$$j = (l + s)/2. \quad (1.259)$$

Эти преобразования осуществляются четырьмя генераторами  $P_+, M_{+-}, D$  и  $K$ , образующими коллинеарную подалгебру конформной алгебры (1.247, 1.248). Величина  $j$  называется конформным спином. Чтобы привести коммутационные соотношения к стандартному виду, удобно построить следующие линейные комбинации:

$$\begin{aligned} L_+ &= L_1 + iL_2 = -iP_+; & L_- &= L_1 - iL_2 = \frac{i}{2}K_-; \\ L_0 &= \frac{i}{2}(D + M_{+-}); & E &= \frac{i}{2}(D - M_{+-}). \end{aligned} \quad (1.260)$$

Тогда  $[L_0, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}; [L_-, L_+] = -2L_0$ , (1.261)

это алгебра группы  $SL(2, R)$ , изоморфная  $O(2, 1)$ .

Действие генераторов (1.260) на квантовые поля можно вывести из соотношений (1.247):

$$\begin{aligned} [L_+, \Phi(\alpha)] &= -\partial_{\alpha} \Phi_{\alpha} \equiv L_+ \Phi(\alpha); \\ [L_-, \Phi(\alpha)] &= (\alpha^2 \partial_{\alpha} + 2j\alpha) \Phi_{\alpha} \equiv L_- \Phi(\alpha); \\ [L_0, \Phi(\alpha)] &= (\alpha \partial_{\alpha} + j) \Phi_{\alpha} \equiv L_0 \Phi(\alpha), \end{aligned} \quad (1.262)$$

где  $\partial_{\alpha} = \frac{d}{d\alpha}$ .

Генератор  $E$  характеризует твист  $t = \frac{1}{2}(l - s)$  поля  $\Phi$ :

$$[E, \Phi(\alpha)] = \frac{1}{2}(l - s) \Phi(\alpha). \quad (1.263)$$

Генератор  $E$  коммутирует со всеми  $L_i$ . Определение (1.263) соответствует так называемому коллинеарному твисту (размерность минус проекция спина на плюс-направление). Его следует отличать от геометрического твиста (размерность минус спин), который относится к полной конформной группе.

Локальный полевой оператор  $\Phi(\alpha)$ , определяющий проекцию спина (1.257), является собственным состоянием квадратичного оператора Казимира

$$\sum_{i=0,1,2} [L_i, [L_i, \Phi(\alpha)]] j(j-1) \Phi(\alpha) = \tilde{L}^2 \Phi(\alpha), \quad (1.264)$$

где  $\tilde{L}^2 = \tilde{L}_0^2 + \tilde{L}_1^2 + \tilde{L}_2^2; \quad [\tilde{L}^2, \tilde{L}_i] = 0 \quad (1.265)$

и операторы  $L_i$  удовлетворяют  $SL(2, R)$  коммутационным соотношениям

$$[\tilde{L}_0, \tilde{L}_{\pm}] = \mp \tilde{L}_{\mp}; \quad [\tilde{L}_-, \tilde{L}_+] = -2\tilde{L}_0. \quad (1.266)$$

Из соотношений (1.258) и (1.264) следует, что поле  $\Phi(\alpha)$  реализует представление группы  $SL(2, R)$ , определяемое параметром  $j$ , которое, как уже отмечалось, называется конформным спином поля.

Как видно из соотношения (1.259), величина  $j$  положительна, причем  $j$  принимает (полу)целые значения.

Помимо коллинеарной подгруппы, можно рассмотреть другую подгруппу, соответствующую преобразованиям двумерной поперечной плоскости  $x_{\perp}^{\mu} = (0, x_1, x_2, 0)$ , определенным соотношениями (1.254). Эта «поперечная» подгруппа содержит шесть генераторов  $P_{\perp}^{\mu}$ ,  $M_{\perp}^{\mu\nu}$ ,  $D$  и  $K_{\perp}^{\mu\nu}$  и изоморфна  $SL(2, C)$ .

Введём комплексные координаты

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2 = z^*, \quad (1.267)$$

в терминах в которых групповые преобразования выглядят следующим образом

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad \bar{z} \rightarrow \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}, \quad (1.268)$$

где  $a, b, c, d$  – комплексные числа и  $ad - bc = 1$ . Для фундаментальных полей, «живущих» в поперечной плоскости  $\Phi = \Phi(z, \bar{z})$ , закон преобразования

$$\begin{aligned} \Phi(z, \bar{z}) &\rightarrow \Phi'(z, \bar{z}) = \\ &= (cz + d)^{-2h} (\bar{c}\bar{z} + \bar{d})^{-2\bar{h}} \Phi\left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}\right), \end{aligned} \quad (1.269)$$

где  $h = (l + \lambda)/2$ ,  $\bar{h} = (l - \lambda)/2$  и  $\lambda$  – спиральность поля, определяемая как  $\Sigma^{\bar{z}z}\Phi = \lambda\Phi$ . Заметим, что коллинеарная и поперечная подгруппы имеют общий генератор дилатаций  $D$ , следовательно, они не являются независимыми.

Продолжим обсуждение конформной симметрии с простейшего примера – скалярного поля, описываемого действием

$$S[\Phi] = \int d^D x \left( \frac{1}{2} \partial^{\mu} \Phi \partial_{\mu} \Phi - m^2 \Phi^2 - V(\Phi) \right). \quad (1.270)$$

В естественных единицах ( $\hbar = c = 1$ ) действие  $S[\Phi]$  – безразмерно. Тогда масса  $m$  должна иметь, как и производные  $\partial_{\mu}$ , размерность (длина) $^{-1}$ . Действие (1.270) инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре, т.е. относительно пространственных

трансляций, вращений и лоренцевских сдвигов. Симметрия относительно этих преобразований приводит к важным следствиям.

Рассмотрим влияние трансляционной инвариантности на функции Грина:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{Z} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]},$$

$$\phi(x_\mu) = \phi'(x_\mu + a_\mu), \quad S[\phi] = S[\phi']. \quad (1.271)$$

Мера в выражении (1.271) тоже инвариантна относительно трансляций:

$$\Pi_x d\phi(x) = \Pi_{x-a} d\phi(x-a) = \Pi_{x-a} d\phi' = \Pi_x d\phi'(x). \quad (1.272)$$

Следовательно,

$$G(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{Z} \int D\phi' \phi'(x_1 + a) \dots \phi'(x_n + a) e^{iS[\phi']} = G(x_1 + a, \dots, x_n + a). \quad (1.273)$$

Таким образом, функции Грина трансляционно-инвариантны, т.е. они могут зависеть лишь от разности их аргументов. Аналогичным образом, из лоренцевской (вращательной) инвариантности следует, что функции Грина могут зависеть от величин типа  $(x_1 - x_2)^\mu \cdot (x_1 - x_2)_\mu$ ;  $(x_1 - x_2)^\mu \cdot (x_1 - x_3)_\mu$  и т. д.

Если в действии (1.270) положить  $m = 0$ , то, в зависимости от конкретного выбора потенциала  $V(\phi)$ , могут возникать «специальные» симметрии.

Обратимся снова к размерностям различных членов в действии. Пусть поля  $\phi$  имеют размерности (длина) <sup>$A$</sup> . Это означает, что кинетическая часть действия имеет размерность (длина) <sup>$2A-2+D$</sup> . Тогда мы имеем произведение двух полей, дающее размерность (длина) <sup>$2A$</sup> , двух производных с размерностью (длина) <sup>$-2$</sup>  и интеграл  $\int d^D x$  с размерностью (длина) <sup>$D$</sup> . Поскольку действие безразмерно, то следует положить  $A = \frac{2-D}{2}$ . Потенциальный член в

(1.270) тоже должен быть безразмерным. Если считать, что  $V(\phi) = g\phi^P$  с безразмерной константой связи  $g$ , то возникает размерность (длина) $^{\frac{P}{2}(2-D)}$ . С учетом интегрирования  $\int d^D x$ , потенциальная часть действия имеет размерность (длина) $^{\frac{P}{2}(2-D)+D}$ . Поэтому следует положить  $P = \frac{2D}{(D-2)}$ . Для  $D=4$  получаем

$V(\phi) = g\phi^4$ , а при  $D=3$   $V(\phi) = g\phi^6$ .

«Специальная» симметрия, о которой упоминалось выше, – это симметрия действия относительно масштабных преобразований  $x'^\mu = \lambda x^\mu$ . При таких преобразованиях безразмерное действие изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^D x \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - g \phi^{\frac{2D}{D-2}}(x) \right) = \\ &= \lambda^{-D} \int d^D x' \left( \lambda^2 \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \left( \frac{x'}{\lambda} \right) \partial'_\mu \phi \left( \frac{x'}{\lambda} \right) - g \phi \left( \frac{x'}{\lambda} \right)^{\frac{2D}{D-2}} \right), \end{aligned} \quad (1.274)$$

где  $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\lambda \partial x^\mu}$ . Тогда

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^D x' \left( \frac{1}{2} \partial'^\mu \left( \lambda^{\frac{(D-2)}{2}} \phi \left( \frac{x'}{\lambda} \right) \right) \partial'_\mu \left( \lambda^{\frac{(D-2)}{2}} \phi \left( \frac{x'}{\lambda} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - g \left( \lambda^{\frac{(D-2)}{2}} \phi \left( \frac{x'}{\lambda} \right) \right)^{\frac{2D}{D-2}} \right). \end{aligned} \quad (1.275)$$

Если считать, что поля при масштабных преобразованиях изменяются по закону  $\phi'(x) = \lambda^{-\frac{(D-2)}{2}} \phi\left(\frac{x'}{\lambda}\right)$ , то действие окажется инвариантным относительно этих преобразований:



$$\begin{aligned}
S[\phi] &= \int d^D x \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - g \phi(x)^{\frac{2D}{D-2}} \right) = \\
&= S[\phi'] = \int d^D x \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \phi'(x) \partial_\mu \phi'(x) - g \phi'(x)^{\frac{2D}{D-2}} \right). \quad (1.276)
\end{aligned}$$

Но для масштабных преобразований мера оказывается инвариантной

$$\int D\phi = \prod_{x_i} \int d\phi(x_i) = \prod_{x_i} \lambda^{\frac{D-2}{2}} \int d\phi'(x'_i) = \left( \prod_{x_i} \lambda^{\frac{D-2}{2}} \int D\phi' \right). \quad (1.277)$$

Однако в определение функций Грина входит фактор  $\frac{1}{Z}$ . При этом функционал  $Z$  приобретает такой же фактор, и эти факторы в числителе и знаменателе (1.271) сокращают друг друга. В результате вид 2-точечной функции Грина оказывается фиксированным:

$$\begin{aligned}
G(x_1 - x_2) &= \frac{1}{Z} \int D\phi \lambda^{\frac{D-2}{2}} \phi'(\lambda x_1) \phi'(\lambda x_2) e^{iS[\phi'(x')]} = \\
&= \lambda^{D-2} \frac{1}{Z} \int D\phi \phi'(\lambda x_1) \phi'(\lambda x_2) e^{iS[\phi'(x')]} = \lambda^{D-2} G(\lambda(x_1 - x_2)). \quad (1.278)
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что 2-точечная функция Грина

$$G(x_1 - x_2) \sim \frac{1}{|x_1 - x_2|^{D-2}}. \quad (1.279)$$

Этот результат справедлив как для евклидова пространства, так и для пространства Минковского. До сих пор масштабные преобразования и пуанкаре-преобразования рассматривались отдельно. Комбинацию преобразований Пуанкаре и масштабных преобразований называют конформными преобразованиями. Отметим, что конформные преобразования сохраняют углы между векторами в  $D$ -мерном пространстве. Если говорить о пространстве Минковского, то надо иметь в виду, что конформные преобразования сохраняют углы в  $(3+1)$  измерениях, а не в 3-х пространственных изме-

рениях. Более формально конформные преобразования можно определить как преобразования, которые не меняют отношения

$$\frac{dx^\alpha}{|dx|} \frac{dy_\alpha}{|dy|} \quad (1.280)$$

Очевидно, что вращения, трансляции, лоренцевские сдвиги удовлетворяют этому требованию.

При инфинитезимальном координатном преобразовании  $x \rightarrow x' = x + \varepsilon(x)$  метрический тензор в первом порядке по  $\varepsilon(x)$  изменяется следующим образом

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \varepsilon^\alpha(x)) (\delta_\nu^\beta + \partial_\nu \varepsilon^\beta(x)) = \\ &= g_{\mu\nu} + g_{\mu\beta} \partial_\nu \varepsilon^\beta(x) + g_{\alpha\nu} \partial_\mu \varepsilon^\alpha(x). \end{aligned} \quad (1.281)$$

Если считать, что  $g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} (1 + \Lambda(x))$ , то метрика просто домножается в каждой пространственно-временной точке  $x$  на число, т. е. такое преобразование является локально конформным преобразованием. Попробуем найти функцию  $\varepsilon(x)$ , которая приводит к такому преобразованию метрики. Сначала будем считать метрику плоской:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Мы хотели бы получить

$$\partial_\nu \varepsilon_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (1.282)$$

Свертка этого уравнения дает

$$2\partial^\mu \varepsilon_\mu(x) = D\Lambda(x), \quad (1.283)$$

где  $D$  – число пространственно-временных измерений.

Тогда

$$\partial_\nu \varepsilon_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) = \frac{2}{D} \partial^k \varepsilon_k(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (1.284)$$

Дифференцируя по  $\partial^\mu$ , имеем

$$\partial^\mu \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) = \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \partial_\nu (\partial^\mu \varepsilon_\mu(x)). \quad (1.285)$$

Аналогично дифференцируя по  $\partial^\nu$ , получаем

$$\left(\frac{2}{D}-2\right)\partial^\mu\partial_\mu\left(\partial^\nu\varepsilon_\nu(x)\right)=0. \quad (1.286)$$

Это уравнение имеет два решения: или  $D=1$  или  $\partial^\mu\partial_\mu\left(\partial^\nu\varepsilon_\nu(x)\right)=0$ . Решение  $D=1$  тривиально. Чтобы найти  $\varepsilon_\nu(x)$ , обратимся к соотношениям (1.284) и (1.285). Действуя на (1.284)  $\partial^\lambda\partial_\lambda$ , получаем

$$\partial^\lambda\partial_\lambda\partial_\nu\varepsilon_\mu(x)+\partial^\lambda\partial_\lambda\partial_\mu\varepsilon_\nu(x)=\frac{2}{D}\partial^\lambda\partial_\lambda\partial^k\varepsilon_k(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (1.287)$$

Но из (1.286) следует, что  $\partial^\lambda\partial_\lambda\partial^k\varepsilon_k(x)=0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \partial^\lambda\partial_\lambda\partial_\nu\varepsilon_\mu(x)+\partial^\lambda\partial_\lambda\partial_\mu\varepsilon_\nu(x) &= 0, \\ \partial_\nu\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon_\mu(x) &= -\partial_\mu\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon_\nu(x). \end{aligned} \quad (1.288)$$

Если подействовать на (1.285)  $\partial_\mu$ , то получим

$$\partial_\mu\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon_\nu(x)=\left(\frac{2}{D}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\left(\partial^\lambda\varepsilon_\lambda(x)\right). \quad (1.289)$$

Правая часть этого уравнения симметрична по индексам  $\mu$  и  $\nu$ , поэтому симметричной должна быть и левая часть. Однако, как было показано,  $\partial_\nu\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon_\mu(x)=-\partial_\mu\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon_\nu(x)$ . Поэтому единственный способ согласования этих уравнений – считать  $D=2$  или  $\partial_\mu\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon_\nu(x)=0$ . Следовательно,  $\partial_\mu\partial_\nu\left(\partial^\lambda\varepsilon_\lambda(x)\right)=0$ .

Попытаемся решить уравнение  $\partial_\mu\partial_\nu\left(\partial^\lambda\varepsilon_\lambda(x)\right)=0$ . Общим решением этого уравнения является функция, удовлетворяющая соотношению

$$\partial^\lambda\varepsilon_\lambda(x)=A+B^\lambda x_\lambda. \quad (1.290)$$

Это означает, что  $\varepsilon_\mu(x)$  имеет следующий общий вид:

$$\varepsilon_\mu(x)=a_\mu+b_{\mu\nu}x^\nu+c_{\mu\nu\lambda}x^\nu x^\lambda. \quad (1.291)$$

Для ненулевых  $x^\nu x^\lambda$  тензор  $c_{\mu\nu\lambda}$  симметричен по индексам  $\mu$  и  $\nu$ . Это тривиально показать, используя тот факт, что  $\nu$  и  $\lambda$  – «слепые» переменные, и при суммировании можно обозначить  $\nu\lambda$  через  $\lambda\nu$ :

$$\begin{aligned} c_{\mu\nu\lambda} x^\nu x^\lambda &= c_{\mu\lambda\nu} x^\lambda x^\nu, \\ c_{\mu\nu\lambda} x^\nu x^\lambda &= c_{\mu\lambda\nu} x^\nu x^\lambda. \end{aligned} \quad (1.292)$$

Теперь мы имеем форму  $\varepsilon_\mu(x)$ , с которой можно производить изменение масштаба метрики.

Если подставить общее решение для  $\varepsilon_\mu(x)$  в первоначальное уравнение для  $\varepsilon_\mu(x)$ :

$$\partial_\nu \varepsilon_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) = \frac{2}{D} \partial^k \varepsilon_k(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (1.293)$$

то можно получить ограничения на коэффициенты  $b_{\mu\nu}$  и  $c_{\mu\nu\lambda}$ .

Сначала найдем

$$\begin{aligned} \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) &= \partial_\nu (a_\mu + b_{\mu\rho} x^\rho + c_{\mu\rho\beta} x^\rho x^\beta) = \\ &= \partial_\nu (b_{\mu\rho} x^\rho + c_{\mu\rho\beta} x^\rho x^\beta) = b_{\mu\rho} \delta_\nu^\rho + c_{\mu\rho\beta} \delta_\nu^\rho x^\beta + c_{\mu\rho\beta} x^\rho \delta_\nu^\beta = \\ &= b_{\mu\nu} + (c_{\mu\nu\rho} + c_{\mu\rho\nu}) x^\rho = b_{\mu\nu} + 2c_{\mu\nu\rho} x^\rho. \end{aligned} \quad (1.294)$$

Подставляя  $\partial_\nu \varepsilon_\mu(x)$  в (1.289), получаем

$$b_{\mu\nu} + 2c_{\mu\nu\rho} x^\rho + b_{\nu\mu} + 2c_{\nu\mu\rho} x^\rho = \frac{2}{D} b_\lambda^\lambda \eta_{\mu\nu} + \frac{4}{D} c_{\lambda\rho}^\lambda x^\rho \eta_{\mu\nu}. \quad (1.295)$$

Сравнивая коэффициенты при  $x^\rho$  в обеих частях (1.295), получаем следующие ограничения на  $b_{\mu\nu}$  и  $c_{\mu\nu\lambda}$ :

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} b_\lambda^\lambda, \quad c_{\mu\nu\rho} + c_{\nu\mu\rho} = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} c_{\lambda\rho}^\lambda. \quad (1.296)$$

Запишем  $b_{\mu\nu}$  в виде

$$b_{\mu\nu} = \left( b_{\mu\nu} - \frac{b_{\lambda}^{\lambda}}{D} \eta_{\mu\nu} \right) + \frac{b_{\lambda}^{\lambda}}{D} \eta_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \frac{b_{\lambda}^{\lambda}}{D} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.297)$$

Если подставить (1.297) в первое из соотношений (1.296), то

$$M_{\mu\nu} + \frac{b_{\lambda}^{\lambda}}{D} \eta_{\mu\nu} + M_{\nu\mu} + \frac{b_{\lambda}^{\lambda}}{D} \eta_{\nu\mu} = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} b_{\lambda}^{\lambda}, \quad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}. \quad (1.298)$$

Таким образом,  $b_{\mu\nu}$  можно представить как сумму антисимметричной матрицы  $M_{\mu\nu}$  и симметричной матрицы  $\eta_{\mu\nu} \Lambda$ .

Тогда

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = M_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \Lambda + M_{\nu\mu} + \eta_{\nu\mu} \Lambda = 2\eta_{\mu\nu} \Lambda = 2\eta_{\mu\nu} \frac{1}{D} b_{\lambda}^{\lambda}. \quad (1.299)$$

Итак, тензор  $b_{\mu\nu}$  содержит две компоненты, связанные, соответственно, с лоренцевскими преобразованиями и масштабными преобразованиями:

$$b_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \Lambda. \quad (1.300)$$

Возвращаясь к ограничениям на  $c_{\mu\nu\lambda}$ , имеем

$$c_{\mu\nu\rho} + c_{\nu\mu\rho} = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} c_{\lambda\rho}^{\lambda}. \quad (1.301)$$

Если вспомнить, что отличие от нуля члена  $x^{\nu} x^{\lambda}$  в  $\varepsilon_{\mu}(x)$  требует симметрии  $c_{\mu\nu\lambda}$  по индексам  $\nu$  и  $\lambda$ , то

$$\begin{aligned} c_{\mu\nu\rho} &= \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} c_{\lambda\rho}^{\lambda} - c_{\nu\mu\rho} = \\ &= \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} c_{\lambda\rho}^{\lambda} - \frac{2}{D} \eta_{\nu\rho} c_{\lambda\mu}^{\lambda} + \frac{2}{D} \eta_{\rho\mu} c_{\lambda\nu}^{\lambda} - c_{\mu\rho\nu} = \\ &= \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} c_{\lambda\rho}^{\lambda} - \frac{2}{D} \eta_{\nu\rho} c_{\lambda\mu}^{\lambda} + \frac{2}{D} \eta_{\rho\mu} c_{\lambda\rho}^{\lambda} - c_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (1.302)$$

Таким образом, при общем конформном преобразовании

$$\begin{aligned}
x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \underbrace{a_\mu}_{\text{трансляции}} + \underbrace{\Delta x}_{\text{скейлинг}} + \underbrace{M_{\mu\nu} x^\nu}_{\text{вращения, сдвиги}} + \\
+ \underbrace{\frac{4}{D}(\eta_{\mu\nu} c_\rho + \eta_{\mu\rho} c_\nu - \eta_{\nu\rho} c_\mu)}_{\text{специальные конформные преобразования}} x^\rho x^\nu . \quad (1.303)
\end{aligned}$$

Если теория симметрична относительно таких преобразований, то с этой симметрией должны быть ассоциированы сохраняющиеся токи. Это так называемые дилатонные токи. Дилатонный ток – общее свойство теории, включающей гравитационные эффекты, он связан со скалярным полем – дилатоном.

Обратимся теперь к обсуждению *CPT* как другой фундаментальной симметрии квантовой теории поля.

## 2.1. Введение

Представление о *CPT*-симметрии (*C* – зарядовое сопряжение, *P* – пространственная инверсия, *T* – обращение времени) как о симметрии релятивистской квантовой теории поля возникло в работе Г. Людерса, в которой он утверждал, что зарядовое сопряжение и пространственная инверсия подразумевают одинаковые ограничения на форму гамильтониана, описывающего взаимодействия. Поэтому *CPT*-симметрия имеет более фундаментальный базис, чем *C*, *P* или *T*. В. Паули наиболее прозрачно сформулировал *CPT*-симметрию в контексте тех условий, которым должны удовлетворять гамильтонианы или лагранжианы. О формулировке Паули *CPT*-симметрии говорят как о «лагранжевой *CPT*-теореме». Р. Йост предложил общее доказательство *CPT*-симметрии, основанное на том, что пространственно-временная инверсия связана с тождественностью в комплексной группе Лоренца, однако эта инверсия не связана с тождественностью для вещественной группы Лоренца. Анализ Йоста называют «аксиоматической *CPT*-теоремой». Швингер обсуждал *CPT* и теоремы о спине и статистике с точки зрения его принципа дифференциального действия.

Учебники по квантовой теории поля выводят *CPT*-теорему путем вычисления каждой симметрии и рассмотрения их произведения. Это, вообще говоря, правильный подход. Однако надо иметь в виду, что каждое *C*-, *P*-, *T*-преобразование может иметь произвольную фазу, поскольку они не связаны с тождественным преобразованием, в то время как *CPT*, связанное с тождественным преобразованием, произвольной фазы содержать не может. Весьма интересно проследить, почему *CPT* фундаментальна, в отличие от симметрий *C*, *P* и *T*. Как будет видно, *CPT* фундаментальна потому, что она связана с лоренц-инвариантностью.

## 2.2. Представления вещественной и комплексной групп Лоренца

Ключевым аргументом при обсуждении *CPT*-инвариантности является утверждение о том, что связанная компонента комплексной группы Лоренца  $L(C)$ , которая является сама по себе комплексной группой Лоренца  $L_+(C)$ , включает пространственно-временную инверсию. Для того чтобы получить и пояснить это свойство, обратимся к группе Лоренца.

Вещественную группу Лоренца можно рассматривать как группу  $SO(1,3)$  вещественных  $4 \times 4$  матриц  $\Lambda$ , сохраняющих метрику  $g$ , которую мы выберем в форме  $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ :

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (2.1)$$

Можно проверить, что это условие эквивалентно утверждению о том, что Лоренц-преобразование сохраняет скалярное произведение  $x^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$ , т. е.  $\Lambda x \Lambda = x \cdot x$ . Вычисляя детерминант в выражении (2.1), получаем  $\det \Lambda = \pm 1$ . Выделяя же 00

компоненту в (2.1), находим  $(\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_i^0)^2 = 1$ . Поэтому долж-

но быть либо  $\Lambda_0^0 \geq 1$ , либо  $\Lambda_0^0 \leq -1$ . Таким образом, группа Лоренца распадается, в зависимости от знака детерминанта  $\Lambda$  и знака  $\Lambda_0^0$ , на четыре несвязанные компоненты  $L_+^\uparrow$ ,  $L_+^\downarrow$ ,  $L_-^\uparrow$ ,  $L_-^\downarrow$ . Очевидно, что только первая из них является группой, поскольку только  $L_+^\uparrow$  содержит единичный элемент. Будем считать, что  $x \in V_+$ , если  $x^2 > 0$ ,  $x^0 > 0$ ;  $x \in V_-$ , если  $x^2 > 0$ ,  $x^0 < 0$  и  $x \sim 0$ , если  $x^0 < 0$ .

Нам нужно также рассмотреть комплексную группу Лоренца – группу комплексных  $4 \times 4$  матриц, удовлетворяющих соотношению (2.1). Для комплексной группы Лоренца знак детерминанта нельзя изменить непрерывным образом, однако матрица  $(-1)$  ока-



зывается связанной с единичным элементом, поэтому в этом случае имеется уже две несвязанных компоненты. Наиболее просто найти непрерывное семейство комплексных лоренцевских преобразований, связывающих матрицы 1 и  $(-1)$ , можно путем рассмотрения накрывающих групп вещественных и комплексных групп Лоренца.

Хорошо известно, что состояние спина  $1/2$  преобразуется при вращении на угол  $\theta$  с фазой  $\theta/2$ , а не с фазой  $\theta$ , как для скалярного состояния. Поэтому вращение на  $2\pi$  изменяет фазу спинового состояния  $(1/2)$ , хотя такое вращение должно быть эквивалентным тождественному вращению. Итак,  $(1/2)$  спиновое состояние не преобразуется как истинное представление группы вращений, оно преобразуется с точностью до фазы. Идея накрывающей группы состоит в том, чтобы найти более широкую группу, чьи представления являлись бы истинными представлениями, без дополнительных фаз. Для группы вращений накрывающей группой является группа  $SU(2)$  – группа  $2 \times 2$  унитарных комплексных матриц с единичным детерминантом. Для связанной компоненты группы Лоренца накрывающая группа  $\bar{L}_+^\uparrow \equiv SL(2, C)$  – группа  $2 \times 2$  комплексных матриц с единичным детерминантом.

Введем два фундаментальных представления  $SL(2, C)$ :

$$u'_\alpha = A_{\alpha\beta} u_\beta \quad (2.2)$$

и

$$\dot{v}'_\alpha = A_{\alpha\beta}^* \dot{v}_\beta, \quad (2.3)$$

где  $A \in SL(2, C)$ , а звездочка означает комплексное сопряжение. Можно ввести скалярное произведение этих представлений, используя  $2 \times 2$  антисимметричный символ  $\epsilon_{\alpha\beta}$  Леви-Чивиты для «неточечных» спиноров и  $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  – для «точечных» спиноров. Считаем, что  $\epsilon_{12} = 1$  и  $\epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1$ . Каждое представление  $SL(2, C)$  имеет вид спинора с  $k$  «неточечными» и  $l$  «точечными» индексами и пре-

образующееся, согласно (2.2) и (2.3). Это представление путем свертки с  $\varepsilon$  вполне приводимо, поэтому следует считать, что неприводимыми представлениями  $SL(2, C)$  являются представления с  $k$  симметризованными «неточечными» и  $l$  симметризованными «точечными» индексами. Каждый индекс соответствует спину  $1/2$ , поэтому эти спиноры имеют спин  $k/2$  и  $l/2$  относительно группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , которая возникает при выборе групп, чьи генераторы  $J \pm iK$ , где  $J$  – генераторы вращений вещественной группы Лоренца и  $K$  – генераторы «чистых» сдвигов.

Будем считать, что матрицы Паули имеют по одному «точечному» и «неточечному» индексу  $(\sigma_\mu)^\beta_\alpha$ , причем  $\sigma_0$  – единичная  $2 \times 2$  матрица, а  $\sigma_i$  – обычные матрицы Паули. Тогда возможно единственным образом ассоциировать  $2 \times 2$  эрмитову матрицу  $X$  с вещественным вектором  $x^\mu$ :  $(X)^\beta_\alpha = x^\mu (\sigma_\mu)^\beta_\alpha$ . При этом  $\det X = x^2$ . Вспомнив, что матрицы  $SL(2, C)$  имеют детерминант, равный единице, обнаруживаем, что  $X' = AXA^+$  – эрмитова и является лоренцевским преобразованием  $x$ . Матрицы  $A$  и  $(-A)$  относятся к одному и тому же лоренцевскому преобразованию. Таким образом, группа  $SL(2, C)$  накрывает дважды связанную компоненту группы Лоренца.

Для покрытия комплексной группы Лоренца допустим существование двух независимых  $SL(2, C)$  матриц, введя их так, чтобы  $X' = AXB^+$ . При этом  $X'$  уже не будет эрмитовой, но будет по-прежнему иметь ту же метрическую длину в пространстве Минковского. Таким образом, накрывающей группой комплексной группы Лоренца  $L_+(C)$  является  $SL(2, C) \times SL(2, C)$ . Так как теперь в нашем распоряжении имеется две независимые матрицы  $A$  и  $B$ , мы можем добиться превращения  $x \rightarrow -x$  или выбором  $A = 1$ ,  $B = -1$  или  $A = -1$ ,  $B = 1$ . При этом можно непрерывным образом

перейти от единичного преобразования  $A=1$ ,  $B=1$  к  $A=-1$ ,  $B=-1$ , выбирая  $A=1$ ,  $B(\phi) = \text{diag}(\exp(i\phi/2), \exp(-i\phi/2))$ .  $4 \times 4$  комплексные лоренцевские преобразования находятся из определения  $X'$ . В результате непрерывное семейство комплексных преобразований Лоренца, осуществляющих переход от единичного преобразований к пространственно-временной инверсии

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi/2 & i \sin \phi/2 & 0 & 0 \\ i \sin \phi/2 & \cos \phi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi/2 & -\sin \phi/2 \\ 0 & 0 & \sin \phi/2 & \cos \phi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Есть ли другие возможности достижения пространственно-временной инверсии? Для  $SL(2, C) \times SL(2, C)$  нужно иметь  $AXB^+ = -X$  или  $AX = -X(B^T)^{-1}$ . Таким образом, нужно иметь соотношение, в котором  $X$  замещается каждой матрицей Паули  $\sigma_\mu$ . Для  $\sigma_0 = 1$  необходимо, чтобы  $A = -(B^T)^{-1}$ , т.е. нужно иметь  $AX = XA$ , где вместо  $X$  можно выбрать любую  $\sigma_i$ . Это означает, что  $A = \omega 1$ , и для  $A \in SL(2, C)$   $\omega^2 = 1$  и  $\omega = \pm 1$ . Итак, единственная возможность обращения  $x^\mu$  содержится в соотношении (2.4).

Теперь мы имеем все необходимые сведения из теории групп для обсуждения  $CPT$ -теоремы.

### 2.3. Вакуумные матричные элементы от произведения полей

Обратимся теперь к обсуждению вакуумных матричных элементов от произведения полей, часто называемых функциями Вайтмана (или распределениями Вайтмана). Пусть  $\phi^{(k,l)}(x)$  – поле с  $k$  «неточечными» и  $l$  «точечными» индексами, причем каждый набор

индексов симметризован.  $\phi^{(k,l)}(x)$  преобразуется как неприводимое представление группы  $SL(2, C)$ , описанное выше. Будем использовать в качестве накрывающей группы группу Пуанкаре, поэтому в  $(a, \Lambda)$  заменим  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  величиной  $A \in SL(2, C)$ . Тогда на поле  $\phi^{(k,l)}(x)$  Пуанкаре-преобразование действует следующим образом:

$$\begin{aligned} U(a, A) \phi^{(k,l)}(x) U(a, A)^+ &= \\ &= S^{(k,l)}(\Lambda)^{(-1)} \phi^{(k,l)}(\Lambda x + a). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В аргументе поля в правой части соотношения (2.5) заменим  $\Lambda$  величиной  $\Lambda(A)$ , где  $\Lambda(A) \in L_+^\uparrow$  – гомеоморфное изображение  $A \in SL(2, C)$ . Там, где используется накрывающая группа комплексной группы Лоренца, следует заменить  $\Lambda \in L_+(C)$  величиной  $\Lambda(A, B)$ , где  $\Lambda(A, B)$  – гомеоморфное изображение  $(A, B) \in SL(2, C) \times SL(2, C)$ . Для простоты обозначений будет писать  $\Lambda$  вместо  $\Lambda(A)$  или  $\Lambda(A, B)$  в обоих случаях. Возвращаясь к соотношению (2.5), заметим, что в единственном случае, когда нам потребуется конкретная форма  $S^{(k,l)}(A, B)$ ,  $\Lambda \in L_+(C)$  порождает пространственно-временную инверсию. В этом случае  $S^{(k,l)}(A, B)$  является диагональной фазой. Таким образом, конкретную форму  $S^{(k,l)}$  знать необязательно. По этой причине будем опускать индексы, относящиеся к матрицам  $S^{(k,l)}$ , а также индексы, относящиеся к полю  $\phi^{(k,l)}(x)$ . Предположим, что вакуум  $|0\rangle$  инвариантен относительно Пуанкаре преобразования

$$U(a, A)|0\rangle = |0\rangle. \quad (2.6)$$

Мы могли бы ограничиться скалярными полями, чтобы избежать усложненных обозначений. Однако для рассмотрения общего

случая введем один индекс  $(p)$  для пары индексов  $(k, l)$ . Тогда обобщенное поле имеет вид  $\phi^{(p)}(x)$ , матрица  $S^{(p)}(A)$ , а закон преобразования

$$U(a, A)\phi^{(p)}U^+(a, A) = S^{(p)}(A)^{-1}\phi^{(p)}(\Lambda x + a). \quad (2.7)$$

Записывая вакуумный матричный элемент произвольного произведения полей и используя закон преобразования (2.7), получим:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi^{(p_1)}(x_1) \phi^{(p_2)}(x_2) \dots \phi^{(p_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = \langle 0 | \phi^{(p_1)}(x_1) \phi^{(p_2)}(x_2) \dots \phi^{(p_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = \langle U(a, A) | 0 \rangle, U(a, A) \phi^{(p_1)}(x_1) \phi^{(p_2)}(x_2) \dots \phi^{(p_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = \left( | 0 \rangle, \left[ \prod_1^n S^{(p_i)}(A)^{-1} \right] \phi^{(p_1)}(\Lambda x_1 + a) \phi^{(p_2)}(\Lambda x_2 + a) \dots \phi^{(p_n)}(\Lambda x_n + a) | 0 \rangle \right) = \\ & = \left[ \prod_1^n S^{(p_i)}(A)^{-1} \right] \langle 0 | \phi^{(p_1)}(\Lambda x_1 + a) \phi^{(p_2)}(\Lambda x_2 + a) \dots \phi^{(p_n)}(\Lambda x_n + a) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вследствие трансляционной инвариантности, этот матричный элемент зависит только от  $(n-1)$  разности пространственно-временных координат. Функция Вайтмана определяется выражением

$$\begin{aligned} & W^{(n, p_1, \dots, p_n)}(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n) \equiv \\ & \equiv \langle 0 | \phi^{(p_1)}(x_1) \phi^{(p_2)}(x_2) \dots \phi^{(p_n)}(x_n) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку мы будем иметь дело с тремя типами разностных векторов, введем различные буквы, их обозначающие:  $\xi$  для вещественных векторов,  $p$  – для вещественных векторов, называемых «точками Иоста» и определенных ниже в области аналитичности  $T'_{n-1}$ ,  $\zeta$  – для комплексных векторов. Для удобства обозначений объединим индексы  $(p_1 p_2 \dots)$  на  $F^{(n)}$  в один индекс  $(\tau)$  и определим разность  $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ . Тогда инвариантность относительно связанной компоненты группы Лоренца дает:

$$\begin{aligned}
& W^{(n,\tau)}(\Lambda\xi_1, \Lambda\xi_2, \dots, \Lambda\xi_{n-1}) = \\
& = \left[ \prod_1^n S^{(p_i)}(A) \right] W^{(n,\tau)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Требование, чтобы физические состояния имели положительную энергию (за исключением вакуума, имеющего нулевую энергию) означает, что импульсы в фурье-преобразовании  $F^{(n,\tau)}$  принадлежат переднему световому конусу. Чтобы это увидеть, опустим все индексы и рассмотрим матричный элемент скалярного поля, поскольку носитель в импульсном пространстве зависит только от подгруппы трансляций группы Пуанкаре

$$\langle 0 | \phi(x_1) \dots \phi(x_j) U(a, 1) \phi(x_{j+1}) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle. \quad (2.11)$$

Вычисляя это среднее либо с помощью оператора трансляции, действующего справа

$$W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{n-1}) \quad (2.12)$$

либо путем вставки единичного оператора по полному набору промежуточных состояний  $|q_j, \alpha_j\rangle$ :

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \phi(x_1) \dots \phi(x_j) \times \\
& \times \sum_{q_j, \alpha_j} |q_j, \alpha_j\rangle \langle q_j, \alpha_j | \exp(-iq_j a) \phi(x_{j+1}) \phi(x_n) | 0 \rangle. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что физические импульсы  $q_j$  являются сопряженными по отношению к векторам  $\xi_j$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
& W^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^{4(n-1)}} \prod_1^{n-1} \int d^4 q_j \exp(-iq_j \xi_j) \tilde{W}^{(n)}(q_1, \dots, q_{n-1}), \quad (2.14)
\end{aligned}$$

причем импульсы  $q_j$  лежат на переднем световом конусе. Фурье-преобразование оказывается аналитической функцией, когда внешняя переменная становится комплексной. Появляется фактор подавления, трансформирующий фурье-преобразование в преобразо-

вание Лапласа. Поэтому нам нужно исследовать случай, когда фактор  $\exp(-iq_j \xi_j)$  становится уменьшающимся для  $\xi_j \rightarrow \zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ , где  $\xi_j$  и  $\eta_j$  – вещественные вектора. Этот фактор становится уменьшающимся, если  $\eta_j$  лежат на заднем световом конусе.

Таким образом, функция Вайтмана

$$W^{(n)}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}) \quad (2.15)$$

является аналитической функцией  $4(n-1)$  переменных в 4-мерном пространстве, если  $\text{Im } \zeta_j \in V_-^\uparrow$ , причем это однозначная функция.

## 2.4. Расширение области аналитичности

$W^{(n)}$  – аналитическая функция, если только  $\text{Im } \zeta_i \neq 0$ , т. е. область аналитичности не содержит вещественных точек. Назовем эту область, которая имеет форму трубки с произвольными  $\text{Re } \zeta_i$  и  $\text{Im } \zeta_i \in V_-$ , трубкой  $T_{n-1}$ . Восстановим нумерацию полей и представим

$$\begin{aligned} W^{(n,\tau)}(\Lambda \zeta_1, \Lambda \zeta_2, \dots, \Lambda \zeta_{n-1}) = \\ = \left[ \prod_1^n S^{(p_i)}(A) \right] W^{(n,\tau)}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

для накрывающей группы  $SL(2, C)$ . При вещественных  $\Lambda \in L_+^\uparrow$   $W^{(n,\tau)}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})$  имеет единственное однозначное аналитическое продолжение на область  $T'_{n-1}$ , которую будем называть расширенной трубкой. Область  $T'_{n-1}$  есть объединение всех  $\Lambda T_{n-1}$  для комплексных матриц  $\Lambda \in L_+(C)$ . Это расширение области аналитичности приводит к весьма существенным результатам. Прежде

всего, в отличие от  $T_{n-1}$ , новая расширенная область аналитичности  $T'_{n-1}$  содержит вещественные точки аналитичности  $(\rho_j)$ , которые мы будем обсуждать ниже. Во-вторых, поскольку  $T'_{n-1}$  инвариантна относительно комплексных преобразований Лоренца, одно из которых – пространственно-временная инверсия, то

$$\begin{aligned} W^{(n,\tau)}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}) &= \\ &= (-1)^L W^{(n,\tau)}(-\zeta_1, -\zeta_2, \dots, -\zeta_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $L = \sum l_i$  в области  $T'_{n-1}$ . Чтобы увидеть, откуда возникает фактор  $(-1)^L$ , снова подчеркнем, что для  $\Lambda \in L_+^\uparrow$   $\Lambda$  зависит от матриц  $A$  и  $A^*$  из  $SL(2, C)$ . Однако теперь мы имеем расширение на  $L_+(C)$ , и  $\Lambda$  зависит от двух независимых матриц  $A$  и  $B$  из  $SL(2, C)$ , и оказывается возможным непрерывное преобразование от единичного элемента до пространственно-временной инверсии. Матрицы  $S^{(k,l)}$  для пространственно-временной инверсии являются просто степенями  $(-1)$ . Поэтому для выбора  $A=1$ ,  $B=-1$  имеем  $S^{(k,l)}(1, -1) = (-1)^l \cdot E$ , где  $E$  – прямое произведение  $(2k+1) \times (2k+1)$  единичной матрицы и  $(2l+1) \times (2l+1)$  единичной матрицы. Отметим, что пространственно-временная инверсия является элементом комплексной группы Лоренца, причем унитарным элементом.

Иост нашел точную характеристику вещественных точек  $(\rho_j)$  в области  $T'_{n-1}$ :  $\sum_1^{n-1} \lambda \rho_i \sim 0$  для всех  $\lambda_i$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_1^{n-1} \lambda_i \geq 0. \text{ Эти условия означают, что каждый } \rho_i \sim 0. \text{ Этот резуль-}$$

тат Иоста выглядит особенно просто для функции  $W^{(2)}$  скалярного



поля. Тогда имеется только один комплексный разностный вектор  $\zeta$ . Так как  $W^{(2)}(\Lambda\zeta) = W^{(2)}(\zeta)$ , то оказывается возможным определить трубку  $T_1'$  путем выбора величин  $\zeta^2$ , которые можно получить из  $\Lambda\zeta$  с  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\eta \in V_-$ . Тогда  $\zeta^2 = \xi^2 - \eta^2 + 2i\xi \cdot \eta$ . Вещественные точки – это те точки, для которых  $\xi \cdot \eta = 0$ ,  $\eta \in V_-$ . Это пространственноподобные точки  $\xi \sim 0$ , в согласии с общим результатом, полученным Иостом.

## 2.5. Общая формула для CPT

Если записать соотношение между функциями Вайтмана в точках Иоста, которое следует из пространственно-временной инверсии, то соотношение (2.5) в терминах вакуумных средних примет вид:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)}(x_1) \phi^{(k_2, l_2)}(x_2) \dots \phi^{(k_n, l_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = (-1)^L \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)}(-x_1) \phi^{(k_2, l_2)}(-x_2) \dots \phi^{(k_n, l_n)}(-x_n) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Каждую часть этого уравнения можно аналитически продолжить: левую часть – на комплексные  $\zeta_i$  с  $\eta = \text{Im } \zeta \in V_+^\downarrow$ , правую на комплексные  $\zeta_i$  с  $\eta = \text{Im } \zeta \in V_+^\uparrow$ . Для получения соотношений между вакуумными матричными элементами от произведения полей мы не можем рассматривать предел  $\eta_i \rightarrow 0$ , поскольку, как отмечено выше, если  $\zeta_i$  имеет мнимую часть в заднем конусе, то  $-\zeta_i$  имеет мнимую часть в переднем конусе. Поэтому аналитические продолжения обеих частей соотношения (2.5) нельзя осуществить в одной области. С другой стороны, если рассматриваются вакуумные матричные элементы полей в противоположном порядке:

$$\langle 0 | \phi^{(p_n)}(-x_n) \dots \phi^{(p_2)}(-x_2) \phi^{(p_1)}(-x_1) | 0 \rangle, \quad (2.19)$$

что соответствует

$$W^{(n, i\tau)}(\xi_{n-1}, \dots, \xi_2, \xi_1) \quad (2.20)$$

в терминах разности переменных ( $i\tau$  означает  $(p_n \dots p_2 p_1)$ ), то обе функции имеют одинаковую область аналитичности  $T'_{n-1}$ . Чтобы обратить порядок всех полей, предположим, что в точке Иоста два вакуумных матричных элемента связаны знаком  $(-1)^I$ , где  $I$  – число транспозиций фермиевских полей, необходимых для обращения порядка полей. Если имеется  $F$  фермиевских полей, то  $I = (F-1) + (F-2) + \dots + 1 = F(F-1)/2$ . Поскольку число фермиевских полей в отличном от нуля матричном элементе должно быть четным,  $F-1$  – четно, тогда фаза  $(-1)^{F(F-1)/2} = \left((-1)^{(F-1)}\right)^{F/2} = (-1)^{F/2} = i^F$ . Условие на матричные элементы

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)}(x_1) \phi^{(k_2, l_2)}(x_2) \dots \phi^{(k_n, l_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = i^F \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)}(x_n) \dots \phi^{(k_2, l_2)}(x_2) \phi^{(k_n, l_n)}(x_1) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

в точках Иоста называется условием «слабой локальной коммутативности». Очевидно, что локальная коммутативность (иногда называемая микропричинностью) подразумевает слабую локальную коммутативность. Объединяя пространственно-временную инверсию, слабую локальную коммутативность и собирая фазы, получаем:

$$\begin{aligned} & W^{(n, \tau)}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}) = \\ & = i^F (-1)^L W^{(n, i\tau)}(\zeta_{n-1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Теперь можно выбрать предел  $\text{Im} \zeta_i \rightarrow 0$  для обеих частей и получить равенство между распределениями для всех  $\xi_i$ :

$$W^{(n, \tau)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = i^F (-1)^L W^{(n, i\tau)}(\xi_{n-1}, \dots, \xi_2, \xi_1). \quad (2.23)$$

Тогда для вакуумных матричных элементов

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi^{(p_1)}(x_1) \phi^{(p_2)}(x_2) \dots \phi^{(p_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = i^F (-1)^L \langle 0 | \phi^{(p_n)}(-x_n) \dots \phi^{(p_2)}(-x_2) \phi^{(p_1)}(-x_1) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Заменяя  $(p_j)$  на  $(k_j, l_j)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)}(x_1) \phi^{(k_2, l_2)}(x_2) \dots \phi^{(k_n, l_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = i^F (-1)^L \langle 0 | \phi^{(k_n, l_n)}(-x_n) \dots \phi^{(k_2, l_2)}(-x_2) \phi^{(k_1, l_1)}(-x_1) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Восстановим первоначальный порядок полей в правой части, воспользовавшись эрмитовостью скалярного произведения  $(\Psi, \Xi) = (\Xi, \Psi)^*$ . Появление комплексного сопряжения очень кстати, т. к. известно, что преобразование *CPT* антиунитарно. Тогда

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)}(x_1) \phi^{(k_2, l_2)}(x_2) \dots \phi^{(k_n, l_n)}(x_n) | 0 \rangle = \\ & = i^F (-1)^L \langle 0 | \phi^{(k_1, l_1)+}(-x_1) \phi^{(k_2, l_2)+}(-x_2) \dots \phi^{(k_n, l_n)}(-x_n) | 0 \rangle^*, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $F = \sum_1^n f_i$ , при  $f_i = 0$  для бозе-поля (с  $k+l$  – четным) и  $f_i = 1$

для ферми-поля ( $k+l$  – нечетное). Поэтому для *CPT*-преобразования, которое обозначим через  $\theta$ , имеем

$$\theta \phi^{(k, l)}(x) \theta^+ = (-1)^l (\pm i)^f \phi^{(k, l)+}(-x). \quad (2.27)$$

Если включить это выражение в произвольный вакуумный матричный элемент и воспользоваться инвариантностью вакуума  $\theta | 0 \rangle = 0$ , то в точности получим соотношение (2.26). Оказывается, что слабой локальной коммутативности в окрестности точки Иоста необходимо и достаточно для *CPT*-инвариантности. Заметим, что, например, часть  $\phi^{(1, 0)}$  дираковского спинового поля отображается на  $i\phi^{(1, 0)}$ , а часть  $\phi^{(0, 1)}$  – на  $-i\phi^{(0, 1)}$ . Как векторные, так и аксиально-векторные поля, имеют вид  $\phi^{(1, 1)}$ , поэтому эти поля не различаются по отношению к преобразованию  $\theta$ , и оба получают при этом

преобразовании фазу  $(-1)$ . Аналогичное утверждение справедливо для скалярных и псевдоскалярных полей  $\phi^{(0,0)}$ , получающих фазу  $(+1)$ . Антисимметричное тензорное поле  $T^{\mu\nu}$  второго ранга  $\phi^{(2,0)} + \phi^{(0,2)}$  также получает фазу  $(+1)$ , как и симметричный тензор второго ранга  $\phi^{(2,2)}$ .

$CPT$ -оператор  $\theta$  заменяет неточечные индексы на точечные, т. е.

$$\phi^{(k,l)+}(x) = \phi^{+(l,k)}(x). \quad (2.28)$$

При преобразовании  $\theta$  частица заменяется на античастицу (хотя некоторые частицы могут быть идентичны своим античастицам). При этом энергии и импульсы не меняются, меняются лишь спин-овые компоненты и спиральности. При двойном действии оператора  $\theta$  находим:

$$\begin{aligned} \theta^2 \phi^{(k,l)} \theta^{+2} &= \theta (-1)^l (\pm i)^f \phi^{(k,l)+}(-x) \theta^+ = \\ &= \theta (-1)^l (\mp i)^f \theta \phi^{(k,l)}(-x) \theta^+ = (-1)^f \phi^{(k,l)}(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Очевидно, что  $\theta^2$  коммутирует с Бозе-полями и антикоммутирует с Ферми-полями.

## 2.6. $CPT$ для $S$ -матрицы

Поскольку преобразование  $\theta$  обращает время, то in- и out-состояния тоже переходят друг в друга. Имея в виду антиунитарность  $\theta$ , получаем для  $S$ -матрицы:

$$S_{\alpha,\beta} \equiv_{out} \langle \alpha || \beta \rangle_{in} =_{out} \langle \hat{\beta} || \hat{\alpha} \rangle_{in} = S_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}}, \quad (2.30)$$

где  $|\hat{\alpha}\rangle$  – это состояние, в котором частицы заменены на античастицы, спин-овые компоненты и спиральности изменяют знак, а энергии и импульсы остаются неизменными.

В терминах  $S$ -оператора

$$\theta S \theta^+ = S^{-1} \quad \text{или} \quad \theta S = S^{-1} \theta. \quad (2.31)$$

Истовское общее доказательство  $CPT$ -теоремы непосредственно приводит к  $CPT$ -симметрии полей, относящихся к произвольно-

му неприводимому представлению группы  $SL(2, C)$  – накрывающей группы вещественной собственной группы Лоренца  $L_+^\uparrow$ . В вещественной группе Лоренца пространственно-временная инверсия не связана с единичным преобразованием. В комплексной же группе Лоренца  $x \rightarrow -x$  преобразование связано с единичным преобразованием. Функции Вайтмана – аналитические продолжения вакуумных матричных элементов от произведения полей – допускают аналитические продолжения с  $L_+^\uparrow$  на комплексную группу Лоренца  $L_+(C)$ , допускающую пространственно-временную инверсию. В расширенной области аналитичности имеются вещественные точки аналитичности (точки Йоста). Однако мы не можем получить общее соотношение между матричными элементами в первоначальных точках и точках, полученных в результате пространственно-временной инверсии. Однако, если обратить порядок полей, то такое соотношение получить можно. На этом пути мы должны предположить слабую локальную коммутативность в точках Йоста и возможность изменения порядка полей. Первоначальный порядок полей восстанавливается, если воспользоваться эрмитовостью скалярного произведения.

После рассмотрения общих симметричных свойств квантовых теорий поля обсудим симметрии стандартной модели.

## Глава 3

# СИММЕТРИИ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

---

### 3.1. Введение

Стандартная модель (СМ) элементарных частиц является квантовой калибровочной теорией, основанной на прямом произведении групп  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  и описывающей сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия как результат обмена калибровочными бозонами со спином единица: восемью безмассовыми глюонами и одним безмассовым фотоном в сильных и электромагнитных взаимодействиях и тремя массивными бозонами  $W^\pm$ ,  $Z$  в слабых взаимодействиях. Фермионный сектор СМ образуют три семейства:

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b' \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

где каждый кварк способен находиться в трёх цветовых состояниях, причём

$$\begin{bmatrix} \nu_l & q_u \\ l^- & q_d \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix}_L, \quad l_R^-, \quad q_{uR}, \quad q_{dR} \quad (3.2)$$

плюс соответствующие античастицы. Таким образом, левые компоненты полей образуют  $SU(2)_L$ -дублеты, а правые компоненты – синглеты.

Три семейства имеют одинаковые калибровочные взаимодействия, они отличаются массами и квантовыми числами. В этой главе будут рассмотрены симметрии в кварковом, лептонном и хиггсовском секторах СМ. Начнём с обсуждения симметрий теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики.

### 3.2. Симметрии КХД

Рассмотрим сначала упрощённый вариант КХД, описываемый лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4g^2} \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \sum_{i=1}^f \bar{\Psi}_j (i\hat{D}) \Psi_j, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu &= \partial_\mu + iA_\mu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В соотношениях (3.4)  $A_\mu - 3 \times 3$  матрицы с нулевым следом. Каждое фермионное кварковое поле  $\Psi_j$  несёт соответствующий 3-компонентный цветовой индекс. Лагранжиан (3.3) представляет собой идеализированную форму реального лагранжиана КХД, поскольку допускает любое число  $f$  ароматов кварков. Кроме того, массы кварков считаются равными нулю. Отметим также, что в определении (3.3) константа связи включена в потенциал, поэтому  $g$  не входит в определение ковариантной производной (3.4).

Форма лагранжиана (3.3) однозначно фиксируется постулатами, имеющими достаточно общий характер. К ним относятся  $SU(3)$  калибровочная симметрия, а также общие принципы квантовой теории поля (локальность, относительность, перенормируемость). Именно соображения перенормируемости запрещают более сложные слагаемые в лагранжиане (например, слагаемое с аномальным глюомагнитным моментом  $\sim \bar{q} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} q$ ). Группой симметрии лагранжиана (3.3) является

$$G = SU(3)_c \times SU(f)_L \times SU(f)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \times R_{\text{scale}}^+. \quad (3.5)$$

Кроме того, лагранжиан (3.3) обладает пуанкаре,  $C$ ,  $P$ ,  $T$ -инвариантностью. Первый фактор в (3.5) – локальная цветовая симметрия. Последующие два характеризуют возможность вращения левых (правых) состояний кварков. Четвёртый фактор соответствует сохранению барионного числа (наличие общей фазы для всех кварковых полей). Пятый фактор характеризует сохранение аксиального барионного числа (равные и противоположные фазы всех левых и правых компонент кварковых полей). Наконец, последний фактор в (3.5) связан с масштабной инвариантностью теории.

Киральная  $SU(f)_L \times SU(f)_R$ -симметрия, связанная с независимым вращением левых и правых компонент кварковых полей, возникает вследствие универсальной связи кварков с глюонами, сохраняющей спиральность. Киральная симметрия способна нарушаться ненулевыми кварковыми массовыми членами, так эти члены связывают две спиральности. Если кварки имеют ненулевые, но одинаковые массы, то остаётся только диагональная  $SU(f)_{L+R}$ -симметрия. Если же кварки имеют ненулевые неравные массы, то симметрия нарушается до произведения групп  $U(1)$  (по числу ароматов). Если массы всех кварков отличны от нуля, то  $P$ - и  $T$ -чётность нарушается за счёт ненулевого  $\theta$ -члена (см. главу 6). Для безмассовых кварков все величины  $\theta$  физически эквивалентны, поэтому можно выбрать  $\theta = 0$ . Наконец,  $R_{\text{scale}}^+$  фактор в (3.5) означает, что единственный параметр  $g$  в теории – безразмерная величина. Таким образом, классическая теория инвариантна относительно изменения масштаба длин или (эквивалентно) обратных масс. В самом деле, действие  $\int d^4x L$  инвариантно относительно изменения масштабов:

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \quad A \rightarrow \lambda^{-1} A, \quad \Psi \rightarrow \lambda^{-1} \Psi. \quad (3.6)$$

Действительная симметрия КХД несколько отличается от рассмотренной выше и включает в себя следующие переходы:

$$\begin{aligned} G' = SU(3)_c \times SU(f)_L \times SU(f)_R \times Z_A^f \times U(1)_B &\rightarrow \\ SU(3)_c \times SU(f)_{L+R} \times U(1)_B &\rightarrow SU(f)_{L+R} \times U(1)_B. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поясним этот каскад симметричных превращений. Первая строка в выражении (3.7) содержит подгруппу, которая “выживает” при квантовании классической теории. Классическая масштабная инвариантность  $R_{\text{scale}}^+$  полностью теряется, при этом  $U(1)_A$ -симметрия аксиального барионного числа сводится к дискретной подгруппе  $Z_A^f$ . Как известно, нарушение масштабной инвариантности связано с существованием “бегущей” эффективной константы, асимптотической свободой и размерной трансмутацией. Нарушение  $U(1)_A$  находит своё отражение в треугольной аномалии и инстантонах. Во



второй строке выражения (3.7) показаны группы симметрии квантовой теории, являющиеся также группами симметрии основного состояния. Из-за спонтанного нарушения симметрии эта группа является подгруппой исходной группы. Иначе говоря, стабильные решения уравнений движения обладают меньшей симметрией, чем сами уравнения. Основное состояние содержит конденсат кварк-антикварковых пар, однородно распределённый в пространстве-времени. При этом невозможно независимо вращать различные спиральные компоненты кварковых полей, оставляя конденсат инвариантным. “Лёгкость”  $\pi$ -мезонов, как и феноменология их взаимодействий при низких энергиях, есть следствие спонтанного нарушения киральной симметрии. В третьей строке выражения (3.7) мы попытались подчеркнуть тот факт, что локальная калибровочная симметрия, которая необходима для формулировки теории, не является свойством какой-либо физической наблюдаемой. Действительно, при построении гильбертова пространства состояний КХД следует ограничиться калибровочно-инвариантными состояниями. Расширенное гильбертово пространство, используемое в теории возмущений КХД, не имеет положительно-определённого внутреннего произведения двух векторов. Оно содержит “духовые” состояния. В отличие от квантовой электродинамики, в низкоэнергетической физике КХД нет каких-либо проявлений калибровочной симметрии. В частности, нет дальнодействующих сил, как нет и частиц, входящих в цветовые мультиплеты. В этом состоит свойство конфайнмента КХД.

### 3.3. Симметрии электрослабого сектора

Начнём с обсуждения свойств фермионных полей по отношению к преобразованиям Лоренца.

#### 3.3.1. Вейлевские, майорановские и дираковские поля

Как известно, генераторы группы Лоренца – вращения  $J_i$  и сдвиги  $K_i$ . Они удовлетворяют алгебре

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} K_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k \quad (3.8)$$

причём операторы  $J_i$ -эрмитовы, а  $K_i$ -антиэрмитовы. Генераторы  $J_i$  удовлетворяют алгебре группы вращений  $SU(2)$ . Последнее коммутационное соотношение в (3.8) означает, что сдвиг преобразуется при вращениях как трёхмерный вектор.

Для того, чтобы коммутационные соотношения (3.8) не перепутывали  $J_i$  и  $K_i$ , введём эрмитовы генераторы

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i); \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \quad (3.9)$$

Для введённых операторов

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k; \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k; \quad [A_i, B_j] = 0. \quad (3.10)$$

Видно, что алгебры для операторов  $A_i$  и  $B_i$  – алгебры  $SU(2)$ . Таким образом, показано, что группа Лоренца  $SO(3,1)$  локально изоморфна прямому произведению  $SU(2) \times SU(2)$ .

Представления группы  $SU(2)$  связаны с представлениями группы вращений: каждое представление характеризуется значением спина, который может быть целым или полуцелым. Таким образом, представления группы Лоренца обозначаются двумя величинами  $(a,b)=0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ . Простейшее представление соответствует скалярному полю. Первое нетривиальное представление  $(1/2,0)$  – вейлевский спинор  $\chi$ . Его генераторы

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma_i; \quad B_i = 0, \quad (3.11)$$

причём

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i; \quad iK_i = \frac{1}{2}\sigma_i. \quad (3.12)$$

Вейлевский спинор  $\chi$ -двухкомпонентный объект, преобразующийся при вращениях и сдвигах следующим образом:

$$\chi \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\sigma\theta} \chi; \quad \chi \rightarrow e^{\frac{i}{2}\sigma\eta} \chi, \quad (3.13)$$

где  $\eta$  – быстрота, связанная со скоростью  $\beta = \tanh \eta$ . Как видно, по отношению к вращениям вейлевский спинор несёт спин  $1/2$ .

Попытаемся построить из одного вейлевского спинора лоренц-инвариантный массовый член. Это так называемый майорановский массовый член

$$L = \frac{1}{2} m \left( \chi^T \epsilon \chi + \text{э.с.} \right), \quad (3.14)$$

где  $\epsilon \equiv i\sigma_2$  –  $2 \times 2$  антисимметричная матрица Паули. Покажем, что массовый член (3.14) лоренц-инвариантен. Обозначим лоренц-преобразование, действующее на поле  $\chi$ , как матрицу  $M$ :

$$M = e^{-\frac{i}{2}\sigma\theta} \text{ или } M = e^{-\frac{i}{2}\sigma\eta}. \quad (3.15)$$

При лоренц-преобразованиях

$$\chi^T \epsilon \chi \rightarrow \chi^T M^T \epsilon M \chi. \quad (3.16)$$

С учётом индексов

$$\left( M^T \right)_{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} M_{\gamma\delta} = \epsilon_{\beta\gamma} M_{\beta\alpha} M_{\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\delta} \det M = \epsilon_{\alpha\delta}, \quad (3.17)$$

где на последнем шаге учтено, что  $\det M = 1$ . Поэтому  $M^T \epsilon M = \epsilon$ , т.е. комбинация  $\chi^T \epsilon \chi$  – Лоренц-инвариантна. Попутно мы доказали, что группа Лоренца локально изоморфна группе  $SL(2, \mathbb{C})$ -группе  $2 \times 2$  комплексных матриц с единичным определителем. Хотя майорановский массовый член менее известен, чем дираковский массовый член, именно он является основной величиной, построенной из одного вейлевского спинора. В этом смысле майорановская масса – наиболее простой фермионный массовый член.

Однако, если поле  $\chi$  несёт ненарушенный глобальный или локальный  $U(1)$ -заряд, майорановский массовый член подавлен, поскольку он нарушает эту симметрию. Таким образом, ни один из фермионов стандартной модели (за исключением нейтрино) не может иметь майорановскую массу, поскольку все они несут электрический заряд. Вообще, если поле  $\chi$  преобразуется как комплексное представление ненарушенной глобальной или внутренней симметрии, то майорановский массовый член подавлен.

Пусть

$$\chi \rightarrow U \chi, \quad (3.18)$$

где  $U$  – унитарное преобразование, действующее на набор вейлевских спиноров. Тогда массовый член в (3.16) преобразуется следующим образом:

$$\chi^T \varepsilon \chi \rightarrow \chi^T U^T \varepsilon U \chi = \chi^T \varepsilon U^T \chi, \quad (3.19)$$

где на последнем шаге учтён тот факт, что  $U$  и  $\varepsilon$  действуют в различных пространствах. Массовый член в соотношении (3.16) будет лоренц-инвариантным, если  $U^+ U = 1$ , т.е. если унитарные представления  $U$  вещественны ( $U^* = U$ ).

Можно сказать, что если фермион имеет майорановскую массу, то он совпадает со своей античастицей. В этом случае говорят о майорановском фермионе. Он не может нести ненарушенный глобальный или локальный заряд (или, в общем случае, преобразовываться относительно комплексных преобразований), так как частица и античастица должны иметь противоположный заряд. Если вейлевский фермион преобразуется по комплексному представлению ненарушенной глобальной или локальной симметрии, то для построения массового члена нужно ввести другой вейлевский фермион, который преобразуется как комплексно-сопряжённое представление. Так возникает дираковская масса.

Пусть поля  $\chi$ ,  $\zeta$  преобразуются как  $(1/2, 0)$  представления группы Лоренца, а относительно некоторой ненарушенной глобальной или локальной группы

$$\chi \rightarrow U \chi, \quad \zeta \rightarrow U^* \zeta. \quad (3.20)$$

Тогда лоренц-инвариантный массовый член с ненарушенной симметрией

$$L = m \left( \zeta^T \varepsilon \chi + \text{э.с.} \right), \quad (3.21)$$

поскольку  $\zeta^T \varepsilon \chi \rightarrow \zeta^T U^+ \varepsilon U \chi = \zeta^T \varepsilon \chi$ . Таким образом, для построения дираковской массы необходимы два вейлевских спинора. Фермионы с дираковскими массами называются дираковскими фермионами. Подчеркнём ещё раз, что для построения майорановской массы нужен один вейлевский спинор, а для дираковской массы — два вейлевских спинора.

Введём новое поле — дираковский спинор, построенный из пары  $(1/2, 0)$  вейлевских спиноров следующим образом:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon \zeta^* \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

В терминах дираковского спинора, дираковский массовый член запишем в хорошо известной из квантовой электродинамики форме

$$L = -m\bar{\Psi}\Psi = -m\left(\chi^+, -\zeta^T \varepsilon\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon\zeta^* \end{pmatrix} = m\left(\zeta^T \varepsilon\chi - \chi^+ \varepsilon\zeta^*\right), \quad (3.23)$$

причём последнее соотношение – точно такое же, как и в выражении (3.21).

При этом дираковские гамма-матрицы записаны в вейлевском или киральном базисе:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

В этом базисе киральные проекционные операторы  $(1 \pm \gamma_5)/2$  проектируют поля  $\Psi$  на состояния вейлевских спиноров:

$$\Psi = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \Psi + \frac{(1 + \gamma_5)}{2} \Psi = \Psi_L + \Psi_R, \quad (3.25)$$

где

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon\zeta^* \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Таким образом,  $\Psi_L$  – четырёхкомпонентная дираковская версия вейлевского спинора  $\chi$ . Аналогично,  $\Psi_R$  – версия вейлевского спинора  $\varepsilon\zeta^*$ . Поэтому дираковский спинор преобразуется как прямая сумма представлений  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  группы Лоренца, соответствующая спинору  $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ .

В то время как дираковский спинор состоит из двух вейлевских спиноров, майорановский спинор – четырёхкомпонентный спинор, состоящий из одного вейлевского спинора:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon\chi^* \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Можно найти другие способы представления фермионных масс, если ввести зарядово-сопряжённую матрицу  $C$ , которая в вейлевском или киральном базисе будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

поэтому

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\Psi)_L^C = \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} = (\Psi_R)^C. \quad (3.29)$$

Покажем, что слагаемое в лагранжиане  $L = -\frac{1}{2}m(\Psi_L^T C \Psi_L + \text{э.с.})$  соответствует майорановской массе. Действительно,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}m(\Psi_L^T C \Psi_L + \text{э.с.}) = \\ & = -\frac{1}{2}m\left((\chi^T, 0)\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} + \text{э.с.}\right) = \frac{1}{2}m(\chi^T \varepsilon \chi + \text{э.с.}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Покажем также, что  $\Psi_M^C = \Psi_M$ . Это соотношение называется майорановским условием. Используя определение сопряженного спинора, находим

$$\Psi_M^C = C\gamma^0\Psi_M^* = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^+ \\ \varepsilon\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon\chi^* \end{pmatrix} = \Psi_M. \quad (3.31)$$

При доказательстве соотношения (3.30) мы записали майорановский массовый член в терминах дираковского спинора. А можно ли дираковский массовый член переписать в терминах майорановских спиноров? Ответ на этот вопрос положительный. Для этого запишем дираковский массовый член в терминах дираковских спиноров

$$L = -m\bar{\Psi}\Psi = -\frac{1}{2}m(\bar{\Psi}\Psi + \bar{\Psi}^C\Psi^C). \quad (3.32)$$

Определим майорановские спиноры следующим образом:

$$\Psi_M^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi + \Psi^C), \quad \Psi_M^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi - \Psi^C). \quad (3.33)$$

Тогда лагранжиан (3.32) запишется в виде

$$L = -\frac{1}{2}m(\bar{\Psi}_M^1\Psi_M^1 + \bar{\Psi}_M^2\Psi_M^2). \quad (3.34)$$

Видно, что дираковский фермион эквивалентен двум вырожденным майорановским фермионам. Однако

$$\begin{aligned}(\Psi_M^1)^C &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^C + \Psi) = \Psi_M^1; \\ (\Psi_M^2)^C &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^C - \Psi) = -\Psi_M^2,\end{aligned}\tag{3.35}$$

т.е. два майорановских спинора при зарядовом сопряжении меняют знак. Майорановский спинор  $\Psi_M^2$  имеет следующую форму

$$\Psi_M^2 = \begin{pmatrix} \chi \\ -\varepsilon\chi^* \end{pmatrix},\tag{3.36}$$

что является обобщением конструкции (3.27). Ниже будет показана физическая значимость соотношения (3.36).

### 3.3.2. Симметрии ароматов

В табл. 3.1 приведены фермионные поля стандартной модели вместе с их  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  квантовыми числами.

Таблица 3.1

Фермионные поля	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	3	2	1/6
$(u^C)_L^i = (u^C)_L (c^C)_L (t^C)_L$	$\bar{3}$	3	-2/3
$(d^C)_L^i = (d^C)_L (s^C)_L (b^C)_L$	$\bar{3}$	1	1/3
$L_L^i = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1	2	-1/2
$(e^C)_L^i = (e^C)_L (\mu^C)_L (\tau^C)_L$	1	1	1

В этой таблице индекс  $i = 1, 2, 3$  каждого поля относится к поколению. Поля – левые киральные дираковские спиноры, которые,

как мы видели выше, являются четырёхкомпонентными вейлевскими спинорами. Например,

$$u_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (u^C)_L = \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

где  $\chi, \zeta - (1/2, 0)$  вейлевские спиноры.

Работать в терминах только левых киральных полей особенно удобно в теориях большого объединения, в которых делаются попытки объединить фермионы в представления группы, которая содержит группу симметрии стандартной модели как подгруппу.

Лагранжиан стандартной модели содержит сумму калибровочных, юкавских, хиггсовских взаимодействий, а также взаимодействий с полями материи:

$$L_{CM} = L_{\text{калибр.}} + L_{\text{материя}} + L_{\text{Юкава}} + L_{\text{Хиггс}}. \quad (3.38)$$

Часто калибровочные взаимодействия включают кинетические энергии калибровочных бозонов, а также их самовзаимодействие.

Часть  $L_{\text{материя}}$  содержит кинетическую энергию и калибровочные взаимодействия фермионных полей:

$$L_{\text{материя}} = i\bar{Q}_L^i \hat{D} Q_L^i + i(\overline{u^C})_L^i \hat{D} (d^C)_L^i + i\bar{L}_L^i \hat{D} L_L^i + i(\overline{e^C})_L^i \hat{D} (e^C)_L^i. \quad (3.39)$$

По индексу  $i$  предполагается суммирование. Для того, чтобы записать лагранжиан в канонической форме через левые и правые киральные поля, воспользуемся соотношением

$$(\Psi^C)_L = C\gamma^0 \Psi_R^*. \quad (3.40)$$

Тогда

$$L_{\text{материя}} = i\bar{Q}_L^i \hat{D} Q_L^i + i\bar{u}_R^i \hat{D} u_R^i + i\bar{d}_R^i \hat{D} d_R^i + i\bar{L}_L^i \hat{D} L_L^i + i\bar{e}_R^i \hat{D} e_R^i. \quad (3.41)$$

На этой стадии все фермионы безмассовые. Майорановские массы подавлены, так как все фермионы несут гиперзаряд. Кроме того, некоторые из них преобразуются как комплексные представления группы  $SU(3)_c$ . Дираковские массы тоже подавлены, поскольку ни один фермион при комплексном сопряжении не преобразуется в другой фермион. Отсутствие фермионных масс означает, что  $L_{\text{материя}}$  имеет глобальную симметрию



$$\begin{aligned} Q_L^i &\rightarrow U_{Q_L}^{ij} Q_L^j; & u_R^i &\rightarrow U_{u_R}^{ij} u_R^j; & d_R^i &\rightarrow U_{d_R}^{ij} d_R^j; \\ L_L^i &\rightarrow U_{L_L}^{ij} L_L^j; & e_R^i &\rightarrow U_{e_R}^{ij} e_R^j \end{aligned} \quad (3.42)$$

Это симметрия случайная в том смысле, что она изначально не предполагается, но следует из фермионного содержания и калибровочных симметрий стандартной модели. Глобальная  $[U(3)]^5$ -симметрия нарушается юкавской связью фермионов с хиггсовским полем:

$$L_{\text{Юкава}} = -\Gamma_u^{ij} \bar{Q}_L^i \varepsilon \phi^* u_R^j - \Gamma_d^{ij} \bar{Q}_L^i \phi d_R^j - \Gamma_e^{ij} \bar{L}_L^i \phi e_R^j + \text{э.с.}, \quad (3.43)$$

где  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_d$ ,  $\Gamma_e$  –  $3 \times 3$  комплексные матрицы в пространстве поколений. Только малая подгруппа  $[U(3)]^5$  не нарушена, она соответствует барионному числу:

$$Q_L^i \rightarrow e^{i\theta/3} Q_L^i; \quad u_R^i \rightarrow e^{i\theta/3} u_R^i; \quad d_R^i \rightarrow e^{i\theta/3} d_R^i, \quad (3.44)$$

а также лептонному числу

$$L_L^i \rightarrow e^{i\varphi} L_L^i; \quad e_R^i \rightarrow e^{i\varphi} e_R^i. \quad (3.45)$$

Таким образом, барионные и лептонные квантовые числа можно рассматривать как проявление случайных глобальных симметрий стандартной модели. Когда хиггсовское поле  $\phi$  приобретает вакуумное среднее

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

фермионы (за исключением нейтрино) становятся массивными за счёт юкавских связей с хиггсовским полем в лагранжиане (3.43):

$$L_{\text{Юкава}} = -M_u^{ij} \bar{u}_L^i u_R^j - M_d^{ij} \bar{d}_L^i d_R^j - M_e^{ij} \bar{e}_L^i e_R^j + \text{э.с.} \quad (3.47)$$

$$\text{где} \quad M^{ij} = \Gamma^{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} - \quad (3.48)$$

фермионная массовая матрица.

Таким образом, поля  $\Psi_L$  и  $\Psi_R = \gamma^0 (\Psi^C)_L^*$  объединяются и придают массы  $u^i$ ,  $d^i$ ,  $e^i$ . Нейтринное поле  $\nu_L$  не несёт ненару-

шенной калибровочной симметрии, поэтому оно могло бы, в принципе, приобрести майорановскую массу

$$-\frac{1}{2}M_{\nu}^{ij}(v_L^{iT}Cv_L^i + \text{э.с.}), \quad (3.49)$$

однако это слагаемое в лагранжиане подавлено случайной симметрией лептонного квантового числа. На самом деле, барионные и лептонные числа оказываются аномальными, а их разность – нет. Обычно говорят, что майорановская масса нейтрино подавлена  $(B-L)$  симметрией.

Юкавские матрицы  $\Gamma$  в лагранжиане (3.43) представляют собой  $3 \times 3$  комплексные матрицы. Поскольку их три, то это вносит в теорию  $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$  новых параметра. Однако, как будет видно, только некоторые из этих параметров физически значимы.

Для лагранжиана (3.47) можно проводить вычисления физических процессов. Однако удобнее произвести переопределение полей, чтобы наиболее отчётливо проявилось физическое содержание теории. Эти переопределения не изменяют предсказаний теории, они аналогичны замене переменных при интегрировании.

Чтобы получить массы фермионов, проведём унитарное преобразование полей и диагонализирuem массовые матрицы в лагранжиане (3.47):

$$\begin{aligned} u_L^i &= A_{uL}^{ij} u_L'^j; & u_R^i &= A_{uR}^{ij} u_R'^j; & d_L^i &= A_{dL}^{ij} d_L'^j; & d_R^i &= A_{dR}^{ij} d_R'^j; \\ e_L^i &= A_{eL}^{ij} e_L'^j; & e_R^i &= A_{eR}^{ij} e_R'^j; & \nu_L^i &= A_{\nu L}^{ij} \nu_L'^j. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Каждая матрица  $A$  должна быть унитарной, чтобы сохранить форму слагаемого кинетической энергии в лагранжиане (3.41):

$$L_{\text{кинет}} = i\bar{u}_L \not{\partial} u_L = i\bar{u}'_L A_{uL}^+ \not{\partial} A_{uL} \not{\partial} u'_L = i\bar{u}'_L \not{\partial} u'_L. \quad (3.51)$$

При диагонализации массовых матриц возникают массы фермионов. Эти преобразования диагонализуют также юкавские матрицы  $\Gamma$ , поскольку они пропорциональны массовым матрицам (3.48).

Нужно, однако, рассмотреть, как переопределение полей влияет на оставшуюся часть лагранжиана. Переопределение не влияет на калибровочную или хиггсовскую часть лагранжиана, так как они не

зависят от фермионных полей. Однако это переопределение могло бы влиять на  $L_{\text{материя}}$ . Но набор переопределённых полей имеет глобальную  $[U(3)]^5$ -симметрию, поэтому не изменяет  $L_{\text{материя}}$ . Определим, сколько физически значимых параметров остаётся после переопределения полей. Начнём с кваркового сектора. Число параметров, содержащихся в комплексных матрицах  $\Gamma_u, \Gamma_d$ :  $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ . Унитарные симметрии  $U_{Q_L}, U_{u_R}, U_{d_R}$  входят в переопределение кварковых полей. Как уже говорилось, они не оказывают влияния на  $L_{\text{материя}}$ . Эти симметрии дают  $3 \times 3 \times 3$  степеней свободы (унитарные  $N \times N$  матрицы содержат  $N$  свободных параметров). Таким образом, полное число степеней свободы, остающихся в полном лагранжиане после переопределения полей:

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 - (3 \times 3 \times 3 - 1) = 10, \quad (3.52)$$

где вычтено барионное квантовое число. Барионное число связано с симметрией юкавской части лагранжиана (3.43), поэтому его нельзя использовать для диагонализации массовых матриц. Десять оставшихся параметров соответствуют шести кварковым массам и четырём параметрам матрицы Кабиббо-Кабаяши-Маскава (три угла смешивания и одна СР-нарушающая фаза).

До сих пор мы считали нейтрино безмассовыми. Однако нейтрино имеют массу. Почему бы не расширить стандартную модель, включить поле  $N_R$  и добавить юкавское взаимодействие:

$$L_{\text{Юкава}} = -\Gamma_{\gamma}^{ij} \bar{L}_L^i \epsilon \phi^* N_R^j + \text{э.с.} \quad (3.53)$$

Покажем, что поле  $N_R$  стерильно, т.е. не несёт калибровочных квантовых чисел, но несёт лептонное квантовое число  $+1$ . Действительно, поля  $L_L$  и  $\phi$  имеют равные, но противоположные по знаку гиперзаряды, т.е.  $N_R$  должно иметь нулевой гиперзаряд, чтобы  $L_{\text{Юкава}}$  был калибровочно-инвариантным. Поскольку  $L_L$  и  $\epsilon \phi^*$  преобразуются как  $SU(2)_L$ -дублеты, то  $L_{\text{Юкава}}$  будет калибровочно-инвариантным, если  $N_R$ -синглет по отношению к  $SU(2)_L$ . Чтобы  $L_{\text{Юкава}}$  сохранял лептонное число, мы должны приписать полю  $N_R$

лептонное число +1. Тогда, если хиггсовское поле приобретает вакуумное среднее, то нейтрино, подобно другим фермионам, получает дираковскую массу.

К сожалению, при таком подходе возникают следующие трудности:

а) почему нейтрино гораздо легче других фермионов?

б) поскольку  $N_R$  стерильно, калибровочные симметрии допускают майорановский массовый член

$$L = -\frac{1}{2} M_R^{ij} N_R^{iT} C N_R^j + \text{э.с.} \quad (3.54)$$

С таким массовым слагаемым поля  $\nu_L$  и  $N_R$  при формировании дираковского фермиона не объединяются. При этом возникает два майорановских нейтрино на каждое поколение. Это больше, чем необходимо для описания природы.

Очевидно, что майорановский массовый член (3.54) подавлен, если симметрия, связанная с лептонным числом, — точная симметрия. В этом случае нейтрино могло бы приобрести дираковскую массу за счёт юкавского взаимодействия. Напомним, что симметрия, связанная с лептонным числом — случайная симметрия стандартной модели, и нет причин ожидать, что она является точной симметрией расширенной стандартной модели. Даже если бы этот сценарий был реализован в природе, то мы должны рассматривать его как проявление физики вне стандартной модели, поскольку он требует введения двух новых предположений: поля  $N_R$  и проявления лептонного числа как следствия не случайной, а точной симметрии.

Прежде чем вводить поле  $N_R$ , рассмотрим стандартную модель как низкоэнергетическую эффективную полевую теорию с лагранжианом, который является разложением по обратным степеням некоторой массы  $M$ :

$$L = L_{CM} + \frac{1}{M} \dim(5) + \frac{1}{M^2} \dim(6) + \dots \quad (3.55)$$

Слагаемые вне стандартной модели представляют собой операторы возрастающей размерности, начиная с размерности пять. Для

набора полей на калибровочных симметриях стандартной модели существует только один оператор размерности пять:

$$L_5 = \frac{C^{ij}}{M} L_L^{iT} \varepsilon \phi C \phi^T \varepsilon L_L^j + \text{э.с.} \quad (3.56)$$

где  $C^{ij}$  – симметричная комплексная матрица.

Покажем, что лагранжиан  $L_5 SU(2)_L \times U(1)_Y$  – инвариантен и нарушает лептонное число. Очевидно, что комбинация  $L_L^T \varepsilon \phi$  –  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  – инвариантна, поэтому  $L_5$  – калибровочно-инвариантен. Лептонное число нарушается, так как поле  $L_L$  несёт заряд  $L=+1$ , а  $L_5$  имеет  $L=+2$ .

Когда хиггсовское поле приобретает вакуумное среднее (3.46), нейтрино получает майорановскую массу

$$L_{\text{майор}} = -\frac{C^{ij}}{2} \frac{v^2}{M} v_L^{iT} C v_L^j + \text{э.с.} \quad (3.57)$$

Отметим, что нейтрино получает майорановскую массу, поскольку лептонное число нарушается слагаемым  $L_5$  в полном лагранжиане. Таким образом, лептонное число отражает лишь низкоэнергетическую случайную симметрию и, вообще говоря, нарушается операторами высших размерностей.

Из соотношения (3.57) следует, что масса нейтрино  $\sim v^2/M$ . Поэтому при  $M \sim v$  масса нейтрино гораздо меньше  $v$ . Это очень привлекательное объяснение, почему нейтрино гораздо легче других фермионов.

Вернёмся к обсуждению стерильного нейтрино  $N_R^i$  и покажем, что соотношение (3.57) возникает в предположении о том, что стерильное нейтрино очень тяжёлое.

Начнём с лагранжианов (3.53), (3.54):

$$L = -\bar{L}_L \Gamma_\nu \varepsilon \phi^* N_R - \frac{1}{2} N_R^T M_R C N_R + \text{э.с.}, \quad (3.58)$$

где для простоты опущены некоторые индексы. Если  $M_R$  – очень большая, то поле  $N_R$  отсутствует при низких энергиях, и по нему можно проинтегрировать. При низких энергиях  $N_R$  – нединамиче-

ское классическое поле, и его можно исключить, решив уравнение движения

$$\frac{\partial L}{\partial N_R} = 0 \quad (3.59)$$

и подставив его значение в лагранжиан (3.58). Тогда из (3.58) имеем

$$\frac{C}{M} = -\frac{1}{2}(\Gamma_\nu M_R^{-1} \Gamma_\nu^T)^+ . \quad (3.60)$$

Отсюда видно, что масса  $M$  в эффективной теории (3.55) пропорциональна массе  $M_R$ . При этом нарушается описание в рамках эффективной полевой теории, если энергии сравнимы с массой тяжёлого майорановского нейтрино.

Покажем, что соотношение (3.60) действительно выполняется. Для этого найдём

$$\frac{\partial L}{\partial N_R} = -\bar{L}_L \Gamma_\nu \varepsilon \phi^* - N_R^T M_R C + \text{э.с.} \quad (3.61)$$

Решая уравнение  $\frac{\partial L}{\partial N_R} = 0$  относительно  $N_R$ , получаем

$$N_R = \phi^+ \varepsilon C \gamma^0 (\Gamma_\nu M_R^{-1}) L_L^* . \quad (3.62)$$

Подставим  $N_R$  в лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} L_L^+ \varepsilon \phi^* C \Gamma_\nu (\Gamma_\nu M_R^{-1})^T \phi^+ \varepsilon L^* + \text{э.с.} \quad (3.63)$$

Это выражение есть ни что иное, как лагранжиан (3.56), если идентифицировать первый член в (3.63) с эрмитово сопряжённым слагаемым в  $L_5$ . Отсюда получаем

$$\frac{C^+}{M} = -\frac{1}{2} \Gamma_\nu (\Gamma_\nu M_R^{-1})^T \quad (3.64)$$

которое совпадает с выражением (3.60), если вспомнить, что  $C$  – симметричная матрица.

На рис. 3.1 изображён спектр масс нейтрино одного поколения для двух обсужденных нами предельных случаев.

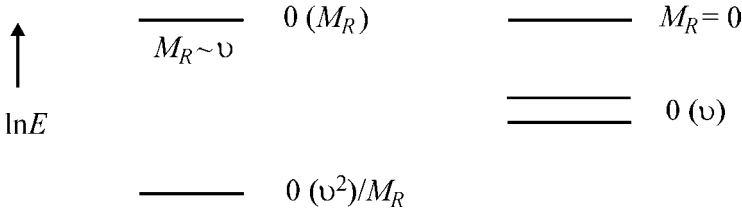


Рис. 3.1

Если  $M_R \sim v$ , то  $N_R$  – тяжёлое майорановское нейтрино массы  $M_R$  и  $\nu_L$  – очень лёгкое майорановское нейтрино массы  $0(v^2/M_R)$ . В другом предельном случае  $M_R = 0$  (если лептонное число является проявлением точной симметрии) поля  $\nu_L$  и  $N_R$  объединяются и дают дираковскую массу нейтрино  $\sim 0(v)$ .

Поэтому дираковское нейтрино можно рассматривать как состояние двух вырожденных майорановских нейтрино. Если тяжёлое нейтрино массы  $M_R$  придаёт лёгкому нейтрино массу  $0(v^2/M_R)$ , то говорят о see-saw механизме формирования массы нейтрино.

### 3.3.3. Симметрии хиггсовского сектора

Обратимся теперь к хиггсовскому сектору нарушения электро-слабой симметрии. Обсудим глобальные симметрии этого сектора.

Хиггсовский сектор стандартной модели описывается лагранжианом

$$L_{\text{Хиггс}} = (D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) - V(\phi), \quad (3.65)$$

где хиггсовский потенциал

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2 \quad (3.66)$$

и ковариантная производная

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu + i \frac{g}{2} \sigma W_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \phi \quad (3.67)$$

Хиггсовский сектор обладает  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  симметрией, а также приближённой (случайной) глобальной симметрией. Для того, что-

бы это увидеть, перепишем хиггсовский лагранжиан следующим образом. Обозначим компоненты хиггсовского дублета

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Тогда  $\epsilon\phi^*$  – тоже  $SU(2)_L$ -дублет, имеющий компоненты

$$\epsilon\phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

где  $\phi^- = \phi^{+*}$ .

Определим хиггсовскую матрицу (или бидублет полей):

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon\phi^*, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

В терминах этой матрицы хиггсовский лагранжиан имеет вид

$$L_{\text{Хиггс}} = \text{tr}(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi), \quad (3.71)$$

где потенциал

$$V(\Phi) = -\mu^2 \text{tr} \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\text{tr} \Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (3.72)$$

а ковариантная производная

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu \Phi + i \frac{g}{2} \sigma W_\mu \Phi + i \frac{g'}{2} B_\mu \Phi \sigma_3 \right). \quad (3.73)$$

Отметим появление матрицы Паули  $\sigma_3$ . Она необходима, поскольку  $\phi$  и  $\epsilon\phi^*$  имеют противоположный гиперзаряд.

Покажем, что выражения (3.65) и (3.71) идентичны. Для этого запишем матрицу как внешнее произведение двух векторов

$$\text{tr}(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} -\phi^T \epsilon \\ \phi^+ \end{pmatrix} (\epsilon\phi^*, \phi) = \phi^\dagger \phi, \quad (3.74)$$

где использовано  $\phi^T \phi^* = \left( \phi^T \phi^* \right)^T = \phi^\dagger \phi$ .

Таким образом, потенциалы действительно одинаковые. Для кинетического слагаемого имеем

$$D_\mu \phi = (D_\mu (\epsilon\phi^*), D_\mu \phi) = (\epsilon (D_\mu \phi)^*, D_\mu \phi), \quad (3.75)$$

где на последнем шаге использовано  $\sigma \epsilon = -\sigma \epsilon^T = -\sigma \epsilon^*$ .



Преобразования группы симметрии  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  действуют на матрицу хиггсовских полей следующим образом:

$$\begin{aligned} SU(2)_L: \quad \Phi &\rightarrow L\Phi; \\ U(1)_Y: \quad \Phi &\rightarrow \Phi e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\theta}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где снова возникает матрица  $\sigma_3$  из-за противоположности гиперзарядов полей  $\Phi$  и  $\epsilon\Phi^*$ .

Относительно преобразований из  $SU(2)_L$ :

$$tr(D_\mu \Phi)^+ D_\mu \Phi \rightarrow tr(D_\mu \Phi)^+ L^+ L D^\mu \Phi = tr(D_\mu \Phi)^+ D^\mu \Phi, \quad (3.77)$$

т.е. это слагаемое инвариантно.

Чтобы обнаружить приближённую глобальную симметрию, рассмотрим предел, в котором константа связанная с гиперзарядом,  $g' \rightarrow 0$ . В этом случае лагранжиан сохраняет форму (3.71), однако ковариантная производная упрощается:

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu + i \frac{g}{2} \sigma W_\mu \right) \Phi. \quad (3.78)$$

Видно, что в этом пределе лагранжиан обладает глобальной  $SU(2)_R$  симметрией, т.е.

$$SU(2)_R: \quad \Phi \rightarrow \Phi R^+. \quad (3.79)$$

Относительно преобразований из группы  $SU(2)_R$ :

$$tr(D_\mu \Phi)^+ D^\mu \Phi \rightarrow tr R(D_\mu \Phi)^+ D^\mu \Phi R^+ = tr(D_\mu \Phi)^+ D^\mu \Phi, \quad (3.80)$$

т.е. снова инвариантно.

Итак, в пределе  $g' \rightarrow 0$  хиггсовский сектор стандартной модели обладает глобальной симметрией  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , при этом  $\Phi \rightarrow L\Phi R^+$ .

Когда хиггсовское поле приобретает ненулевое вакуумное среднее, матричное поле имеет вид

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

При этом нарушается как  $SU(2)_L$ -симметрия, так и  $SU(2)_R$ -симметрия:

$$L\langle \Phi \rangle \neq \langle \Phi \rangle; \quad \langle \Phi \rangle R^+ = \langle \Phi \rangle, \quad (3.82)$$

однако остаётся ненарушенной подгруппа  $SU(2)_{L+R}$ , соответствующая взаимным  $SU(2)_L$  и  $SU(2)_R$ -преобразованиям с  $L=R$ , т.е.

$$L<\Phi>L^+=<\Phi>. \quad (3.83)$$

Таким образом, хиггсовское вакуумное среднее нарушает глобальную симметрию следующим образом:

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{L+R}. \quad (3.84)$$

Иногда симметрию  $SU(2)_{L+R}$  называют “custodial symmetry”. Поскольку  $SU(2)$  – трёхмерная группа, число нарушенных генераторов  $3+3-3=3$ . В результате механизма Хиггса “уходит” три безмассовых голдстоуновских бозона, но возникают массы у  $W^+$ ,  $W^-$  и  $Z$ -бозонов.

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2; \quad M_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2. \quad (3.85)$$

При этом на древесном уровне

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \frac{g^2}{g^2 + g'^2} = \cos^2 \theta_W \quad \text{или} \quad \rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} - 1, \quad (3.86)$$

$\theta_W$  – угол Вайнберга.

Таким образом, в пределе  $g' \rightarrow 0$   $W^+$ ,  $W^-$  и  $Z$ -бозоны образуют триплет ненарушенной глобальной симметрии, поэтому при  $g' \rightarrow 0$   $M_W = M_Z$ .

Рассматриваемая нами симметрия хиггсовского сектора позволяет понять свойства теории вне рамок древесного приближения. Из-за ненарушенной  $SU(2)_{L+R}$  симметрии в пределе  $g' \rightarrow 0$  радиационные поправки к параметру  $\rho$  в соотношениях (3.86) должны быть пропорциональны  $g'^2$ . Например, поправка к параметру  $\rho$  за счёт диаграмм с хиггсовскими петлями (рис. 3.2)



Рис. 3.2

$$\hat{\rho} \approx 1 - \frac{11G_F M_Z^2 \sin^2 \theta_W}{24\sqrt{2}\pi^2} \ln \frac{m_h^2}{M_Z^2}. \quad (3.87)$$

Эта поправка в пределе  $g' \rightarrow 0$  исчезает (так как  $\sin^2 \theta_W \rightarrow 0$ ). Как видно из соотношения (3.87), лидирующая поправка пропорциональна  $\ln m_h$ , и это даёт возможность получить ограничение на массу хиггсовского бозона из прецизионных электрослабых измерений. Симметрия хиггсовского сектора позволяет понять, какой вклад в параметр  $\rho$  вносят массивные фермионы (рис. 3.3)



Рис. 3.3

Лидирующая поправка к величине  $\rho$  за счёт петель  $t$  и  $b$ -кварков

$$\hat{\rho} \approx 1 + \frac{3G_F}{8\sqrt{2}\pi^2} \left( m_t^2 + m_b^2 - 2 \frac{m_t^2 m_b^2}{m_t^2 + m_b^2} \ln \frac{m_t^2}{m_b^2} \right) \quad (3.88)$$

позволила получить оценку массы  $t$ -кварка до его экспериментального открытия.

Попытаемся развить эффективную полевую теорию нарушения электрослабой симметрии, в которой проявилась бы симметрия хиггсовского сектора. Для этого заменим матричное поле  $\Phi$  другим матричным полем  $\Sigma$ , содержащим голдстоуновские бозоны  $\pi_i$  (которые “съедаются” слабыми векторными бозонами), но не содержит физического хиггсовского бозона:

$$\Phi \rightarrow \frac{v}{2} \Sigma; \quad \Sigma = e^{\frac{i\sigma\pi}{v}}. \quad (3.89)$$

Лагранжиан нарушения электрослабой симметрии аналогичен (3.71):

$$L = \frac{v^2}{4} \text{tr} (D_\mu \Sigma)^\dagger D^\mu \Sigma. \quad (3.90)$$

При этом матрица полей голдстоуновских бозонов преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
SU(2)_L: \Sigma &\rightarrow L\Sigma \\
SU(2)_R: \Sigma &\rightarrow \Sigma R^+ \\
SU(2)_{L+R}: \Sigma &\rightarrow L\Sigma L^+
\end{aligned}
\tag{3.91}$$

Поскольку  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрия реализована нелинейно, эта модель называется нелинейной сигма-моделью. Это означает, что симметрия нарушена. В унитарной калибровке  $\Sigma=1$ , и лагранжиан (3.90) приводит к правильным значениям масс векторных бозонов (3.86).

### 3.4. Калибровочная симметрия и массы частиц стандартной модели

Механизм нарушения электрослабой симметрии неизвестен, поэтому, не обсуждая существование хиггсовского бозона, рассмотрим минимальную модель с одним хиггсовским бозоном. Именно такую модель называют стандартной. Как обсуждалось выше, стандартную модель можно рассматривать как лидирующий член в лагранжиане (3.55) при разложении по обратным степеням большого масштаба  $M$ . Имеются, по крайней мере, три причины, чтобы масштаб  $M$  был гораздо больше электрослабого масштаба  $v$ :

- 1) масса майорановского нейтрино  $\sim \frac{v^2}{M}$ , т.е.  $M \sim 10^{14} \div 10^{16}$  ГэВ;
- 2) модели большого объединения указывают на то, что калибровочные константы должны объединиться на масштабах  $\sim 10^{16}$  ГэВ.
- 3) эффекты квантовой гравитации становятся существенными на масштабе планковской массы  $M_{Pl} \sim G_N^{-1/2} \sim 10^{19}$  ГэВ. Возникает вопрос: если фундаментальный физический масштаб столь велик, почему стандартная модель “действует” при обычных энергиях, а не на масштабах  $M$ ? В рамках стандартной модели можно найти ответ на этот вопрос, хотя он не является полным.

Начнём с фермионов. Как известно, фермионы преобразуются по комплексному представлению калибровочной группы симметрии. Нет фермионов, которые были бы калибровочными синглетами

ми или преобразовались бы по вещественному представлению. Поэтому-то майорановские массы оказываются подавленными. Поскольку нет пар фермионов, которые бы преобразовывались как комплексно-сопряжённые представления калибровочной группы симметрии, то и дираковские массы подавлены. Таким образом, фермионы остаются безмассовыми до тех пор, пока не нарушена  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -симметрия. В этом случае массы фермионов  $\sim 0(v)$ . Хотя это рассмотрение и объясняет, почему фермионы гораздо легче по сравнению с масштабом  $M$ , оно недостаточно. В самом деле, только масса  $t$ -кварка  $\sim 0(v)$ , все другие заряженные фермионы гораздо легче. В стандартной модели это происходит потому, что юкавские константы связи очень малы. И это весьма загадочно. Например, для электрона юкавская константа связи  $\sim 10^{-5}$ ! Малость этих констант означает приближённую симметрию по ароматам. Выше уже отмечалось, что в лидирующем порядке эффективной теории масса нейтрино равна нулю из-за случайной симметрии лептонного числа. Эта симметрия нарушается оператором размерности 5 в соотношении (3.56), при этом нейтрино приобретает малую массу  $\sim \left( \frac{v^2}{M} \right)$ . Кроме фермионных масс, сектор ароматов

включает матрицы смешивания СКМ. Углы смешивания в кварковом и нейтрино секторах содержится в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Угол	Кварк	Лептон
$\theta_{12}$	$13^\circ$	$34^\circ$
$\theta_{23}$	$2,3^\circ$	$45^\circ$
$\theta_{13}$	$0,23^\circ$	$\leq 12^\circ$
$\delta$	$60^\circ$	неизвестен

Стандартная модель не объясняет иерархии масс и смешивания. Считается, что за эти эффекты “ответственна” физика вне стандартной модели.

Обратимся теперь к калибровочным бозонам. Калибровочные бозоны связаны с локальной (калибровочной) симметрией, обеспечивающей их безмассовость. При калибровочных преобразованиях поля калибровочных бозонов изменяются следующим образом:

$$TA_\mu \rightarrow UTA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^+, \quad (3.92)$$

где  $T^A$  – генераторы группы. Второе слагаемое в этом преобразовании подавляет массовый член в лагранжиане

$$L = \frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu = M^2 \text{tr}(TA_\mu TA^\mu), \quad (3.93)$$

причём  $\text{tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}$ .

Калибровочные бозоны связаны с локальной симметрией, однако пока нельзя однозначно ответить на вопрос: они безмассовые вследствие локальной симметрии или локальная симметрия имеет место из-за их безмассовости?

Из-за важности этого вопроса обсудим более подробно связь между безмассовостью калибровочных бозонов и калибровочной симметрией. Для простоты рассмотрим случай квантовой электродинамики, хотя результаты в неабелевых калибровочных теориях вполне аналогичны. Калибровочная симметрия подразумевает выполнение тождества Уорда для собственной энергии фотона  $\Pi_{\mu\nu}$ :

$$\text{Diagram: A wavy line with index } \mu \text{ enters a loop. The top arc of the loop is labeled } k+q \text{ and the bottom arc is labeled } k. \text{ A wavy line with index } \nu \text{ exits the loop.} \quad (3.94)$$

Тождество Уорда имеет вид

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0, \quad (3.95)$$

где  $q$  – 4-импульс фотона.

Это условие означает, что собственная энергия должна иметь следующую форму:

$$\Pi_{\mu\nu} = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2). \quad (3.96)$$

Можно вычислить влияние собственной энергии фотона на фотонный пропагатор, суммируя вклад диаграмм:

$$\text{Diagram: A series of diagrams representing the summation of photon self-energy corrections to the propagator. It starts with a single wavy line, followed by a plus sign, then a wavy line with a self-energy loop, followed by a plus sign, then a wavy line with two self-energy loops, followed by a plus sign, and finally an ellipsis (...).}$$

Обычно это делается в калибровке Ландау:

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{q^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( g^{\mu\rho} - \frac{q^\mu q^\rho}{q^2} \right) i \times \\
& \times \left( q^2 g_{\rho\sigma} - q_\rho q_\sigma \right) \Pi \frac{(-i)}{q^2} \left( g^{\sigma\nu} - \frac{q^\sigma q^\nu}{q^2} \right) + \dots = \\
& = -\frac{i}{q^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) [1 + \Pi + \dots] = \frac{(-i)}{q^2 [1 - \Pi]} \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Таким образом, пропагатор приобретает фактор  $[1 - \Pi]^{-1}$ .

Найдём вклад в  $\Pi$  от фермионной петли:

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu} &= i(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi = (-ieQ)^2 i^2 (-1) \times \\
& \times \int \frac{d^N K}{(2\pi)^N} \frac{\text{tr} \gamma_\mu (\hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{k} + \hat{q} + m)}{(k^2 - m^2)((k + q)^2 - m^2)},
\end{aligned} \tag{3.98}$$

где  $Q$ -фермионный электрический заряд и фактор  $(-1)$  возникает из-за фермионной петли. Вычислим интеграл в  $N$  измерениях и выделим ультрафиолетовые расходимости. Сворачивая обе части (3.98) с  $g^{\mu\nu}$ , получим

$$\begin{aligned}
i(q^2 N - q^2) \Pi &= -e^2 Q^2 \times \\
& \times \int \frac{d^N K}{(2\pi)^N} \frac{\text{tr} \gamma_\mu (\hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{k} + \hat{q} + m)}{(k^2 - m^2)((k + q)^2 - m^2)}.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

При этом мы воспользовались соотношением  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = N$ .

Вычисление следа даёт:

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \gamma_\mu (\hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{k} + \hat{q} + m) = \\
& = 4 \left[ -2(1 - \varepsilon)(k^2 + kq) + (4 - 2\varepsilon)m^2 \right],
\end{aligned} \tag{3.100}$$

где использованы соотношения

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = N \equiv 4 - 2\varepsilon; \quad \gamma_\mu \hat{q} \gamma^\mu = -2(1 - \varepsilon)\hat{q}. \tag{3.101}$$

Перепишем теперь числитель в интеграле через факторы, появляющиеся в знаменателе:

$$k^2 + kq = \frac{1}{2} \times \left[ (k + 1)^2 - m^2 + (k^2 - m^2) - q^2 + 2m^2 \right]. \tag{3.102}$$

Это позволяет представить интеграл в виде:

$$i(3-2\varepsilon)q^2\Pi = -4e^2Q^2 = \int \frac{d^N K}{(2\pi)^N} \times \\ \times \left[ (\varepsilon-1) \left( \frac{1}{k^2-m^2} + \frac{1}{(k+q)^2-m^2} \right) + \frac{(1-\varepsilon)q^2+2m^2}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)} \right]. \quad (3.103)$$

Предположим, что мы работаем в  $N=4$  измерениях ( $\varepsilon=0$ ), тогда первые два интеграла в (3.103) квадратично расходятся. Введём для них обрезание по импульсу, тогда первый интеграл в (3.103):

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2-m^2} = i \int \frac{d^4 K_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-K_E^2-m^2)} \sim -\frac{i}{16\pi^2} M^2, \quad (3.104)$$

где проведён виковский поворот к евклидову пространству ( $K^0 \rightarrow iK_E^0$ ) и  $d^4 K_E = \pi^2 K_E^2 dK_E^2$  (после интегрирования по углам) и сделано обрезание при  $K_E^2 = M^2$ . Второй интеграл в (3.102) даёт тот же самый результат, если произвести сдвиг  $K \rightarrow K-q$ .

Таким образом

$$\Pi \sim \frac{e^2}{6\pi^2} Q^2 \frac{M^2}{q^2}. \quad (3.105)$$

Подставляя это значение в соотношение (3.97), видим, что фотон приобретает (тахинную) массу  $\sim 0(M)$ :

$$\frac{-i}{q^2[1-\Pi]} \approx \frac{i}{q^2 + \left( \frac{e^2}{6\pi^2} \right) Q^2 M^2}. \quad (3.106)$$

Где же допущена ошибка? Оказывается, что обрезание нарушает тождество Уорда:

$$\Pi_{\mu\nu} \sim M^2 g_{\mu\nu} \rightarrow q^\mu \Pi_{\mu\nu} \neq 0. \quad (3.107)$$

Таким образом, действительно тождество Уорда, которое следует из калибровочной симметрии, обеспечивает безмассовость фотона.

Вместо того, чтобы вводить обрезание, вычислим собственную энергию фотона в  $N$  измерениях при соблюдении тождеств Уорда. Квадратично расходятся интегралы



$$\int \frac{d^N K}{(2\pi)^N} \frac{1}{k^2 - m^2} =$$

$$= \int \frac{d^N K}{(2\pi)^N} \frac{1}{(K+q)^2 - m^2} = -\frac{i}{(4\pi)^{N/2}} \Gamma(\varepsilon-1)(m^2)^{1-\varepsilon}. \quad (3.108)$$

Полус при  $\varepsilon=1$  ( $N=2$ ) свидетельствует о квадратичной расходимости, однако эти интегралы умножаются на фактор  $(\varepsilon-1)$  в выражении (3.103). Поскольку  $(\varepsilon-1)\Gamma(\varepsilon-1)=\Gamma(\varepsilon)$ , то полюс возникает при  $\varepsilon=1$ , и квадратичная расходимость – всего лишь иллюзия, это артефакт схемы регуляризации, нарушающей тождество Уорда.

Окончательно вычисление собственной энергии даёт:

$$\Pi = -\frac{8e^2 Q^2}{(4\pi)^{N/2}} \Gamma(\varepsilon) \times \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[m^2 - x(1-x)q^2]^\varepsilon}. \quad (3.109)$$

Полус при  $\varepsilon=0$  ( $N=4$ ) означает наличие логарифмической расходимости. Поставляя  $\Pi$  в соотношение (3.97), видим, что фотонный пропагатор, благодаря тождеству Уорда, имеет полюс при  $q^2=0$ , т.е. фотон остаётся безмассовым. Таким образом, стандартная модель успешно объясняет, почему фермионы и бозоны гораздо легче, чем гипотетический фундаментальный масштаб  $M$ . Обратимся теперь к скалярам. В этом случае стандартная модель не столь успешна. Массовый член в лагранжиане для скаляров имеет вид:

$$L = -m^2 \phi^+ \phi \quad (3.110)$$

и не связан с калибровочной симметрией, т.е. нет причин ожидать, чтобы скаляры были гораздо легче по сравнению с  $M$ . В стандартной модели это бы означало, что хиггсовское поле имеет массу  $\sim O(M)$ , и при низких энергиях было бы неспособным нарушать электрослабую симметрию. Есть по крайней мере, несколько путей, чтобы избежать этого заключения.

Один путь – ввести скалярные голдстоуновские бозоны некоторой нарушенной симметрии. В другом случае – создать безмассовые скаляры, используя идеи суперсимметрии (см. главу 7).

В стандартной модели электрослабый масштаб, как КХД масштаб  $\Lambda$ , а также массы кварков и лептонов гораздо меньше планковского масштаба, т.е. их можно считать равными нулю. Если это

так, то квантовая теория поля, содержащая безмассовые поля, будет конформной теорией. Это предположение означает, что калибровочные бозоны, кварки и лептоны, совместно с неизвестными степенями свободы, способны составить квантовую теорию поля с нетривиальной реализацией конформной инвариантности. В этом сценарии отсутствие значительных массовых поправок есть следствие конформной инвариантности. Можно предположить, что теория описывается действием

$$S = S_0 + \int d^4x L_i O_i, \quad (3.111)$$

где  $S_0$  – лагранжиан рассматриваемой теории поля,  $O_i$  – операторы размерности, меньше 4, нарушающие конформную инвариантность. Величины  $L_i$  представляют собой «массовые» параметры.

Пусть  $M$  – массовый масштаб, определяемый параметрами  $L_i$ . Это масштаб нарушения конформной инвариантности. Другими словами, для энергий  $E \gg M$  константы связи теории перестают изменяться, а при  $E < M$  такое изменение происходит. Оказывается, если считать  $M \sim \text{ТэВ}$ , то в предположении конформной инвариантности разрешается проблема иерархий (см. главу 7).

## Глава 4

# ТОЧНЫЕ И НАРУШЕННЫЕ СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ ЧАСТИЦ

---

### 4.1. Введение

Физику частиц можно рассматривать как квантовую теорию поля, в которой фундаментальному возбуждению приписывается соответствующее квантовое поле. Симметрии учитываются при построении плотности лагранжиана, включающего квантовые поля. Действие

$$S = \int d^4x L \quad (4.1)$$

при этом инвариантно относительно преобразований симметрии

$$S \rightarrow S' = S. \quad (4.2)$$

Будем пока рассматривать только непрерывные преобразования симметрии, основанные на группе Ли  $G$ . Пусть квантовое поле обозначено через  $\chi_\alpha(x)$ , где  $x$  – пространственно-временная переменная,  $\alpha$  – «внутренний» индекс, соответствующий возможным компонентам поля  $\chi$ . Например, для кварков  $\chi_\alpha(x) = q_\alpha(x)$  и  $\alpha = 1, 2, 3$ . Если  $a$  – один из операторов группы  $G$  и если квантовые поля  $\chi_\alpha(x)$  – члены неприводимого мультиплета, то действие оператора  $a$

$$\chi_\alpha(x) \xrightarrow{a} \chi'_\alpha(x) = R_{\alpha\beta}(a) \chi_\beta(x). \quad (4.3)$$

Таким образом, при таком преобразовании поле  $\chi$  переходит в новое поле  $\chi'$ , чьи компоненты являются линейной комбинацией «старых» компонент.

Поскольку, по предположению, квантовые поля  $\chi'_\alpha$  – члены мультиплета группы  $G$ , то матрицы  $R(a)$  реализуют матричное представление группы  $G$  и обладают определенными свойствами.

Если произвести последовательные преобразования

$$\chi_\alpha(x) \xrightarrow{a} \chi'_\alpha(x) \xrightarrow{a} \chi''_\alpha(x) \quad (4.4)$$

и сравнить с «прямым» преобразованием

$$\chi_{\alpha}(x) \xrightarrow{a''} \chi''_{\alpha}(x), \quad (4.5)$$

то получим

$$R_{\alpha\beta}(a')R_{\beta\gamma}(a) = R_{\alpha\gamma}(a''). \quad (4.6)$$

В гильбертовом пространстве квантового поля  $\chi_{\alpha}$  преобразование (4.3) осуществляется унитарным оператором  $U(a)$ . При этом

$$U^{-1}(a)\chi_{\alpha}(x)U(a) = \chi'_{\alpha}(x) = R_{\alpha\beta}(a)\chi_{\beta}(x). \quad (4.7)$$

Очевидно, что свойство (4.6) для унитарных операторов выглядит так:

$$U(a)U(a') = U(a''). \quad (4.8)$$

Поскольку, мы рассматриваем непрерывные преобразования симметрии, то достаточно ограничиться инфинитезимальными преобразованиями  $\delta a$ . Конечные преобразования строятся с помощью соотношения (4.8). Группа Ли характеризуется набором параметров, ассоциированных с этими инфинитезимальными преобразованиями, или алгеброй операторов, связанной с этими преобразованиями. Запишем инфинитезимальное преобразование в виде:

$$U(\delta a) = 1 + i\delta a_i G_i, \quad (4.9)$$

где индекс  $i$  соответствует всем независимым параметрам группы Ли  $G$  (для группы вращений  $O(3)$   $\delta a_i$  описывают независимые вращения вокруг осей  $x, y, z$ ). Операторы  $G_i$  называются генераторами группы, причем свойство (4.8) подразумевает определенную алгебру этих генераторов. Если считать параметры  $\delta a_i$  вещественными, то генераторы  $G_i$  будут эрмитовыми. Они образуют алгебру Ли

$$[G_i, G_j] = C_{ijk} G_k. \quad (4.10)$$

Структурные константы  $C_{ijk}$  группы можно выбрать полностью антисимметричными по индексам  $i, j, k$ . Как  $U(\delta a)$  можно разложить в терминах генераторов  $G_i$ , так и матрицы представления  $R_{\alpha\beta}(\delta a)$  можно подвергнуть этой процедуре. Для инфинитезимальных преобразований

$$R_{\alpha\beta}(\delta a) = \delta_{\alpha\beta} + i\delta a_i (g_i)_{\alpha\beta}. \quad (4.11)$$

Очевидно, что матрицы  $g_i$  являются представлениями генераторов  $G_i$ , поэтому они тоже удовлетворяют соотношению (4.10). Чтобы

это увидеть, следует воспользоваться соотношениями (4.11), (4.9) и (4.7)

$$(1 - \delta a_i G_i) \chi_\alpha(x) (1 + \delta a_i G_i) = \chi_\alpha(x) + i \delta a_i (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta. \quad (4.12)$$

Отсюда следует

$$[G_i, \chi_\alpha(x)] = -(g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta(x). \quad (4.13)$$

Это выражение определяет, как квантовые поля  $\chi_\alpha$  преобразуются относительно группы  $G$ . Подставив (4.13) в тождество Якоби

$$[G_i, [G_j, \chi_\alpha]] + [\chi_\alpha, [G_i, G_j]] + [G_j, [\chi_\alpha, G_i]] = 0, \quad (4.14)$$

получим, что матрицы  $g_i$  удовлетворяет соотношению (4.10).

Обсудим более подробно свойства теории, включающей квантовые поля  $\chi_\alpha$ , инвариантные относительно преобразований группы  $G$ . Как будет видно, инвариантность относительно преобразований группы  $G$  подразумевает существование сохраняющихся токов. Поскольку плотность лагранжиана, вообще говоря, зависит от  $\chi_\alpha$  и их пространственно-временных производных  $\partial_\mu \chi_\alpha$ , то инвариантность действия (4.2) означает, что

$$\int d^4x L(\chi_\alpha, \partial_\mu \chi_\alpha) = \int d^4x L(\chi'_\alpha, \partial_\mu \chi'_\alpha). \quad (4.15)$$

Для  $\chi'_\alpha$ , которые получаются при инфинитезимальном преобразовании  $\chi_\alpha$ , условие стационарности действия дает

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial L}{\partial \chi_\alpha} \delta \chi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \chi_\alpha} \delta \partial_\mu \chi_\alpha \right] = \\ &= \int d^4x \left[ \left\{ \frac{\partial L}{\partial \chi_\alpha} - \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \chi_\alpha} \right) \right\} \delta \chi_\alpha + \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \chi_\alpha} \delta \chi_\alpha \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Первый член в фигурных скобках обращается в ноль вследствие уравнений движения Эйлера-Лагранжа. Второй член можно переписать в терминах матрицы  $g_i$ . Поскольку

$$\delta \chi_\alpha = \chi'_\alpha - \chi_\alpha = -i \delta a_i (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta, \quad (4.17)$$

$$\text{то} \quad 0 = \delta S = - \int d^4x \delta a_i \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \chi_\alpha} \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\alpha \right]. \quad (4.18)$$

Так как параметры  $\delta a_i$  – независимые, то ток

$$J_i^\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \chi_\alpha} \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta \quad (4.19)$$

сохраняется  $\partial_\mu J_i^\mu(x) = 0$ . (4.20)

Поскольку предполагается, что поля  $\chi_\alpha$  достаточно быстро уменьшаются при стремлении к пространственной бесконечности, существует набор постоянных величин (обобщенных зарядов), задаваемых интегралами

$$Q_i = \int d^3x J_i^0; \quad \frac{d}{dt} Q_i = 0. \quad (4.21)$$

Легко проверить, что операторы  $Q_i$  совпадают с генераторами  $G_i$ . Они удовлетворяют соотношениям (4.10) и (4.13). Действительно, если  $H$  – гамильтониан системы, то гейзенберговское уравнение движения подразумевает

$$[H, G_i] = 0. \quad (4.22)$$

Проверим, что действительно

$$G_i \equiv Q_i = \int d^3x J_i^0 = \int d^3x \left[ \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \chi_\alpha} \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta \right] \quad (4.23)$$

действует как генератор. Для этого заметим, что канонический импульс, сопряженный с  $\chi_\alpha$

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \chi_\alpha(x)}. \quad (4.24)$$

Для бозонных полей канонические импульсы удовлетворяют одновременно коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\pi_\alpha(x), \chi_\beta(x)] \Big|_{x^0=y^0} &= \frac{1}{i} \partial^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}; \\ [\pi_\alpha(x), \pi_\beta(x)] \Big|_{x^0=y^0} &= [\chi_\alpha(x), \chi_\beta(x)] \Big|_{x^0=y^0} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Тогда

$$G_i \equiv \int d^3x \left[ \pi_\alpha(x) \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta \right]. \quad (4.26)$$

Так как  $G_i$  не зависят от времени, то при вычислении коммутатора  $G_i$  с  $\chi_\gamma(y)$  можно положить в выражении (4.26)  $x^0 = y^0$ . С помощью (4.25) имеем

$$[G_i, \chi_\gamma(y)] = \int d^3x \left[ \pi_\alpha(x) \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \times \right. \\ \left. \times \chi_\beta(x), \chi_\gamma(y) \right] \Big|_{x^0=y^0} = - (g_i)_{\gamma\beta} \chi_\beta(y). \quad (4.27)$$

При этом

$$[G_i, G_j] = \int d^3x d^3y \left[ \pi_\alpha(x) \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta(x), \right. \\ \left. \pi_\gamma(y) \frac{1}{i} (g_j)_{\gamma\delta} \chi_\delta(y) \right] \Big|_{x^0=y^0} = \\ \int d^3x \pi_\alpha(x) \left( \frac{1}{i} [g_i, g_j] \right)_{\alpha\beta} \chi_\beta(x) = \quad (4.28) \\ = i C_{ijk} \int d^3x \pi_\alpha(x) (g_k)_{\alpha\beta} \chi_\beta(x) = i C_{ijk} G_k,$$

что и требовалось показать.

До сих пор при обсуждении симметрий мы фокусировались на трансформационных свойствах квантовых полей  $\chi_\alpha(x)$ . Соответствие между квантовыми полями и частицами предполагает, что квантовые состояния, ассоциированные с полями  $\chi_\alpha(x)$ , будут преобразовываться аналогичным образом. Обозначим одночастичное состояние, связанное с полем  $\chi_\alpha$ , через  $|p; \alpha\rangle$ , где  $p_\mu$  — 4-х импульс этого состояния, причем  $p^2 = m_\alpha^2$ . Тогда из (4.7) следует

$$U^{-1}(a) |p; \alpha\rangle = R_{\alpha\beta}(a) |p; \beta\rangle. \quad (4.29)$$

Это соотношение можно использовать для нахождения всех состояний мультиплета  $|p; \alpha\rangle$ , имеющих ту же массу. Пусть  $|p; \alpha\rangle_{\text{rest}}$  обозначает состояние с 4-х импульсом  $p^\mu = (\vec{0}, m_\alpha)$ . Тогда, по определению, действие гамильтониана на это состояние дает

$$H |p; \alpha\rangle_{\text{rest}} = m_\alpha |p; \alpha\rangle_{\text{rest}}. \quad (4.30)$$

Однако, если теория инвариантна относительно группы  $G$ , т.е.  $H$  коммутирует со всеми ее генераторами, то

$$\left[ H, U^{-1}(a) \right] = 0. \quad (4.31)$$

Применяя это соотношение к «rest» состоянию, получаем

$$0 = \left[ H, U^{-1}(a) \right] |p; \alpha\rangle_{\text{rest}} = \left[ HU^{-1}(a) - U^{-1}(a)H \right] |p; \alpha\rangle_{\text{rest}} = \\ = R_{\alpha\beta}(a) (m_\beta - m_\alpha) |p; \beta\rangle_{\text{rest}}. \quad (4.32)$$

Поскольку  $R_{\alpha\beta}(a)$  – произвольна, то действительно получаем для мультиплета  $m_\alpha = m_\beta$ .

Говорят, что симметрия реализована Вигнер-Вейлевским образом, если инвариантность действия относительно группы  $G$  приводит к появлению в природе мультиплетов частиц одинаковой массы. Хорошо известный пример (приближенной) вигнер-вейлевской симметрии – сильный изоспин. Приближенная глобальная  $SU(2)$  симметрия сильных взаимодействий приводит к вырожденности нуклонного дублета ( $m_p = m_n$ ) и пионного триплета ( $m_{\pi^+} \approx m_{\pi^-} \approx m_{\pi^0}$ ). Однако вигнер-вейлевский способ – не единственный способ реализации симметрии.

## 4.2. Намбу – голдстоуновская реализация симметрии

Оказывается, возможен случай, когда действие инвариантно относительно группы симметрии  $G$ , а физические состояния теории не обладают этой симметрией. Этот происходит в случае, когда

$$\left[ H, U^{-1}(a) \right] = 0, \quad (4.33)$$

однако вакуумное состояние не инвариантно относительно группы  $G$ . Такие симметрии называются спонтанно нарушенными или реализованными намбу-голдстоуновским образом. Соотношение (4.29), из которого следует, что все состояния мультиплета  $|p; \alpha\rangle$  вырождены по массе, получено из трансформационных свойств квантовых полей  $\chi_\alpha$  в предположении о том, что вакуумное состояние инвариантно относительно группы  $G$



$$U(a)|0\rangle = 0. \quad (4.34)$$

Одночастичные состояния  $|p; \alpha\rangle$  могут быть построены действием (асимптотических) операторов рождения на поле  $\chi_\alpha$ . Для скалярного поля

$$\chi_\alpha(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \left[ e^{ipx} a_\alpha(p, t) + e^{-ipx} a_\alpha^\dagger(p, t) \right]. \quad (4.35)$$

Тогда

$$|p, \alpha\rangle = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_\alpha^\dagger(p, t)|0\rangle = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int d^3 p e^{ipx} \frac{1}{i} \partial_0 \chi_\alpha(x) |0\rangle, \quad (4.36)$$

где 
$$A \overset{\longleftrightarrow}{\partial}_0 B = A \partial_0 B - (\partial_0 A) B. \quad (4.37)$$

Рассмотрим, как и в соотношении (4.29), действие  $U^{-1}(a)$  на состояние  $|p; \alpha\rangle$

$$\begin{aligned} U^{-1}(a)|p; \alpha\rangle &= \lim_{x^0 \rightarrow \pm\infty} a_\alpha^\dagger(p, t)|0\rangle = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int d^3 p e^{ipx} \frac{1}{i} \partial_0 U^{-1}(a) \chi_\alpha(x) |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Если условие (4.34) выполнено, то можно записать

$$\begin{aligned} U^{-1}(a) \chi_\alpha(x) |0\rangle &= U^{-1}(a) \chi_\alpha(x) U(a) |0\rangle = \\ &= R_{\alpha\beta}(a) \chi_\beta(x) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.39)$$

откуда следует выражение (4.29). Однако, если вакуум неинвариантен по отношению к преобразованиям группы  $G$ , т.е. если вакуумное состояние вырождено или неединственное, то, несмотря на то, что поля  $\chi_\alpha$  преобразуются по неприводимому представлению группы  $G$ , вырожденные мультиплеты в спектре отсутствуют.

Если симметрия реализована намбу-голдстоуновским образом, то вместо мультиплетов частиц одинаковых масс в теории возникают безмассовые возбуждения – бозоны Намбу-Голдстоуна. Чтобы это увидеть, найдем вакуумное среднее от (4.13)

$$\langle 0 | [G_i, \chi_\alpha(x)] | 0 \rangle = -(g_i)_{\alpha\beta} \langle 0 | \chi_\beta(x) | 0 \rangle. \quad (4.40)$$

Если вакуум инвариантен относительно преобразований группы  $G$ , то

$$G_i |0\rangle = 0. \quad (4.41)$$

Из соотношения (4.40) следует, что вакуумные средние полей  $\chi_\alpha$  равны нулю. Если же соотношение (4.41) не выполняется и  $\chi_\alpha$  – скалярные поля, то ничто не противоречит предположению

$$\langle 0 | \chi_\alpha(x) | 0 \rangle \neq 0. \quad (4.42)$$

Если  $\chi_\alpha$  описывают поля со спином, отличным от нуля, то аналог соотношения (4.40), наряду с инвариантностью вакуума относительно этих преобразований, приводит к нулевым значениям вакуумных средних этих полей.

Симметрия реализуется намбу-годстоуновским образом, если существует некоторое скалярное поле (не обязательно элементарное) с ненулевым вакуумным средним. Предположим, что это имеет место для соотношения (4.40). Тогда, используя определение (4.23) генераторов  $G_i$ , получим

$$\begin{aligned} 0 &\neq -(g_i)_{\alpha\beta} \langle 0 | \chi_\beta(x) | 0 \rangle = \\ &= \int d^3 y \langle 0 | J_i^0 \chi_\alpha(x) - \chi_\alpha(x) J_i^0(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Это соотношение можно записать по другому, вставляя полный набор состояний  $|n\rangle$  и используя трансляционную инвариантность токов

$$J_i^0(y) = e^{-ipy} J_i^0(0) e^{ipy}. \quad (4.44)$$

Тогда правая часть (4.43) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\sum_n \int d^3 y \left\{ \langle 0 | e^{-ipy} J_i^0 e^{ipy} | n \rangle \langle n | \chi_\alpha(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \chi_\alpha(x) | n \rangle \langle n | e^{-ipy} J_i^0 e^{ipy} | 0 \rangle \right\} = \\ &= \sum_n \int -d^3 y e^{ip_n y} \langle 0 | J_i^0(0) | n \rangle \langle n | \chi_\alpha(x) | 0 \rangle - \\ &- \sum_n \int d^3 y e^{-ip_n y} \langle 0 | \chi_\alpha(x) | n \rangle \langle n | J_i^0(0) | 0 \rangle = \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_n) \times \\ &\times \left\{ e^{-ip_n^0 y^0} \langle 0 | J_i^0(0) | n \rangle \langle n | \chi_\alpha(x) | 0 \rangle - e^{ip_n y} \langle 0 | \chi_\alpha(x) | n \rangle \langle n | J_i^0(0) | 0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

По предположению, это выражение не обращается в ноль. Более того, поскольку левая часть (4.43) не зависит от  $y^0$ , то и (4.45) не зависит от  $y^0$ . Очевидно, что это возможно, если в теории существуют некоторые безмассовые одночастичные состояния  $|n\rangle$ , именно они вносят вклад в сумму (4.45). Эти безмассовые состояния называются голдстоуновскими бозонами.

Нетрудно убедиться, что каждый генератор  $G_i$ , который не аннигилирует вакуум, связан с голдстоуновским бозоном (при действии  $G_i$  на вакуум возникает некоторое состояние, и это состояние ассоциируется с голдстоуновским бозоном). Представим состояние голдстоуновского бозона как  $|p; j\rangle$ , причем  $p^2 = 0$ . Тогда матричные элементы токов, связанных с нарушенными генераторами, отличны от нуля

$$\langle 0 | J_i^\mu(0) | p; j \rangle = i f_j \delta_{ij} p^\mu, \quad (4.46)$$

где  $f_j$  – некоторые отличные от нуля константы, зависящие от вакуумных средних полей  $\chi_\alpha$ . Действительно, если вспомнить, что для одночастичного состояния

$$\sum_n \equiv \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2p_n^0}, \quad (4.47)$$

то из соотношений (4.43) и (4.45) имеем

$$i(g_i)_{\alpha\beta} \langle 0 | \chi_\beta(0) | 0 \rangle = \lim_{p^\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( f_i \langle p; i | \chi_\alpha(0) | 0 \rangle + f_i^* \langle 0 | \chi_\alpha(0) | p; i \rangle \right). \quad (4.48)$$

Проиллюстрируем нambu-голдстоуновскую реализацию простым примером. Рассмотрим случай комплексного скалярного поля  $\phi$  с плотностью лагранжиана

$$L = -\partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi - \lambda \left( \phi^+ \phi - \frac{1}{2} f \right)^2. \quad (4.49)$$

Очевидно, что теория инвариантна относительно  $U(1)$  преобразований

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \\ \phi^+(x) &\rightarrow \phi'^+(x) = e^{-i\alpha}\phi^+(x).\end{aligned}\tag{4.50}$$

Сохраняющиеся токи, связанные с этой симметрией, строятся с помощью соотношения (4.18)

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \frac{1}{i} \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi^+} \frac{1}{i} (-1) \phi^+ = i \left( (\partial^\mu \phi) \phi - (\partial^\mu \phi) \phi^+ \right). \tag{4.51}$$

Соответствующий генератор

$$G = \int d^3x J^0 = i \int d^3x \begin{bmatrix} (\partial^0 \phi^+) \phi - \\ -(\partial^0 \phi) \phi^+ \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}[G, \phi(x)] &= -\phi(x) \\ [G, \phi^+(x)] &= \phi^+(x).\end{aligned}\tag{4.53}$$

В классическом смысле, второй член в лагранжиане (4.49) соответствует потенциалу полей  $\phi$  и  $\phi^+$

$$V(\phi, \phi^+) = \lambda \left( \phi^+ \phi - \frac{1}{2} f \right)^2. \tag{4.54}$$

Чтобы гарантировать положительность теории, следует считать  $\lambda > 0$ . Физика теории зависит от знака  $f$ . Если  $f < 0$ , то мы имеем единственный минимум при  $\phi = \phi^+ = 0$ , и симметрия теории реализована Вигнер-Вейлевским способом, приводящим к вырожденному мультиплету массивных состояний. Если же  $f > 0$ , то потенциал имеет бесконечное число минимумов, определяемых условием  $\phi\phi^+ = f/2$ . В этом случае симметрия реализована нанбу-голдстоуновским образом, и в теории имеются как массивные, так и безмассовые состояния. Если  $f < 0$ , разложим потенциал вблизи минимума

$$V(\phi, \phi^+) = \lambda \left( \phi^+ \phi - \frac{1}{2} f \right)^2 = \frac{1}{4} \lambda f^2 - \lambda f \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2. \tag{4.55}$$

Квадратичный член  $-\lambda f \phi^+ \phi$  при  $f < 0$  — массовый член полей  $\phi$  и  $\phi^+$ :

$$m_{\phi}^2 = m_{\phi^+}^2 = -\lambda f > 0. \quad (4.56)$$

В этом случае имеется вырожденный мультиплет из двух зарядово-сопряженных частиц, взаимодействующих посредством  $\lambda(\phi^+\phi)^2$  члена.

Если же  $f > 0$ , то разложение вблизи  $\phi = 0$  теряет смысл, поскольку потенциал имеет локальный максимум. Разумно разложить потенциал вблизи минимума  $\phi_{\min} = \sqrt{\frac{f}{2}}e^{i\theta}$ . Так как  $f > 0$ , то квадратичный член  $\phi^+\phi$  уже не определяет массу.

С точки зрения квантовой механики, ненулевое значение  $\phi_{\min}$  подразумевает, что  $\phi$  имеет ненулевое вакуумное среднее

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \sqrt{\frac{f}{2}}e^{i\theta}. \quad (4.57)$$

Фаза  $\theta$ , характеризующая вакуумное состояние  $|\theta\rangle$ , на самом деле, несущественна, и её можно вращением исключить. Это следствие неединственности вакуума теории. Так как при  $U(1)$  преобразованиях

$$U^{-1}(\alpha)\phi(x)U(\alpha) = e^{i\alpha}\phi(x), \quad (4.58)$$

то очевидно, что среднее  $\phi(x)$  между состояниями  $U(-\theta)|\theta\rangle$  – вещественно. Действительно,

$$\langle \theta|U^{-1}(\theta)\phi(x)U(-\theta)|\theta\rangle = e^{-i\theta}e^{i\theta}\sqrt{\frac{f}{2}} = \sqrt{\frac{f}{2}}. \quad (4.59)$$

Очевидно, что  $U(-\theta)|\theta\rangle$  такой же вакуум, как и  $|\theta\rangle$ .

Положим  $\theta = 0$  и разложим  $\phi$  в виде

$$\phi = \sqrt{\frac{f}{2}} + \chi, \quad (4.60)$$

где квантовое поле  $\chi$ , по предположению, имеет нулевое вакуумное среднее. Потенциал в терминах поля  $\chi$  запишется в виде

$$\begin{aligned}
V(\phi, \phi^+) &= \lambda \left( \phi^+ \phi - \frac{1}{2} f \right)^2 = \lambda \left( \chi^+ \chi + \sqrt{\frac{f}{2}} (\chi + \chi^+) \right)^2 = \\
&= \frac{\lambda f}{2} (\chi + \chi^+)^2 + \sqrt{2f} \chi^+ \chi (\chi + \chi^+) + \lambda^2 (\chi^+ \chi)^2.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Очевидно, что линейная комбинация полей  $\chi$  и  $\chi^+$  имеет массу, а ортогональная комбинация к ней – безмассовая. Обозначим

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi + \chi^+); \quad \chi_- = \frac{i}{\sqrt{2}} (\chi^+ - \chi). \tag{4.62}$$

Тогда 
$$m_+^2 = 2\lambda f; \quad m_-^2 = 0. \tag{4.63}$$

Несмотря на то, что лагранжиан (4.49)  $U(1)$  – симметричен, эта симметрия отсутствует в спектре! Идентификация  $\chi_-$  как голдстоуновского бозона следует из коммутаторов (4.53). Так как  $f$  вещественна, то

$$\chi_- = \frac{i}{\sqrt{2}} (\chi^+ - \chi) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\phi^+ - \phi). \tag{4.64}$$

Следовательно,

$$[G, \chi_-] = \frac{i}{\sqrt{2}} (\phi^+ + \phi) = i(\sqrt{f} + \chi_+). \tag{4.65}$$

Найдем вакуумное среднее

$$\langle 0 | [G, \chi_-] | 0 \rangle = i\sqrt{f}. \tag{4.66}$$

Из этого соотношения следует, что  $\chi_-$  – голдстоуновский бозон.

Если  $|p\rangle$  – состояние голдстоуновского бозона, то, пренебрегая нелинейностью, можно ожидать, что

$$\langle 0 | \chi_- (0) | p \rangle = 1. \tag{4.67}$$

Тогда из (4.66) имеем

$$\langle 0 | J^\mu (0) | p \rangle = i\sqrt{f} p^\mu. \tag{4.68}$$

Константа распада  $f_i$  в (4.46) здесь представляет собой  $\sqrt{f}$  и связана с вакуумным средним поля  $\phi$  соотношением (4.48). Есть и другой способ идентификации этих констант, если исходить из

определения тока  $J^\mu$  и записать его в терминах калибровочных полей  $\chi_+$  и  $\chi_-$ :

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= i((\partial^\mu \phi^+) \phi - (\partial^\mu \phi) \phi^+) = i \left( \begin{aligned} &(\partial^\mu \chi^+) \left( \sqrt{\frac{f}{2}} + \chi \right) - \\ &-(\partial^\mu \chi) \left( \sqrt{\frac{f}{2}} + \chi^+ \right) \end{aligned} \right) = \\
 &= i\sqrt{f} \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu (\chi^+ - \chi) + i[(\partial^\mu \chi^+) \chi - (\partial^\mu \chi) \chi^+] = \quad (4.69) \\
 &= \sqrt{f} \partial^\mu \chi_- + \text{нелин. члены.}
 \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует (4.68). Таким образом, существуют два способа реализации симметрий ( $[H, U]=0$ ). Если вакуумное состояние единственное ( $U|0\rangle = |0\rangle$ ), то приходим к вигнер-вейлевской реализации с вырожденными мультиплетам частиц. Если же вакуумное состояние ( $U|0\rangle \neq |0\rangle$ ) не единственно, то симметрия реализована намбу-голдстоуновским образом. В этом случае возникают безмассовые возбуждения, по одному на каждый генератор группы, который не аннигилируют вакуум. О таком способе реализации симметрии часто говорят как о спонтанном нарушении симметрии. Симметрия лагранжиана не проявляет себя в спектре состояний теории.

### 4.3. Теорема Голдстоуна

Определим массовую матрицу

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\phi=\phi_0}, \quad (4.70)$$

где  $\phi$  —  $NG$ -мерный вектор, включающий  $NG$  вещественных скалярных  $\phi_i$  полей. Лагранжиан системы

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - V(\phi). \quad (4.71)$$

Пусть  $G$  – непрерывная группа симметрии лагранжиана, преобразующая вектор  $\phi$  следующим образом

$$\delta\phi = -i\alpha^a G_a \phi_n, \quad (4.72)$$

где  $G_a$  – генераторы группы  $G$ . Согласно теореме Голдстоуна, если непрерывная глобальная симметрия спонтанно нарушена, то теория содержит по одной скалярной частице на каждый нарушенный генератор первоначальной группы симметрии. Докажем эту теорему.

Поскольку потенциал инвариантен относительно группы  $G$ , то

$$\delta V(\phi) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_i} \delta\phi_i = -i \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_i} \alpha^a G_a \phi_j = 0. \quad (4.73)$$

Так как калибровочные параметры  $\alpha^a$ , произвольны, получаем  $NG$  уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} (G^a)_{ij} \phi_j = 0, \quad a = 1, \dots, NG. \quad (4.74)$$

Вычисляя следующую производную, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} (G^a)_{ij} \phi_j + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_i} (G^a)_{ik} = 0. \quad (4.75)$$

В вакуумном состоянии  $\phi = \phi_0$  имеем

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \right|_{\phi=\phi_0} (G^a)_{ij} \phi_j = 0 \quad (4.76)$$

или, в терминах массовой матрицы

$$M_{ki}^2 (G^a)_{ij} \phi_j^0 = 0. \quad (4.77)$$

Если основное состояние инвариантно относительно подгруппы  $g \subset G$  с размерностью  $n_g$ , то для каждого генератора подгруппы  $g$

$$(G^a)_{ij} \phi_j^0 = 0, \quad a = 1, \dots, n_g \leq N_G, \quad (4.78)$$

но для оставшихся  $N_g - n_g$  генераторов нарушенной симметрии

$$(G^a)_{ij} \phi_j^0 \neq 0, \quad a = n_g + 1, \dots, N_G, \quad (4.79)$$

т.е. действительно имеется  $N_g - n_g$  нулевых собственных значений массовой матрицы – безмассовых голдстоуновских бозонов.



#### 4.4. Локальные симметрии

До сих пор обсуждались глобальные преобразования симметрии. Это означает, что параметры  $\delta a_i$  не зависят от пространственно-временной точки. Очевидно, что в этом случае поля в различных пространственно-временных точках преобразуются одинаково. Если предположить, что параметры  $\delta a_i$  зависят от  $x$ , то поля  $\chi_\alpha(x)$  и  $\chi_\alpha(x')$  будут изменяться при групповых представлениях по-разному. Преобразования симметрии, зависящие от пространственно-временных точек, называются локальными симметриями. При локальном преобразовании

$$\chi_\alpha(x) \xrightarrow{a(x)} \chi'_\alpha(x) = R_{\alpha\beta}(a(x))\chi_\beta(x). \quad (4.80)$$

Поскольку  $R$  зависит от  $x$ , то даже если действие

$$S = \int d^4x L(\partial_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha) \quad (4.81)$$

обладает глобальной инвариантностью относительно группы  $G$ , это не означает, что оно будет инвариантным относительно локальных преобразований группы  $G$ . Действительно, из-за кинетических членов, содержащих производные  $\partial_\mu \chi_\alpha$ , действие уже оказывается неинвариантным относительно локальных преобразований. В самом деле, рассмотрим преобразование производной

$$\begin{aligned} \partial_\mu \chi_\alpha(x) &\xrightarrow{a(x)} \partial_\mu \chi'_\alpha(x) = \partial_\mu [R_{\alpha\beta}(a(x))\chi_\beta(x)] = \\ &= R_{\alpha\beta}(a(x))\partial_\mu \chi_\beta(x) + \partial_\mu R_{\alpha\beta}(a(x))\chi_\beta(x). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Присутствие второго слагаемого в соотношении (4.82) нарушает локальную инвариантность действия. Однако можно добиться компенсации этого члена, добавив в лагранжиан калибровочные поля. Очевидно, чтобы добиться локальной инвариантности лагранжиана, в теорию следует ввести дополнительные степени свободы. Прежде чем рассматривать общую процедуру трансформации глобально-инвариантного лагранжиана в локально-инвариантный, обсудим простой пример дираковского поля с плотностью лагранжиана

$$L = -\bar{\psi}(x) \left( \gamma^\mu \frac{1}{i} \partial_\mu + m \right) \psi(x). \quad (4.83)$$

Очевидно, что этот лагранжиан инвариантен относительно  $U(1)$ -преобразований

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x); \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x).\end{aligned}\quad (4.84)$$

Токи, ассоциированные с этой симметрией

$$J^\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi(x)} \frac{1}{i} \psi(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi. \quad (4.85)$$

Если  $\alpha = \alpha'(x)$ , то лагранжиан (4.83) перестает быть инвариантным, так как

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x) + i(\partial_\mu \alpha(x)) \psi(x) e^{i\alpha(x)}. \quad (4.86)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}L(x) &\xrightarrow{a(x)} L'(x) = L(x) - (\partial_\mu \alpha(x)) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) = \\ &= L(x) - J^\mu(x) \partial_\mu \alpha(x).\end{aligned}\quad (4.87)$$

Можно избавиться от дополнительного вклада в лагранжиан (4.87), введя в лагранжиан слагаемое

$$L_{\text{extra}} = e A^\mu(x) J_\mu(x), \quad (4.88)$$

включающее векторное поле  $A^\mu(x)$ , которое относительно локальных  $U(1)$  преобразований изменяется следующим образом

$$A^\mu(x) \xrightarrow{a(x)} A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{1}{e} (\partial^\mu \alpha(x)). \quad (4.89)$$

Конечно, если это поле  $A^\mu(x)$  играет в теории динамическую роль, то кинетический член, содержащий поле  $A^\mu(x)$ , тоже должен быть инвариантным относительно преобразований (4.89). Это легко учесть, вводя полевые напряженности

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \quad (4.90)$$

которые очевидным образом инвариантны относительно преобразований (4.89). Итак, полный лагранжиан

$$L = -\bar{\psi}(x) \left( \gamma^\mu \frac{1}{i} \partial_\mu + m \right) \psi(x) + e A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \quad (4.91)$$

включающий дополнительное калибровочное поле  $A^\mu$ , локально  $U(1)$ -инвариантен

$$L(x) \xrightarrow{a(x)} L'(x) = L(x), \quad (4.92)$$

если

$$\begin{aligned} \psi(x) &\xrightarrow{a(x)} \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x); \\ A^\mu(x) &\xrightarrow{a(x)} A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Заметим, что для локальной  $U(1)$  инвариантности лагранжиана (4.83) необходимо ввести взаимодействие между калибровочными полями  $A^\mu$  и глобально сохраняющимся  $U(1)$ -током  $J_\mu$ . Есть и другой способ, позволяющий обнаружить, что взаимодействие (4.88) необходимо для локальной инвариантности. Как видно из (4.86), причина, почему первоначальный лагранжиан не является локально инвариантным, состоит в том, что производная от поля  $\psi$  преобразуется неоднородно при локальных  $U(1)$  вращениях. Если построить модифицированную производную  $D_\mu \psi$ , которая бы при локальных преобразованиях изменялась бы таким же образом, как и  $\partial_\mu \psi$  при глобальных преобразованиях, то исходный лагранжиан мог бы быть локально-инвариантным при замене

$$L(\partial_\mu \psi, \psi) \rightarrow L(D_\mu \psi, \psi). \quad (4.94)$$

В рассматриваемом нами случае ковариантная производная

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ie A_\mu \psi. \quad (4.95)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\xrightarrow{a(x)} D'_\mu \psi' = e^{i\alpha} \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha) \psi e^{i\alpha} - \\ &- ie A_\mu \psi e^{i\alpha} - i(\partial_\mu \alpha) \psi e^{i\alpha} = e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu \psi - ie A_\mu \psi] = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi, \end{aligned} \quad (4.96)$$

то очевидно, что лагранжиан

$$L = -\bar{\psi}(x) \left( \gamma^\mu \frac{1}{i} D_\mu + m \right) \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (4.97)$$

локально  $U(1)$  инвариантен и совпадает с выражением (4.91).

Требование локальной инвариантности лагранжиана – замечательный способ фиксации взаимодействий в теориях калибровочных полей. Заметим, что калибровочные преобразования (4.89) не допускают введения массового члена поля  $A^\mu$ , так как

$$L_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} m_A^2 A^\mu(x) A_\mu(x) \quad (4.98)$$

нарушает локальную  $U(1)$  инвариантность. Таким образом, локальная инвариантность теории серьезно ограничивает её динамику. В рассмотренном нами примере требование локальной  $U(1)$  инвариантности приводит к фиксированию лагранжиана КЭД. Чтобы гарантировать локальную  $U(1)$  инвариантность, надо ввести безмассовое калибровочное поле  $A^\mu(x)$  – фотонное поле, взаимодействующее с интенсивностью  $e$  (электрический заряд) с сохраняющимся током  $J^\mu$ .

Этот пример можно обобщить на неабелевы глобальные группы симметрии. Для этого снова рассмотрим плотность лагранжиана  $L(\partial_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha)$  полей, которые преобразуются по неприводимому представлению неабелевой группы  $G$  (группы со структурными константами  $C_{ijk} \neq 0$ ). При глобальных преобразованиях из  $G$ :

$$\chi_\alpha(x) \xrightarrow{a} \chi'_\alpha(x) = R_{\alpha\beta} \chi_\beta(x), \quad (4.99)$$

$$\partial_\mu \chi_\alpha(x) \xrightarrow{a} \partial_\mu \chi'_\alpha(x) = R_{\alpha\beta} \partial_\mu \chi_\beta(x).$$

Если лагранжиан инвариантен относительно этих преобразований, то

$$L(\partial_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha) \xrightarrow{a} L'(\partial_\mu \chi'_\alpha, \chi'_\alpha) = L(\partial_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha) \quad (4.100)$$

Для построения ковариантной производной  $D^\mu \chi_\alpha(x)$  введем соответствующие калибровочные поля. Потребуем, чтобы при локальных  $G$ -преобразованиях ковариантная производная  $D^\mu \chi_\alpha(x)$  пре-

образовывалась точно так же, как изменяется  $\partial^\mu \chi_\alpha(x)$  при глобальных преобразованиях

$$D_\mu \chi_\alpha \xrightarrow{a(x)} D'_\mu \chi'_\alpha = R_{\alpha\beta}(a(x)) D_\mu \chi_\beta(x). \quad (4.101)$$

Тогда лагранжиан  $L(D_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha)$  будет локально инвариантен G-инвариантен

$$L(D_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha) \xrightarrow{a(x)} L'(D'_\mu \chi'_\alpha, \chi'_\alpha) = L(D_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha). \quad (4.102)$$

Чтобы теория была физической, в лагранжиан следует добавить локально инвариантные напряженности калибровочных полей, входящих в ковариантные производные  $D^\mu \chi_\alpha$ .

По аналогии с рассмотренным примером  $U(1)$  инвариантности, нужно ввести по одному калибровочному полю  $A_i^\mu$  на каждый параметр  $\delta a_i$  группы  $G$ . После этого калибровочные поля компенсируют локальные изменения полей  $\chi_\alpha$ , причем на каждый генератор группы приходится по одному компенсирующему (калибровочному) полю. Возвращаясь к соотношению (4.13)

$$[G_i, \chi_\alpha(x)] = -(g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta, \quad (4.103)$$

$U(1)$ -пример диктует ковариантную производную вида

$$D_\mu \chi_\alpha(x) = [\delta_{\alpha\beta} \partial_\mu - ig(g_i)_{\alpha\beta} A_{\mu i}(x)] \chi_\beta(x), \quad (4.104)$$

где  $g$  – некоторая константа связи. Чтобы соотношения (4.99) были справедливы для  $D_\mu \chi^\alpha$ , калибровочные поля должны соответствующим образом изменяться при локальных преобразованиях. Для того чтобы определить это поведение, вычислим  $D'_\mu \chi'_\alpha$  и сравним с результатом, ожидаемым из соотношения (4.99)

$$\begin{aligned} D'_\mu \chi'_\alpha(x) &= \partial_\mu \chi'_\alpha(x) - ig(g_i)_{\alpha\beta} A'_{\mu i}(x) \chi'_\beta(x) = \\ &= \partial_\mu [R_{\alpha\beta}(a(x)) \chi_\beta(x)] - ig(g_i)_{\alpha\beta} A'_{\mu i}(x) R_{\beta\gamma}(a(x)) \chi_\gamma(x) = \\ &= R_{\alpha\beta}(a(x)) \partial_\mu \chi_\beta(x) + (\partial_\mu R_{\alpha\gamma}(a(x))) \chi_\gamma(x) - \\ &\quad - ig(g_i)_{\alpha\beta} A'_{\mu i}(x) R_{\beta\gamma}(a(x)) \chi_\gamma(x). \end{aligned} \quad (4.105)$$

По определению, нам нужно иметь

$$\begin{aligned} D'_\mu \chi'_\alpha(x) &= R_{\alpha\beta}(a(x)) D_\mu \chi_\beta(x) = \\ &= R_{\alpha\beta}(a(x)) \partial_\mu \chi_\beta(x) - ig R_{\alpha\beta}(a(x)) A'_\mu(x) (g_i)_{\beta\gamma} \chi_\gamma(x). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Для этого нужно потребовать

$$\begin{aligned} -ig (g_i)_{\alpha\beta} A'_\mu(x) R_{\beta\gamma}(a(x)) + \partial_\mu R_{\alpha\gamma}(a(x)) &= \\ &= -ig R_{\alpha\beta}(a(x)) A_\mu(x) (g_i)_{\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Умножая это выражение на  $R^{-1}$ , получаем условие преобразования калибровочного поля

$$\begin{aligned} (g_i)_{\alpha\beta} A'_\mu(x) &= \frac{1}{ig} [\partial_\mu R_{\alpha\gamma}(a(x))] \times [R^{-1}(a(x))]_{\gamma\beta} + \\ &+ R_{\alpha\gamma}(a(x)) (g_i)_{\gamma\delta} [R^{-1}(a(x))]_{\delta\beta} A_\mu(x). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Эта формула согласуется с законом преобразования (4.89) в абелевом случае:  $R = e^{i\alpha}$  и  $g = e$ .

Формула (4.108) содержит некоторую неоднозначность, поскольку трансформационные свойства калибровочных полей  $A_\mu$  зависят от того, как поле  $\chi_\alpha$  преобразуется относительно группы  $G$ . Если бы это было действительно так, то возникла бы серьезная проблема: чтобы получить локально-инвариантную теорию, надо было бы вводить отдельное компенсирующее калибровочное поле для каждого поля материи. К счастью, несмотря на то, что выражение (4.108) записано через  $R$ , эта зависимость иллюзорная. Трансформационные свойства калибровочных полей зависят только от группы  $G$ , а не от полей, которые испытывают преобразование. Чтобы доказать это очень важное утверждение, запишем (4.108) для инфинитезимальных преобразований

$$R_{\alpha\beta}(\delta a(x)) = \delta_{\alpha\beta} + i\delta a_i (g_i)_{\alpha\beta}. \quad (4.109)$$

Тогда из (4.108) получаем в матричных обозначениях

$$\begin{aligned}
g_k A'_{\mu k}(x) &= \frac{1}{ig} \left[ \partial_\mu (1 + i\delta a_k(x) g_k) \right] [(1 - i\delta a_i(x) g_i)] + \\
&+ \left[ (1 + i\delta a_j(x) g_j) \right] g_i [(1 - i\delta a_k(x) g_k)] A_{\mu i} \approx \\
&\approx g_k A_{\mu k}(x) + i\delta a_j(x) [g_j, g_i] A_{\mu i}(x) + \frac{1}{g} [\partial_\mu \delta a_k(x)] g_k.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Используя коммутационные соотношения для матриц  $g_i$ , получаем

$$[g_j, g_i] = iC_{jik} g_k = -iC_{ijk} g_k. \tag{4.111}$$

Легко видеть, что правая часть (4.110) пропорциональна  $g_k$

$$\begin{aligned}
&(\text{правая часть (4.110)}) = \\
&= g_k \left[ A_{\mu k}(x) + C_{ijk} \delta a_j(x) A_{\mu i}(x) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{g} [\partial_\mu \delta a_k(x)] \right].
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Таким образом, действительно, трансформационные свойства калибровочных полей не зависят от представления матриц  $g_k$ , ассоциированных с полями  $\chi\alpha(x)$ , а зависят только от структурных констант группы  $C_{ijk}$ :

$$A'_{\mu k}(x) = A_{\mu k}(x) + \delta a_j(x) C_{ijk} A_{\mu i}(x) + \frac{1}{g} (\partial_\mu \delta a_k(x)). \tag{4.113}$$

Для глобальных преобразований, для которых параметры не зависят от  $x$ , последнее слагаемое в (4.113) отсутствует, и преобразование выглядит следующим образом

$$A'_{\mu k}(x) = A_{\mu k}(x) + i\delta a_j(x) (\tilde{g}_j)_{ki} A_{\mu i}(x), \tag{4.114}$$

где «генератор» матриц соответствующих калибровочных полей  $\tilde{g}$  выражен в терминах структурных констант группы

$$(\tilde{g}_j)_{ki} = -iC_{jki} = -iC_{ijk}. \tag{4.115}$$

Используя тождество Якоби для  $\tilde{g}_i$ ,  $\tilde{g}_j$  и  $\tilde{g}_k$ , можно показать, что матрицы  $\tilde{g}$  в соотношении (4.115) удовлетворяют алгебре Ли группы  $G$

$$[\tilde{g}_i, \tilde{g}_j] = iC_{ijk} \tilde{g}_k. \quad (4.116)$$

Из предыдущего обсуждения очевидно, что калибровочные поля  $A_i^\mu$ , входящие в ковариантную производную (4.104), преобразуются по специальному представлению группы  $G$  – присоединенному представлению. Если группа  $G$  имеет  $n$  параметров, то матрицы  $\tilde{g}_i$  являются матрицами  $n \times n$ , чьи элементы связаны со структурными константами  $C_{ijk}$ .

После того как в результате замены производных на ковариантные производные был построен локально инвариантный лагранжиан, нужно найти напряженность полей  $A_i^\mu$  и учесть кинетическую энергию калибровочных полей. Проверим, что наивное обобщение абелева случая

$$\tilde{F}_k^{\mu\nu} = \partial^\mu A_k^\nu - \partial^\nu A_k^\mu \quad (4.117)$$

не проходит, так как в этом случае преобразование будет содержать производные от параметров  $\delta a_i$ . Действительно, используя (4.113), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_k^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_k'^\nu - \partial^\nu A_k'^\mu = \tilde{F}_k^{\mu\nu} + \delta a_i C_{ilk} \tilde{F}_i^{\mu\nu} + \\ &+ C_{ijk} \left[ (\partial^\mu \delta a_j) A_i^\nu - (\partial^\nu \delta a_j) A_i^\mu \right]. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Для получения корректного выражения напряженностей хотелось бы исключить последнее слагаемое в (4.118). Поскольку этот член содержит как  $\partial^\mu \delta a_j$ , так и  $A_i^\nu$ , попытаемся определить неабелевы напряженности полей следующим образом

$$F_k^{\mu\nu} = \partial^\mu A_k^\nu(x) - \partial^\nu A_k^\mu(x) + g C_{ijk} A_i^\mu(x) A_j^\nu(x). \quad (4.119)$$

Проверим, что это определение обладает желаемыми свойствами. Имея в виду соотношение (4.113), третий член в (4.119) преобразуем следующим образом



$$\begin{aligned}
& gC_{kij}A_i^\mu(x)A_j^\nu(x) \rightarrow gC_{kij}A_i^{\prime\mu}(x)A_j^{\prime\nu}(x) = \\
& = gC_{kij} \left[ A_i^\mu(x) + \delta a_l(x)C_{mli}A_m^\mu(x) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{g}\partial^\mu\delta a_l(x) \right] \times \\
& \times \left[ A_j^\nu(x) + \delta a_l(x)C_{mlj}A_m^\nu(x) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{g}\partial^\nu\delta a_j(x) \right] \approx gC_{kij}A_i^\mu(x)A_j^\nu(x) + \\
& \quad + C_{kij} \left[ (\partial^\mu\delta a_l(x))A_j^\nu(x) + \right. \\
& \quad \left. + (\partial^\nu\delta a_j(x))A_i^\mu(x) \right] + \\
& \quad + \delta a_l(x) \left[ gC_{kij}C_{mli}A_m^\mu A_j^\nu + gC_{kij}C_{mlj}A_i^\mu A_m^\nu \right].
\end{aligned} \tag{4.120}$$

С учетом антисимметрии структурных констант, имеем

$$\begin{aligned}
C_{kij}(\partial^\mu\delta a_i)A_j^\nu &= C_{kji}(\partial^\mu\delta a_j)A_i^\nu = -C_{ijk}(\partial^\mu\delta a_j)A_i^\nu, \\
C_{kij}(\partial^\nu\delta a_j)A_i^\mu &= C_{ijk}(\partial^\nu\delta a_j)A_i^\mu.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

При этом последнее слагаемое в (4.118) сокращает второе слагаемое в (4.120). Если учесть соотношение (4.116), то последнее слагаемое в (4.120) можно записать в более удобной форме

$$\begin{aligned}
& \text{последнее слагаемое (4.120)} = \\
& = \delta a_l(x) \left[ gC_{kij}C_{mli}A_m^\mu A_j^\nu + \right. \\
& \quad \left. + gC_{kmi}C_{jli}A_i^\mu A_m^\nu \right] = g\delta a_l(x) \left[ -C_{jki}C_{mil} + \right. \\
& \quad \left. + C_{mki}C_{jil} \right] A_m^\mu A_j^\nu = \\
& = g\delta a_l(x) [\tilde{g}_j, \tilde{g}_m]_{kl} A_m^\mu A_j^\nu = ig\delta a_l(x) C_{j\mu\rho} [\tilde{g}_\rho]_{kl} A_m^\mu A_j^\nu = \\
& = g\delta a_l(x) C_{j\mu\rho} C_{\rho kl} A_m^\mu A_j^\nu = g\delta a_l(x) C_{ilk} [gC_{imj}A_m^\mu, A_j^\nu].
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Окончательно получаем, что при локальных преобразованиях напряженности  $F_k^{\mu\nu}$  изменяются следующим образом

$$F_k^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\delta a(x)} F_k^{\prime\mu\nu}(x) = F_k^{\mu\nu}(x) + \delta a_j C_{ijk} F_i^{\mu\nu}(x). \tag{4.123}$$

При этих преобразованиях полевые напряженности изменяются как квантовые поля, относящиеся к присоединенному представлению группы. С помощью выражения (4.123) легко показать, что  $F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu}$  –  $G$ -инвариант. Действительно

$$\begin{aligned} F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu} &\rightarrow F_k'^{\mu\nu} F_{k\mu\nu}' = \left( F_k^{\mu\nu}(x) + \delta a_j C_{ijk} F_i^{\mu\nu}(x) \right) \times \\ &\times \left( F_{k\mu\nu}(x) + \delta a_j C_{ijk} F_{i\mu\nu}(x) \right) = F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu} + \\ &+ \delta a_j \left( C_{ijk} F_i^{\mu\nu}(x) F_{k\mu\nu}(x) + C_{ijk} F_k^{\mu\nu} F_{i\mu\nu}(x) \right) = F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

второе слагаемое обращается в ноль из-за антисимметрии структурных констант:  $C_{ijk} = -C_{jik}$ .

Суммируем полученные результаты. Плотность лагранжиана  $L(\partial_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha)$ , обладающая глобальной инвариантностью относительно преобразований группы  $G$ , может быть локально-инвариантной, если ввести в теорию калибровочные поля  $A_i^\mu$ , содержащиеся в ковариантных производных  $D^\mu \chi_\alpha$  и полевых напряженностях  $F_k^{\mu\nu}$ . Локально-инвариантная плотность лагранжиана:

$$L_{\text{loc}} = L(D_\mu \chi_\alpha, \chi_\alpha) - \frac{1}{4} F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu} \quad (4.125)$$

полностью определяется глобально инвариантным лагранжианом  $L$ .

Как и в абелевом случае, массовый член полей  $A_i^\mu$  в лагранжиане недопустим в силу локальной инвариантности (4.113). Чисто калибровочная часть лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4} F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu}, \quad (4.126)$$

содержащая кинетический член калибровочных полей  $A_k^\mu$ , является нелинейной теорией поля, поскольку содержит квадратичные члены по полям  $A_i^\mu$ . Для абелева случая, когда структурные константы обращаются в ноль, нелинейные члены отсутствуют.

Так как калибровочные поля преобразуются нетривиально относительно группы  $G$ , то «симметричные» токи теории (4.125) содержат вклад от калибровочных полей

$$J_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \chi_\alpha} \frac{1}{i} (g_i)_{\alpha\beta} \chi_\beta + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu A_j^\nu} \frac{1}{i} (\tilde{g}_i)_{jk} A_{\nu k}. \quad (4.127)$$

#### 4.5. Механизм Хиггса

Как уже обсуждалось выше, глобальные симметрии могут быть реализованы вигнер-вейлевским или намбу-голдстоуновским способом, в зависимости от того, изменяется или нет вакуумное состояние при этих преобразованиях. Что происходит, если глобальная симметрия локализуется, и появляются калибровочные поля? В вигнер-вейлевском случае ничего не происходит. Помимо вырожденных мультиплетов глобальной симметрии имеется вырожденный безмассовый мультиплет возбуждений калибровочных полей. В намбу-голдстоуновском случае происходит замечательная вещь! Когда глобальная симметрия локализуется, голдстоуновские бозоны, ассоциированные с нарушенными генераторами, исчезают, а соответствующие калибровочные поля приобретают массу. Это знаменитый механизм Хиггса.

Чтобы понять суть этого явления, полезно вновь вернуться к  $U(1)$  модели. Напомним, что плотность лагранжиана в этой модели

$$L = -\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - \lambda \left( \varphi^+ \varphi - \frac{1}{2} f \right)^2, \quad (4.128)$$

знак величины  $f$  определяет вигнер-вейлевскую ( $f < 0$ ) или намбу-голдстоуновскую ( $f > 0$ ) реализацию симметрии. Чтобы лагранжиан (4.128) стал локально  $U(1)$  инвариантным, достаточно заменить  $\partial_\mu \varphi$  ковариантной производной  $D_\mu \varphi$ , содержащей калибровочное поле  $A_\mu$ , и включить кинетический член этого поля.

При локальных  $U(1)$  преобразованиях

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha(x)} \varphi(x); \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Ковариантная производная

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu) \phi. \quad (4.130)$$

Следовательно, лагранжиан имеет вид

$$L = -(D_\mu \phi^\dagger)(D^\mu \phi) - \lambda \left( \phi^\dagger \phi - \frac{1}{2} f \right)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.131)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

и он, очевидным образом, локально  $U(1)$  инвариантен.

Если  $f < 0$  и глобальная симметрия реализована вигнер-вейлевским образом, то лагранжиан (4.131) описывает взаимодействие вырожденного мультиплетов скалярных полей ( $\phi$  и  $\phi^\dagger$ ) между собой, а также взаимодействие с безмассовым калибровочным полем  $A_\mu$ . Последние взаимодействия содержат как линейный член по калибровочным полям

$$L_{\text{int}}^{(1)} = gA_\mu [i(\partial^\mu \phi^\dagger) \phi - i\phi^\dagger \partial^\mu \phi] = gA_\mu J^\mu, \quad (4.132)$$

так и взаимодействие типа

$$L^{(1)} = -g^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi. \quad (4.133)$$

Если же  $f > 0$ , т.е. глобальная симметрия реализована намбу-голдстоуновским образом, то можно параметризовать теорию в терминах полей с нулевыми вакуумными средними. При такой параметризации оказывается возможным учесть осцилляции вблизи минимума потенциала  $V(\phi)$ . Действительно, заменим

$$\phi \phi^\dagger = f/2 + \text{квантовые поля}. \quad (4.134)$$

Сдвиг за счет этого слагаемого в лагранжиане (4.133) приводит к появлению массового члена поля  $A_\mu$

$$L_{\text{mass}} = -g^2 \frac{f}{2} A^\mu A_\mu \equiv -\frac{1}{2} m_A^2 A^\mu A_\mu. \quad (4.135)$$

Если калибровочное поле приобретает массу, оно не может быть поперечным (как фотон), у него появляется продольная поляризационная компонента. Эту дополнительную степень свободы надо откуда-то «взять». Нетрудно увидеть, что эта степень свободы возникает за счет намбу-голдстоуновского возбуждения, появляющегося при спонтанном нарушении глобальной  $U(1)$  симметрии.

Чтобы проверить это утверждение, удобнее всего в случае  $f > 0$  ввести новую параметризацию поля  $\phi$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{f} + \rho(x)] \exp\left(i \frac{\xi(x)}{\sqrt{f}}\right), \quad (4.136)$$

где  $\rho(x)$  и  $\xi(x)$  – вещественные поля, причем  $\xi(x)$  – фазовое поле, связанное с голдстоуновским бозоном. Поле  $\xi(x)$  не входит в потенциал, поскольку

$$V = \lambda \left( \phi \phi^+ - \frac{f}{2} \right)^2 = \lambda \left( \frac{\rho^2}{2} + \sqrt{f} \rho \right)^2, \quad (4.137)$$

а  $\rho$ -поле имеет массу

$$m_\rho^2 = 2\lambda f. \quad (4.138)$$

Легко видеть, что фазовое поле  $\xi$  входит в ковариантную производную тривиальным образом, т.е. его можно исключить из кинетического члена путем выбора калибровки. Таким образом, намбуголдстоуновский бозон не играет роли в локальной теории. Он «поглощается» и формирует массу калибровочных полей. Действительно, найдем ковариантную производную  $D_\mu \phi$  в параметризации (4.136) поля  $\phi$

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu - igA_\mu) \phi = (\partial_\mu - igA_\mu) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{f} + \rho) \exp\left[i \frac{\xi}{\sqrt{f}}\right] = \\ &= \frac{\exp\left[i \frac{\xi}{\sqrt{f}}\right]}{\sqrt{2}} \left[ \partial_\mu \rho - ig(\sqrt{f} + \rho) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ A_\mu - \frac{\partial_\mu \xi}{g\sqrt{f}} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Очевидно, что фактор перед [...] в (4.139), включающий  $\exp\left[i \frac{\xi}{\sqrt{f}}\right]$ , не возникает в лагранжиане (4.131), так как в этот ла-

гранжиан входит  $(D_\mu \phi)^+ D^\mu \phi$ . Кроме того,  $\xi$  – зависимость выражения в {...} скобках также иллюзорна, поскольку ее можно исключить путем калибровочного преобразования поля  $A_\mu$

$$A^\mu \rightarrow B^\mu = A^\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial_\mu \xi}{\sqrt{f}}. \quad (4.140)$$

Если  $U(1)$  глобальная симметрия спонтанно нарушена ( $f > 0$ ), то лагранжиан (4.131) можно переписать в терминах массивного векторного поля  $B'^\mu$  и массивного вещественного скалярного поля  $\rho$ . Результирующий лагранжиан

$$L = -\frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_A^2 B^\mu B_\mu - g^2 \left( \sqrt{f} \rho + \frac{\rho^2}{2} \right) B^\mu B_\mu - \lambda \left( \sqrt{f} \rho^3 + \frac{\rho^4}{4} \right), \quad (4.141)$$

где

$$m_\rho^2 = 2\lambda f; \quad m_A^2 = g^2 f. \quad (4.142)$$

Выше показано поглощение голдстоуновского бозона и возникновение массивного калибровочного поля в абелевом случае, однако то же явление происходит и в неабелевом случае.

#### 4.6. Голдстоуновский бозон и лоренц-инвариантность

Знаменитая теорема Голдстоуна подразумевает присутствие возбуждения с нулевой энергией при спонтанном нарушении непрерывной симметрии. В контексте квантовой теории поля этому возбуждению соответствует безмассовая голдстоуновская частица. В случае внутренних симметрий их спонтанное нарушение порождает безмассовые, бесспиновые голдстоуновские бозоны. Спонтанное же нарушение суперсимметрии связано с возникновением безмассовых фермионов со спином  $\frac{1}{2}$  – голдстино. Чтобы получить голдстоуновский бозон со спином 1, нужно потребовать нарушения лоренцевской симметрии. Обсудим связь между векторным голдстоуновским бозоном и лоренц-инвариантностью. Оказывается, что в теориях с дополнительными измерениями возможно возникновение векторного голдстоуновского бозона без нарушения 4-мерной лоренцевской симметрии.

#### 4.6.1. Голдстоуновские частицы со спином 0 и $\frac{1}{2}$

Предположим, что плотность лагранжиана теории инвариантна относительно непрерывных преобразований, приводящих к сохраняющемуся току,

$$\partial^\mu J_\mu(x) = 0. \quad (4.143)$$

Это означает, что сохраняющийся заряд является генератором преобразований симметрии

$$Q = \int J_0(x) d^3x, \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (4.144)$$

Предположим, что имеются два локальных оператора  $A$  и  $B$ , связанные генератором преобразований симметрии  $Q$  соотношением

$$[Q, A] = B. \quad (4.145)$$

Если по некоторым динамическим причинам оператор  $B$  имеет ненулевые вакуумные средние (VEV)

$$\langle 0|B|0\rangle \neq 0, \quad (4.146)$$

то в этом случае говорят о спонтанном нарушении симметрии. Из (4.145) следует, что

$$Q|0\rangle \neq 0, \quad (4.147)$$

т.е. вакуум уже неинвариантен относительно преобразований симметрии. Теорема Голдстоуна утверждает, что существует состояние  $|g(\vec{p})\rangle$ , для которого

$$E_g(\vec{p}) \rightarrow 0 \text{ при } \vec{p} \rightarrow 0. \quad (4.148)$$

В этих выражениях  $\vec{p}$  – импульс частицы. Согласно релятивистскому соотношению,  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ , это означает существование безмассовой частицы. Заметим, что голдстоуновское состояние  $|g(\vec{p})\rangle$  связано с операторами  $A$  и  $J_\mu$

$$\langle 0|J_\mu|g(\vec{p})\rangle \neq 0; \quad \langle 0|A|g(\vec{p})\rangle \neq 0. \quad (4.149)$$

Это означает, что голдстоуновское состояние  $|g(\vec{p})\rangle$  является квантом локального оператора  $A$ .

Простой пример голдстоуновского бозона со спином 0 – спонтанное нарушение киральной симметрии в низкоэнергетической

физике адронов. В этом случае киральный заряд  $Q_5^a$  преобразует пионные поля  $\pi^b$  в скалярном  $\sigma$  поле

$$[Q_5^a \pi^b] = \delta_{ab} \sigma. \quad (4.150)$$

Предположим, что эффективное взаимодействие между  $\pi$  и  $\sigma$  имеет вид

$$V_{\text{эф}} = \frac{\mu}{2}(\bar{\pi}^2 + \sigma^2) + \frac{\lambda}{4}(\bar{\pi}^2 + \sigma^2)^2. \quad (4.151)$$

Взаимодействие инвариантно относительно киральных  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  преобразований. Минимизация  $V_{\text{эф}}$  приводит к ненулевому VEV поля  $\sigma$

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.152)$$

В этом случае пионные поля  $\bar{\pi}$ , являющимися партнерами  $\sigma$  при киральном преобразовании (4.150), оказываются безмассовыми голдстоуновскими бозонами. С точки зрения КХД, поле  $\sigma$  представляет собой билинейную комбинацию  $\bar{q}q$ , и соотношение (4.152) эквивалентно

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \neq 0, \quad (4.153)$$

а голдстоуновские бозоны оказываются связанными состояниями

$$\pi^a \bar{q} \gamma_5 \tau^a q. \quad (4.154)$$

При спонтанном нарушении суперсимметрии (см. главу 7) существуют две возможности, одна из них связана с киральным суперполем и антикоммутиационным соотношением

$$\{Q_\xi, \Psi\} = \sqrt{2}F, \quad (4.155)$$

где  $Q_\xi$  – суперзаряд, который преобразует фермионы в бозоны и т.д.,  $\Psi$  – фермионная компонента,  $F$  – скалярная аксиальная компонента кирального суперполя. Если  $F$  имеет ненулевое VEV

$$\langle 0 | F | 0 \rangle, \quad (4.156)$$

то фермион  $\psi$  становится голдстоуновской частицей (голдстино) и партнером массивного физического скалярного поля. В случае спонтанного нарушения, за счет векторного суперполя, антикоммутиационные соотношения



$$\{Q_\xi, \lambda\} = \sqrt{2}D, \quad (4.157)$$

где  $\lambda$  – фермионная компонента,  $D$  – аксиальная скалярная компонента векторного суперполя. Если  $D$  имеет ненулевое VEV

$$\langle 0|D|0\rangle \neq 0, \quad (4.158)$$

то  $\lambda$  становится голдстоуновским фермионом и партнером массивной физической векторной частицы.

#### 4.6.2. Векторный голдстоуновский бозон

Во всех случаях, рассмотренных выше, поля с ненулевыми VEV имеют спин 0, и голдстоуновские частицы являются партнерами этих полей при преобразованиях симметрии.

В 4-мерной теории поля векторное поле не связано с каким-либо скалярным полем. Единственный способ получить векторный голдстоуновский бозон состоит в спонтанном нарушении лоренцевской инвариантности.

По аналогии с соотношением (4.144) предположим, что существуют два векторных поля, связанные некоторым преобразованием симметрии

$$[Q, A^\mu] = B^\mu. \quad (4.159)$$

Если  $B_\mu$  имеет ненулевые VEV

$$\langle 0|B^\mu|0\rangle \neq 0, \quad (4.160)$$

то квант поля  $A^\mu$  будет безмассовой голдстоуновской частицей со спином 1. Очевидно, что условие нарушения симметрии (4.159) нарушает и лоренцевскую инвариантность. Несмотря на то, что существуют строгие экспериментальные ограничения на возможное нарушение Лоренц-симметрии (см. главу 9), весьма интересно рассмотреть эту возможность. В теориях с дополнительными измерениями, однако, оказывается возможным получить векторный голдстоуновский бозон без нарушения лоренцевской симметрии в 4-х измерениях.

Рассмотрим векторное поле в 5-мерной теории  $\varphi_A$ ,  $A = 0, 1, 2, 3$ , 4. По аналогии с (4.150) запишем эффективный потенциал взаимодействия

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} (\varphi_A \varphi^A) + \frac{\lambda}{4} (\varphi_A \varphi^A)^2 \quad (4.161)$$

При  $\mu^2 > 0$

$$\langle 0 | \varphi_\mu | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (4.162)$$

минимизирует потенциал  $V(\varphi)$ . При этом нарушается 5-мерная лоренц-симметрия  $SO(4,1)$  до 4-мерной  $SO(3,1)$ . В результате 4-мерное векторное поле  $\varphi_\mu$ ,  $\mu=0, 1, 2, 3$  оказывается безмассовым векторным голдстоуновским бозоном. Условие (4.161) можно записать в терминах фермионного конденсата

$$\langle 0 | \bar{\Psi} \gamma_A \Psi | \rangle = V \delta_{A4}. \quad (4.163)$$

В этом случае векторный голдстоуновский бозон представляет собой составное поле  $\bar{\Psi} \gamma_A \Psi$ ,  $\mu=0, 1, 2, 3$ .

### 4.6.3. Голдстоуновский фотон

Еще 40 лет назад Бьеркен обсуждал безмассовость фотона не как следствие калибровочной инвариантности, а как результат спонтанного нарушения симметрии. Эта идея оказалась, в силу успехов калибровочных теорий, не столь притягательной, однако феноменологически она вполне приемлема. Как было отмечено выше, в 4-х измерениях рассмотрение фотона как векторного голдстоуновского бозона требует нарушения лоренц-инвариантности.

Рассмотрим для простоты самовзаимодействующую фермионную полевую теорию с лагранжианом

$$L = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^{2n}, \quad (4.164)$$

где  $\lambda_{2n}$  – константы связи. Эта модель напоминает модель Намбу-Иона-Лашиньо спонтанного нарушения симметрии. Введем аксиальное поле  $A_\mu$  и перепишем лагранжиан в виде

$$L = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - V(A^\mu A_\mu), \quad (4.165)$$

где эффективный потенциал:

$$V(A^2) = \Lambda^4 \sum_{n=1}^{\infty} V_n \left( \frac{A^2}{\Lambda^2} \right)^n, \quad (4.166)$$

где  $A^\mu = A^\mu \Delta_\mu$ .

В этом выражении  $V_n$  – безразмерные константы, связанные с  $\lambda_{2n}$  в (4.164),  $\Lambda$  – параметр размерности массы. Этот потенциал способен генерировать ненулевые вакуумные средние:

$$\langle 0 | A_\mu | 0 \rangle = c \Lambda n_\mu, \quad (4.167)$$

причем  $c$  – безразмерная константа, а  $n_\mu$  – пространственно-подобный единичный вектор. При нарушении лоренцевской симметрии возникают три безмассовых голдстоуновских моды, две из которых – поперечные фотоны и одна времениподобная мода. Если  $\Lambda$  очень велика, то при энергиях, гораздо меньших  $\Lambda$ , лоренц-симметрия приблизительно сохраняется, а любые нарушения подавлены степенями  $\Lambda$ .

### 5.1. Введение

В стандартной модели имеются несколько глобальных симметрий, как точных, так и приближенных. Некоторые из этих симметрий проявляют себя (реализация вигнера-вейля), другие – спонтанно нарушены (намбу-голдстоуновская реализация). Рассмотрим более детально эти симметрии. Как обсуждалось в главе 4, в зависимости от того, обладает ли вакуум теории рассматриваемой симметрией, существуют важные отличия между непрерывными глобальными симметриями (преобразованиями). Обозначим глобальную группу симметрий теории через  $G$ . Эта группа имеет генераторы  $g_i$ , которые удовлетворяют алгебре

$$[g_i, g_j] = iC_{ijk}g_k, \quad (5.1)$$

где  $C_{ijk}$  – структурные константы группы. Если генераторы  $g_i$  для всех  $i$  аннулируют вакуумное состояние

$$g_i|0\rangle = 0, \quad (5.2)$$

то группа симметрии реализована вигнер-вейлевским образом с вырожденными мультиплетными состояниями в спектре. Если же, с другой стороны, для некоторых генераторов

$$g_i|0\rangle \neq 0, \quad (5.3)$$

то группа симметрии  $G$  спонтанно нарушена до подгруппы  $H(G \rightarrow H)$ , и  $n = \dim(G/H)$  безмассовых скаляров появляется в спектре теории. Это намбу-голдстоуновская реализация симметрий  $G$ , безмассовые скаляры известны как намбу-голдстоуновские бозоны.

Физически легко понять приближенный характер глобальных симметрий. Эти симметрии возникают тогда, когда можно пренебречь некоторыми динамическими параметрами в теории. Известный пример содержит квантовая хромодинамика. Лагранжиан КХД

$$L_{\text{КХД}} = -\sum_i \bar{q}_i \left( \gamma^\mu \frac{1}{i} D_\mu + m_i \right) q_i - \frac{1}{4} G_{\alpha}^{\mu\nu} G_{\alpha\mu\nu} \quad (5.4)$$

имеет приближенную глобальную симметрию, связанную с тем, что массы легчайших кварков  $m_u$  и  $m_d$  гораздо меньше динамического масштаба теории  $\Lambda_{\text{КХД}}$ . Пренебрегая массами легких кварков, можно обнаружить, что лагранжиан КХД инвариантен относительно глобальной группы преобразований

$$L_{\text{КХД}} \xrightarrow{U(n_f)_L \times U(n_f)_R} L_{\text{КХД}}, \quad (5.5)$$

где  $n_f$  – число ароматов, чьими массами можно пренебречь. При преобразованиях этой группы  $n_f$  легких кварков переходят друг в друга. Например, для  $n_f=2$ , пренебрегая массами  $m_u$  и  $m_d$  в лагранжиане КХД, получаем преобразования симметрии

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L &\rightarrow e^{i\alpha_{iL} T_i} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L; \\ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R &\rightarrow e^{i\alpha_{iR} T_i} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $T_i = (\tau_i, 1)$ .

Глобальная  $U(2)_L \times U(2)_R$  – приближенная симметрия КХД, возникает в предположении  $m_{u,d} \ll \Lambda$ , и это – симметрия на классическом уровне. На квантовом уровне существует аномалия Адлера – Белла–Джекива в  $U(1)_{R-L}$  подгруппе этой симметрии, и реальная приближенная глобальная симметрия КХД сводится к группе

$$\begin{aligned} G &= SU(2)_{R+L} \times SU(2)_{R-L} \times U(1)_{R+L} = \\ &= SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_B. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Однако только  $SU(2)_V$  и  $U(1)_B$  симметрии проявляют себя в природе.  $SU(2)_A$  симметрия спонтанно нарушена образованием конденсатов  $u$  и  $d$  кварков

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \neq 0. \quad (5.8)$$

Проявление  $SU(2)_V$  симметрии – это хорошо известная изоспиновая симметрия сильных взаимодействий, приводящая к нуклонному  $N = (p, n)$  и пионному  $\pi = (\pi^\pm, \pi^0)$  мультиплетам.  $U(1)_B$  – соответствует барионному числу, эта симметрия гарантирует равенство масс нуклонов и антинуклонов.

Спонтанное нарушение  $SU(2)_A$  симметрии приводит к появлению трех намбу-голдстоуновских бозонов, которые идентифицируются с пионами. Действительно, можно показать, что

$$m_\pi^2 \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad m_{u,d} \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Если  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  – только приближенная симметрия КХД, то  $U(1)_B$  – точная глобальная симметрия теории, соответствующая преобразованию

$$q_i \rightarrow \exp\left[\frac{i}{3}\alpha_B\right] q_i. \quad (5.10)$$

Это преобразование действует на все кварки одинаково, поэтому, очевидно, является симметрией электрослабой теории. Действительно, поскольку все взаимодействия включают  $q\bar{q}$  пары, то получаем

$$L_{\text{стан.мод.}} \xrightarrow{U(1)_B} L_{\text{стан.мод.}}. \quad (5.11)$$

Те же самые аргументы применимы и к лептонам, поскольку все взаимодействия в стандартной модели содержат лептон – антилептонные пары. Следовательно

$$L_{\text{стан.мод.}} \xrightarrow{U(1)_L} L_{\text{стан.мод.}}. \quad (5.12)$$

И если  $U(1)_B$ -симметрия связана с сохраняющимся током

$$J_B^\mu = \frac{1}{3} \sum_i \bar{q}_i \gamma^\mu q_i, \quad (5.13)$$

то  $U(1)_L$ -симметрия с током

$$J_L^\mu = \sum_i \bar{l}_i \gamma^\mu l_i. \quad (5.14)$$

На квантовом уровне, однако, ни  $U(1)_L$  ни  $U(1)_B$  не остаются «хорошими» симметриями из-за киральной природы слабых взаимодействий. Так как левые поля под действием преобразований  $SU(2) \times U(1)$  стандартной модели ведут себя иначе, чем правые поля, то в электрослабой теории  $J_B^\mu$  и  $J_L^\mu$  имеют ABJ аномалии. Как будет видно, нарушения  $U(1)_B$  и  $U(1)_L$  вследствие аномалий одинаковы. Таким образом, в электрослабой теории на квантовом уровне остается только одна глобальная квантовая симметрия  $U(1)_{B-L}$ :

$$L_{\text{стан.мод.}} \xrightarrow{U(1)_{B-L}} L_{\text{стан.мод.}} \cdot \quad (5.15)$$

Дальше будем более подробно обсуждать эту симметрию, но прежде чем это делать, заметим, что электрослабая теория содержит большое число глобальных симметрий в пределе нулевых масс нейтрино ( $m_{\nu_i} = 0$ ). В этом случае каждое индивидуальное лептонное число ( $L_l, L_\mu$  и  $L_\tau$ ) на классическом уровне сохраняется по отдельности, а  $3L_l$ -В,  $3L_\mu$ -В,  $3L_\tau$ -В сохраняются на квантовом уровне.

Если включить правые нейтрино в стандартную модель ( $m_{\nu_i} \neq 0$ ), то можно ожидать смешивание нейтрино, как и в кварковом случае. С массами нейтрино в районе электроновольт стандартная модель способна нарушать лептонное число.

## 5.2. Киральные аномалии

Существование киральных ABJ аномалий – важное следствие стандартной модели. Аномалии, как будет видно, изменяют классическую структуру глобальной симметрии теории. Кроме того, в них «участвуют» напряженности калибровочных полей:

$$F_a^{\mu\nu} \tilde{F}_{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \xi^{\mu\nu\alpha\beta} F_{a\alpha\beta} F_{a\mu\nu} \cdot \quad (5.16)$$

Эта структура не только  $C$ -четна, но  $P$  и  $T$ -нечетна. Следовательно, структура (5.16) может являться дополнительным источником  $CP$

нарушения. В стандартной модели эта структура входит в так называемый  $\bar{\theta}$  – член эффективного взаимодействия:

$$L_{CP\text{нар.}} = \bar{\theta} \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}, \quad (5.17)$$

где  $G_a^{\mu\nu}$  – напряженность глюонного поля КХД,  $\alpha_3$  – квадрат константы связи  $\left[ \alpha_3 = \frac{g_3^2}{4\pi} \right]$ .

Какие причины могут быть для введения киральных аномалий? Это проще всего продемонстрировать для одного фермионного поля  $\psi$  и  $U(1)_V \times U(1)_A$  глобальной симметрии. В этой теории на классическом уровне имеются два сохраняющихся тока:

$$J_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \text{причем} \quad \partial_\mu J_V^\mu = 0, \quad (5.18)$$

$$J_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi; \quad (5.19)$$

а также:

$$\partial_\mu J_A^\mu = 2m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0.$$

Иначе говоря, киральная  $U(1)_A$  симметрия возникает при условии, если фермион безмассовый. На квантовом уровне, однако, невозможно обеспечить выполнение обоих законов сохранения для  $J_A^\mu$  и  $J_V^\mu$ . В этом и заключается источник киральной аномалии.

Если говорить более определенно, то источником аномалии является сингулярное поведение треугольной диаграммы, включающей один аксиальный ток  $J_A^\mu$  и два векторных тока  $J_V^\mu$ .

Каждый из вкладов на рис. 5.1 логарифмически расходится. Однако их сумма конечна. Можно записать функции Грина для двух векторных токов  $J_V^\mu$  и одного аксиального тока

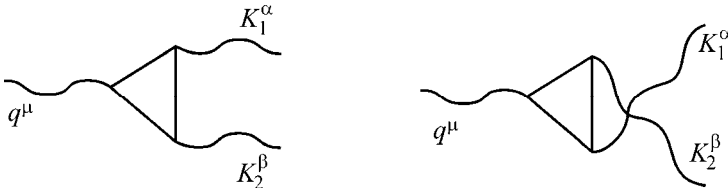


Рис. 5.1



$$T^{\mu\alpha\beta} = F(q^2, k_1^2, k_2^2) p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2). \quad (5.20)$$

Псевдотензор  $p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2)$  в силу бозе-симметрии удовлетворяет соотношению

$$p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = p^{\mu\beta\alpha}(k_2, k_1). \quad (5.21)$$

Далее, сохранение векторных токов подразумевает ограничения

$$k_{1\alpha} p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = k_{2\beta} p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = 0. \quad (5.22)$$

Соотношения (5.21), (5.22) определяют структуру псевдотензора

$$p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\delta} k_{1\rho} k_{2\delta} q^\mu. \quad (5.23)$$

Из-за входящих в  $p^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2)$  импульсов, инвариантная функция  $F(q^2, k_1^2, k_2^2)$  оказывается конечной.

Проводя процедуру регуляризации Паули – Вилларса треугольной диаграммы, получаем конечные выражения для каждой из диаграмм рис.5.1. Обозначим вклад диаграмм, соответственно, через  $t^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и  $t^{\mu\beta\alpha}(k_2, k_1)$ , получаем для тензора

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) &= \varepsilon^{\alpha\beta\rho\delta} k_{1\rho} k_{2\delta} q^\mu F(q^2, k_1^2, k_2^2) = \\ &= \left[ t^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) \Big|_m - t^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) \Big|_M \right] + \\ &+ \left[ t^{\mu\beta\alpha}(k_2, k_1) \Big|_m - t^{\mu\beta\alpha}(k_2, k_1) \Big|_M \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

В этом выражении  $M$  – масштаб регуляризации паули–вилларса. Вычисляя дивергенцию выражения (5.24) и полагая массу фермиона  $m \rightarrow 0$ , получаем выражение

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta} = -2iM p^{\alpha\beta}(M). \quad (5.25)$$

В этом выражении псевдоскалярная структура  $p^{\alpha\beta}(M)$  включает графики, аналогичные рис. 5.1, за исключением аксиальной вершины, пропорциональной  $\gamma_5$ , а не  $\gamma^\mu \gamma_5$ .

Поскольку функция  $F(q^2, k_1^2, k_2^2)$  – конечна, то известно, что регуляризации паули–вилларса на самом деле несущественна, и можно положить  $M \rightarrow \infty$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} [-2iMP^{\alpha\beta}(M)] = \frac{i}{2\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\delta} k_{1\rho} k_{2\delta}. \quad (5.26)$$

Таким образом, получаем уравнение для аномальной дивергенции

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta} = \frac{i}{2\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\delta} k_{1\rho} k_{2\delta}. \quad (5.27)$$

Аномальное тождество Уорда для  $T^{\mu\alpha\beta}$  можно интерпретировать в терминах нарушения сохранения аксиального тока  $J_A^\mu$ . Поскольку  $U(1)_V$  калибровочные бозоны – «фотоны» связаны с  $J_V^\alpha$  и  $J_V^\beta$ , то уравнение (5.27) эквивалентно аномальной дивергенции уравнения

$$\partial_\mu J_A^\mu = \frac{e^2}{8\pi} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{2\pi} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (5.28)$$

где  $e$  –  $U(1)_V$  константа связи. Выражение (5.28) – знаменитая АБЖ киральная аномалия.

Полученный результат в рамках  $U(1)_V \times U(1)_A$  теории легко обобщается на случай, когда поля в токе  $J_A^\mu$  несут неабелевый заряд. В этом случае фермионы в неабелевых треугольных диаграммах несут некоторый неабелевый индекс, диаграмма вместо простого умножения на  $e^2$  будет содержать фактор

$$g^2 \text{tr} \left( \frac{\lambda_a}{2} \cdot \frac{\lambda_a}{2} \right) = \frac{1}{2} g^2 \delta_{ab}, \quad (5.29)$$

где  $g$  – константа связи, ассоциированная с неабелевой группой и  $\frac{\lambda_a}{2}$  – соответствующие матричные генераторы для фермионных полей, преобразующихся по фундаментальному представлению неабелевой группы. Таким образом, в неабелевом случае выражение (5.28) для киральной аномалии заменяется на следующее выражение:

$$\partial_\mu J_A^\mu = \frac{g^2}{16\pi^2} F_a^{\alpha\beta} \tilde{F}_{a\alpha\beta} = \frac{\alpha g^2}{4\pi} F_a^{\alpha\beta} \tilde{F}_{a\alpha\beta}, \quad (5.30)$$

где  $F_a^{\alpha\beta}$  – напряженность неабелевого калибровочного поля.

Приведенные выше результаты можно использовать для анализа барионного ( $B$ ) и лептонного ( $L$ ) токов в стандартной модели. Разлагая эти токи на киральные компоненты, получаем

$$J_B^\mu = \frac{1}{3} \sum_i \bar{q}_i \gamma^\mu q = \frac{1}{3} \sum_i (\bar{q}_{iL} \gamma^\mu q_{iL} + \bar{q}_{iR} \gamma^\mu q_{iR}). \quad (5.31)$$

$$J_L^\mu = \sum_i \bar{l}_i \gamma^\mu l = \sum_i (\bar{l}_{iL} \gamma^\mu l_{iL} + \bar{l}_{iR} \gamma^\mu l_{iR}).$$

Поскольку кварки и лептоны взаимодействуют с  $SU(2) \times U(1)$  электрослабыми полями, дивергенции  $J_B^\mu$  и  $J_L^\mu$  – не обращаются в ноль, и это результат возникновения киральных аномалий.

Вычисление треугольных диаграмм в этом случае дает

$$\partial_\mu J_B^\mu = \frac{-\alpha_2}{8\pi} N_g W_i^{\mu\nu} \tilde{W}_{i\mu\nu} + \frac{\alpha_1}{8\pi} N_g \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} \right) Y^{\alpha\beta} \tilde{Y}_{\alpha\beta} \quad (5.32)$$

и

$$\partial_\mu J_L^\mu = \frac{-\alpha_2}{8\pi} N_g W_i^{\mu\nu} \tilde{W}_{i\mu\nu} + \frac{\alpha_1}{8\pi} N_g \left( 1 - \frac{1}{2} \right) Y^{\alpha\beta} \tilde{Y}_{\alpha\beta}. \quad (5.33)$$

В последних выражениях  $N_g$  – число генераторов группы симметрии. Различные числа перед вкладками от  $U(1)$  калибровочных бозонов содержат квадраты соответствующих гиперзарядов, помноженные на число состояний (например,  $u_R$  дает фактор  $4/9$ , а дублет  $(u, d)_L$  – фактор  $2 \cdot 1/36$ ). Заметим, что как для тока барионного числа, так и для тока лептонного числа не только  $SU(2)$ , но и  $U(1)$  факторы одинаковые  $\left[ \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \right]$ . Это означает, что полное фермионное число  $B+L$  нарушено на квантовом уровне, но разность  $B-L$  сохраняется

$$\partial_\mu J_{B+L}^\mu = \frac{\alpha_1^2}{8\pi} N_g Y^{\alpha\beta} \tilde{Y}_{\alpha\beta} - \frac{\alpha_2^2}{4\pi} N_g W_i^{\alpha\beta} \tilde{W}_{i\alpha\beta}, \quad (5.34)$$

$$\partial_\mu J_{B-L}^\mu = 0.$$

Аналогичная ситуация в КХД. В пределе  $m_{u,d} \rightarrow 0$  эта теория обладает на классическом уровне глобальной симметрией  $SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_A \times U(1)_V$ . Однако  $U(1)_A$  ток

$$J_5^\mu = \frac{1}{2} [\bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 d] \quad (5.35)$$

имеет киральную аномалию, поскольку кварки несут цвет и взаимодействуют с глюонами. Учитывая вклад  $u$  и  $d$  кварков в треугольную диаграмму, получим

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{\alpha_3^2}{4\pi} G_a^{\alpha\beta} \tilde{G}_{a\alpha\beta}. \quad (5.36)$$

Нарушения  $(B+L)$  тока в электрослабой теории и  $U(1)_A$  тока в КХД, определяемые соотношениями (5.34) и (5.35), весьма похожи. Тем не менее, эти квантовые поправки весьма различны. Как будет видно ниже, ток  $J_5^\mu$  сильно нарушен квантовыми КХД-эффектами. В результате, как уже отмечалось раньше, классическая  $U(1)_A$  симметрия не является точной симметрией сильных взаимодействий. Ток же  $J_{B+L}^\mu$  чрезвычайно слабо нарушен квантовыми поправками, за исключением ранней Вселенной, где температурные эффекты усиливают эти вклады. Таким образом, при нулевой температуре полное фермионное число  $(B+L)$  сохраняется.

Физически эти два результата просто необходимы. Образование конденсатов  $u$  и  $d$  кварков

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \neq 0 \quad (5.37)$$

в КХД очевидным образом нарушает как  $SU(2)_A$ , так и  $U(1)_A$  симметрию. Если бы  $U(1)_A$  была бы точной симметрией, то можно было ожидать существование ассоциированного нambu-голдстоуновского бозона ( $\eta$ -мезона) со свойствами, похожими на свойства  $SU(2)_A$  нambu-голдстоуновского бозона ( $\pi$ -мезона). Хотя эти состояния предполагаются безмассовыми, если глобальные симметрии точные, оба состояния должны иметь близкие массы даже с учетом масс  $u$  и  $d$  кварков. Однако экспериментально  $m_\eta^2 \gg m_\pi^2$ , т.е.  $U(1)_A$  не может быть симметрией КХД. Поэтому сильное нарушение  $J_A^\mu$  за счет аномалий – вполне желаемый результат. В электрослабой же теории очень важно, чтобы аномальное нарушение  $(B+L)$  не приводило к большим наблюдаемым эффектам, по-

сколько существует очень строгое экспериментальное ограничение на нарушение барионного числа. например, для  $B$  – нарушающего распада  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  ограничение

$$\tau(p \rightarrow e^+ \pi^0) \geq 5.5 \cdot 10^{32} \text{ лет.} \quad (5.38)$$

Чтобы понять, почему аномальный вклад в соотношение (5.36), связанный с  $U(1)_A$  током важен, а аномальный вклад в (5.34), связанный с  $(B+L)$  током, несущественен, необходимо исследовать свойства вакуума калибровочной теории.

### 5.3. Калибровочная теория вакуума

Вакуумное состояние, по определению, это такое состояние, в котором все поля обращаются в ноль. Для калибровочных полей это определение следует несколько расширить, поскольку эти поля сами по себе нефизические. Поэтому для калибровочных полей вакуумное состояние, в котором или  $A_a^\mu = 0$  или состояние, полученное калибровочным преобразованием  $A_a^\mu = 0$ . Для этих целей достаточно исследовать  $SU(2)$  калибровочную теорию, поскольку этот пример сохраняет черты более общих теорий.

В  $SU(2)$  теории удобнее рассматривать временную калибровку, в которой  $A_a^0 = 0$  ( $a = 1, 2, 3$ ). В этой калибровке пространственные компоненты калибровочных полей оказываются независимыми от времени  $A^i(\vec{r}, t) = A_a^i(\vec{r})$ . Но даже в такой калибровке существует «остаточный» калибровочный «произвол». Определяя калибровочную матрицу  $A^i(\vec{r})$ , свертывая калибровочные поля с матрицами

Паули  $A^i(\vec{r}, t) = \frac{\tau_a}{2} A_a^i(\vec{r})$  в  $A_a^0 = 0$  калибровке, мы сохраняем возможность осуществления следующих калибровочных преобразований

$$A^i(\vec{r}) \rightarrow \Omega(\vec{r}) A^i(\vec{r}) \Omega(\vec{r})^{-1} + \frac{i}{g} \Omega(\vec{r}) \nabla^i \Omega(\vec{r})^{-1}, \quad (5.39)$$

где  $g$  – калибровочная константа  $SU(2)$  теории. Таким образом, в  $A_a^0 = 0$  калибровке калибровочные поля, соответствующие вакуумной конфигурации, образуют набор  $\left\{0, \frac{i}{g} \Omega(\vec{r}) V^i \Omega(\vec{r})^{-1}\right\}$ . Поведение  $\Omega(\vec{r})$  при  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  определяет различные классы калибровочных полей. В частности, требование

$$\Omega(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad (5.40)$$

определяет отображение физического пространства  $[S_3]$  на групповое пространство  $[SU(2) \sim S_3]$ . Отображение  $S_3 \rightarrow S_3$  разделяет матрицы  $\Omega(\vec{r})$  на различные гомотопические классы  $\{\Omega(\vec{r})\}$ , характеризующиеся целым числом («winding number»), которое определяемым характером стремления  $\Omega(\vec{r})$  к единице на пространственной бесконечности

$$\Omega_n(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{2\pi i n}. \quad (5.41)$$

Тогда набор калибровочных полей, характеризующий вакуумное состояние –  $\{0, A_n^i(\vec{r})\}$ , где

$$A_n^i(\vec{r}) = \frac{i}{g} \Omega_n(\vec{r}) V^i \Omega_n(\vec{r})^{-1}. \quad (5.42)$$

Winding number  $n$  – это якобиан  $S_3 \rightarrow S_3$  преобразования, и его можно выразить следующим образом:

$$n = \frac{ig^3}{24\pi^2} \int d^3\vec{r} \text{tr}(\epsilon_{ijk} A_n^i(\vec{r}) A_n^j(\vec{r}) A_n^k(\vec{r})). \quad (5.43)$$

При этом можно построить матрицу преобразований  $\Omega_n(\vec{r})$  с winding number  $n$ , объединяя  $n$  раз матрицу преобразований  $\Omega_1(\vec{r})$ :

$$\Omega_n(\vec{r}) = [\Omega_1(\vec{r})]^n. \quad (5.44)$$

Для  $n = 1$  матрица так называемого большого калибровочного преобразования имеет вид

$$\Omega_1(\vec{r}) = \frac{\vec{r}^2 - \lambda^2}{\vec{r}^2 + \lambda^2} + \frac{2i\lambda \vec{\tau} \cdot \vec{r}}{\vec{r}^2 + \lambda^2}, \quad (5.45)$$

где  $\lambda$  – произвольный масштабный параметр.

Если иметь в виду вышеупомянутые свойства, то становится очевидным, что  $n$ -е вакуумное состояние, соответствующее калибровочной конфигурации  $A_n^i(\vec{r})$ , не является полностью калибровочно инвариантным. Действительно, большое калибровочное преобразование способно трансформировать  $A_n^i(\vec{r})$  в следующее состояние

$$A_{n+1}^i(\vec{r}) = \Omega_1(\vec{r}) A_n^i(\vec{r}) \Omega_1(\vec{r})^{-1} + \frac{i}{g} \Omega_1(\vec{r}) V^i \Omega_1(\vec{r})^{-1}, \quad (5.46)$$

иначе говоря

$$\Omega_1 |n\rangle = |n+1\rangle. \quad (5.47)$$

Истинное вакуумное состояние калибровочной теории должно быть калибровочно-инвариантным, т.е. линейной суперпозицией  $n$ -вакуумных состояний. Это так называемый  $\theta$ -вакуум (Поляков, Т' Хоофт)

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{-in\theta} |n\rangle. \quad (5.48)$$

Поскольку

$$\Omega_1 |\theta\rangle = \sum_n e^{-in\theta} \Omega_1 |n\rangle = \sum_n e^{-in\theta} |n+1\rangle = e^{i\theta} |\theta\rangle, \quad (5.49)$$

то  $\theta$ -вакуум калибровочно-инвариантен. С использованием  $\theta$ -вакуума, как истинного вакуума калибровочных теорий, вакуумный функционал этих теорий делится на два различных сектора. Если  $|\theta\rangle_{\pm}$  —  $\theta$ -вакуумные состояния при  $t = \pm\infty$ , то вакуумный функционал теории принимает следующую форму:

$$+ \langle \theta | \theta \rangle_- = \sum_{n,m} e^{im\theta} e^{-in\theta} + \langle m | n \rangle_- = \sum_v e^{iv\theta} \left[ \sum_n + \langle n+v | n \rangle_- \right]. \quad (5.50)$$

Таким образом, вакуумный функционал представляет собой сумму вакуумных амплитуд, у которых winding number при  $t = \pm\infty$  отличается на  $v$ , взвешенных с фактором  $e^{iv\theta}$ . Можно ожидать, что суперпозиция амплитуд с различными фазами  $e^{iv\theta}$  приведет к  $CP$  нарушающим эффектам. Вспоминая, что вакуумный функционал,

задается интегралом по путям конфигураций калибровочного поля, взвешенным с классическим действием, получаем формулу

$${}_+\langle\theta|\theta\rangle_- = \int_{\text{пути}} \delta A_\mu e^{iS[A]} = \sum_v e^{iv\theta} \left[ \sum_n {}_+\langle n+v|n\rangle_- \right]. \quad (5.51)$$

Хотя формула для  ${}_+\langle\theta|\theta\rangle_-$  получена в  $A_a^0$  калибровке, параметр  $v$  имеет калибровочно-инвариантное значение. Согласно Полякову – Т' Хоофту,

$$v = n_+ - n_- = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}. \quad (5.52)$$

Чтобы это показать, следует воспользоваться тождеством Бардина, выражающим произведение  $G\tilde{G}$  через полную производную

$$G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} = \partial_\mu K^\mu. \quad (5.53)$$

где «ток»  $K^\mu$  задается соотношением

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\lambda} \left[ G_{\alpha\beta\gamma} - \frac{g}{3} \epsilon_{abc} A_{b\rho} A_{c\gamma} \right]. \quad (5.54)$$

Для чисто калибровочных полей ( $G_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ) в калибровке  $A_a^0 = 0$  этот ток имеет только временную компоненту

$$K^i = 0; \quad K^0 = -\frac{g}{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} A_a^i A_b^j A_c^k = \frac{4}{3} ig \epsilon_{ijk} \cdot \text{tr}(A^i A^0 A^k). \quad (5.55)$$

Используя эти соотношения, в этой калибровке для winding чисел  $n_\pm$  получаем

$$n_\pm = \frac{ig^3}{24\pi^2} \int d^3r \epsilon_{ijk} \text{tr}(A^i A^j A^k) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^3r K^0 \Big|_{t=\pm\infty}. \quad (5.56)$$

Эта формула позволяет выразить разность  $v = n_+ - n_-$  следующим образом:

$$v = n_+ - n_- = \frac{g^3}{32\pi^2} \int d^3r K^0 \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d\sigma_\mu K^\mu. \quad (5.57)$$

Тогда соотношение (5.52) следует из теоремы Гаусса и тождества Бардина.



Если  $v$  выражено через интеграл от  $G\tilde{G}$ , то можно переписать формулу для вакуумного функционала в терминах эффективного действия. Определяя

$$S_{eff}[A] = S[A] + \theta \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}, \quad (5.58)$$

видим, что

$$+ \langle \theta | \theta \rangle_- = \sum_v \int_{\text{пути}} \delta A_\mu e^{iS_{eff}[A]} \delta \left[ v - \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} \right]. \quad (5.59)$$

С учетом  $\theta$ -вакуумной структуры, к лагранжиану калибровочной теории добавляется дополнительный член

$$L_{эф} = L_{калибр} + \theta \frac{g^2}{32\pi^2} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}. \quad (5.60)$$

Теория возмущений связана с  $v = 0$  сектором, поскольку  $\int d^4x G\tilde{G} = 0$ . Эффекты  $v \neq 0$  включает непертурбативные процессы.

В качестве примера обратимся сначала к КХД. Предполагая существование  $n_f$  ароматов, чьими массами можно пренебречь ( $m_f = 0$ ), запишем аксиальный ток

$$J_5^\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_f} \bar{q}_i \gamma^\mu \gamma_5 q_i. \quad (5.61)$$

Этот ток не сохраняется, и это следствие киральной аномалии

$$\partial_\mu J_5^\mu = n_f \frac{g_3^2}{32\pi^2} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}. \quad (5.62)$$

С точки зрения предыдущего рассмотрения, изменение  $\Delta Q_5$  можно связать с  $v$

$$\Delta Q_5 = \int d^4x \partial_\mu J_5^\mu = n_f \frac{g_3^2}{32\pi^2} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} = n_f v. \quad (5.63)$$

Очевидно, если сектора  $v \neq 0$  важны для КХД, то изменение (5.63) означает, что  $U(1)_A$  симметрия не является симметрией теории. Отсюда следует физическое объяснение тому (для  $n_f = 2$ ), что  $\eta$  не имеет свойств голдстоуновского бозона.

Т' Хоофт, используя квазиклассические методы, исследовал  $v \neq 0$  переходы. Он рассматривал переход из  $n$ -вакуума при  $t = -\infty$  в  $(n + v)$ -вакуум при  $t = +\infty$  как туннельный переход и оценил вероятность туннелирования в методе *WKB*

$$A[v] \sim e^{-S_E[v]}, \quad (5.64)$$

где  $S_E$  – минимальное евклидово действие калибровочной теории. Такое минимальное действие реализуется на полевых конфигурациях, называемых инстантонами (Белавин, Поляков, Шварц, Тупкин). Это самодуальные решения полевых уравнений в евклидовом пространстве  $[G_a^{\mu\nu} = \tilde{G}_a^{\mu\nu}]$ , и их действие связано с  $v$ . Для этих решений

$$S_E[v] = \frac{1}{4} \int d^4x_E G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_a^{\mu\nu} = \frac{8\pi^2}{g_3^2} v. \quad (5.65)$$

Как показал Т' Хоофт, константа связи, входящая в  $S_E[v]$ , – это «бегущая» константа связи, определяемая на характерном инстантонном масштабе. Для оценки амплитуды надо проинтегрировать по всем масштабам

$$A[v] \sim \int d\rho \exp\left[-\frac{2\pi v}{\alpha_3 \rho^{-1}}\right]. \quad (5.66)$$

В КХД из-за роста на больших масштабах квадрата константы связи  $\alpha_3 \rho^{-1}$  для инстантонов больших размеров нет дополнительного подавления в факторе туннелирования. Вследствие этого невозможно вычислить  $A[v]$ , но можно ожидать, что

$$A[v \neq 0] \sim A[0]. \quad (5.67)$$

Таким образом,  $U(1)_A$  не является симметрией КХД.

Многое из того, что обсуждалось выше, применимо к электрослабой теории. Однако, как мы увидим ниже, есть и существенное отличие. Поскольку электрослабая теория основана на группе  $SU(2) \times U(1)$ , то наличие  $SU(2)$  фактора ведет к нетривиальной вакуумной структуре.  $\tilde{W}$  плотность связана с разностью индекса и с дивергенцией  $(B + L)$  тока

$$\partial_\mu J_{B+L}^\mu = -\frac{g_2^2}{16\pi^2} N_g W_i^{\mu\nu} \tilde{W}_{i\mu\nu}. \quad (5.68)$$

Следовательно, изменение в  $(B+L)$  электрослабой теории тоже связано со слабым индексом  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \Delta(B+L) &= \int d^4x \partial_\mu J_{B+L}^\mu = \\ &= -\frac{g_2^2}{16\pi^2} N_g \int d^4x W_i^{\mu\nu} \tilde{W}_{i\mu\nu} = -2N_g \nu. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Заметим, что для трех поколений ( $N_g=3$ ) минимальное нарушение  $(B+L)$  пока составляет  $[\Delta(B+L)] = 6$ . Поэтому, если даже барионное число нарушено, в стандартной модели процесс  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ , который соответствует  $[\Delta(B+L)] = 2$ , остается подавленным! Гораздо важнее, однако, что амплитуда  $(B+L)$  нарушения чрезвычайно мала. Эта амплитуда, по крайней мере квазиклассически, задается тем же способом, как в КХД (и заменой  $\alpha_3 \rightarrow \alpha_2$ ). Однако, из-за нарушения электрослабой симметрии, интегрирование по инстансионным размерам обрезается на величине  $\nu$  (или на масштабе импульсов порядка  $M_z$ ), т.е.

$$A[\nu]_{(B+L) \sim \text{наруш.}} \sim \exp\left[-\frac{2\pi\nu}{\alpha_2(M_z)}\right] \sim 10^{-80\nu}. \quad (5.70)$$

Заметим, несмотря на то, что этот фактор пренебрежимо мал, в ранней Вселенной  $(B+L)$  нарушение в электрослабой теории может быть важным. Кузьмин, Рубаков и Шапошников показали, что в температурной среде калибровочные конфигурации, связанные с  $(B+L)$  нарушающими процессами, определяются не фактором тунелирования, а больцмановским фактором. Вблизи фазовых переходов больцмановский фактор стремится к единице, и  $(B+L)$  нарушающие процессы становятся неподавленными.

#### 5.4. Сильная CP проблема

$\theta$ -вакуум КХД является новым источником CP- нарушения. Что касается эквивалентного  $\theta$  параметра в электрослабой теории, то он

может быть исключен вследствие киральной природы этих взаимодействий.

В КХД же лагранжиан эффективного взаимодействия

$$L_{CP-\text{наруш.}} = \theta \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}, \quad (5.71)$$

отражающий присутствие вакуумного угла. Однако ситуация из-за электрослабых взаимодействий несколько усложняется. Напомним, что кварковые массовые матрицы, возникающие при спонтанном нарушении  $SU(2) \times U(1)$ , не являются ни эрмитовыми, ни диагональными

$$L_{\text{масс}} = -\bar{q}_{Li} M_{ij} q_{Rj} - q_{Ri} (M^+)_{ij} q_{Lj}. \quad (5.72)$$

Эти матрицы диагонализуются при соответствующих унитарных преобразованиях кварковых полей

$$q_R \rightarrow q_{R'} = U_R q_R; \quad q_L \rightarrow q'_L = U_L q_L. \quad (5.73)$$

Легко проверить, что часть этих преобразований включает  $U(1)_A$  преобразование. Действительно,  $U(1)_A$  часть этих преобразований

$$\begin{aligned} q_R \rightarrow q'_R &= \exp \left[ \frac{i}{2n_f} \text{Arg det } M \right] q_R \equiv \exp \left[ \frac{i}{2} \alpha \right] q_R; \\ q_L \rightarrow q'_L &= \exp \left[ -\frac{i}{2n_f} \text{Arg det } M \right] q_L \equiv \exp \left[ -\frac{i}{2} \alpha \right] q_L. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Оказывается, что такие  $U(1)_A$  преобразования вызывают изменение вакуумного угла, т.е. вносят вклад в выражение (5.71), помимо КХД угла  $\theta$ .

Чтобы прояснить это заключение, следует более внимательно исследовать результат кирального  $U(1)_A$  преобразования. Хотя ток  $J_5^\mu$ , связан с  $U(1)_A$  аномалией, всегда оказывается возможным построить сохраняющийся ток, используя ток  $K^\mu$ , входящий в тождество Бардина. Обращаясь к соотношениям (5.53) и (5.62), находим желаемый сохраняющийся киральный ток

$$\tilde{J}_5^\mu = J_5^\mu - \frac{n_f \alpha_3}{4\pi} K^\mu. \quad (5.75)$$

Заряд, генерируемый киральными преобразованиями  $\tilde{Q}_5$ , должен быть независимым от времени, и он связан с  $J_5^\mu$  сохраняющимся током

$$\tilde{Q}_5 = \int d^3x \tilde{J}_5^0. \quad (5.76)$$

Хотя  $\tilde{Q}_5$  не зависит от времени, этот заряд неинвариантен относительно калибровочных преобразований, поскольку  $K^\mu$  не является калибровочно-инвариантным током. Найдем

$$\Omega_1 \tilde{Q}_5 \Omega_1 = \Omega_1 \left[ Q_5 - \frac{n_f \alpha_3}{4\pi} \int d^3x K^0 \right] \Omega_1 = Q_5 + n_f. \quad (5.77)$$

Рассмотрим действие большого калибровочного преобразования  $\Omega_1$  на кирально-вращательный  $\theta$ -вакуум  $e^{i\alpha\tilde{Q}_5} |\theta\rangle$ . Получаем

$$\Omega_1 \left[ e^{i\alpha\tilde{Q}_5} |\theta\rangle \right] = \Omega_1 e^{i\alpha\tilde{Q}_5} \Omega_1^{-1} \Omega_1 |\theta\rangle = e^{i(\alpha n_f + \theta)} \left[ e^{i\alpha\tilde{Q}_5} |\theta\rangle \right]. \quad (5.78)$$

Отсюда видно, что киральное  $U(1)_A$  вращение действительно сдвигает вакуумный угол

$$e^{i\alpha\tilde{Q}_5} |\theta\rangle = |\theta + \alpha n_f\rangle. \quad (5.79)$$

Для электрослабой теории киральное вращение, необходимое для диагонализации кварковых массовых матриц, имеет параметр  $\alpha = \frac{1}{n_f} \det M$ . Таким образом, эффективный  $CP$ -нарушающий ла-

гранжиан, возникающий из структуры калибровочной теории вакуума, имеет вид

$$L_{CP\text{-нар}}^{\text{эф}} = \bar{\theta} \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}, \quad (5.80)$$

$$\text{где} \quad \bar{\theta} = \theta + \text{Arg det } M. \quad (5.81)$$

Эффективный  $CP$ -нарушающий параметр  $\bar{\theta}$  есть сумма КХД вклада (вакуумный угол  $\theta$ ) и электрослабой части ( $\text{Arg det } M$ ), связанной со структурой кварковой массовой матрицы.

Взаимодействия (5.80)  $C$  – четны,  $T$  и  $P$  – нечетны. Таким образом, они нарушают  $CP$ -инвариантность.

Как будет видно ниже, несмотря на то, что  $\bar{\theta}$  очень мал ( $\bar{\theta} < 10^{-10}$ ), это взаимодействие индуцирует электрический дипольный момент нейтрона. Трудно понять, почему параметр  $\bar{\theta}$ , который представляет собой сумму двух очень различных вкладов, оказывается столь малым. В этом состоит суть так называемой сильной  $CP$ -проблемы.

Прежде чем обсуждать дальше сильную  $CP$  проблему, рассмотрим, как с помощью эффективного лагранжиана (5.80) найти электрический дипольный момент нейтрона. Это легко сделать, трансформируя  $\theta$ -взаимодействие, включающее глюоны, во взаимодействие, содержащее кварки.

Для простоты остановимся на случае двух ароматов ( $n_f = 2$ ) и положим  $m_u = m_d = m_q$ . Тогда киральное  $U(1)_A$  преобразование

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \exp \left[ i \frac{\bar{\theta} \gamma^5}{4} \right] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

вносит вклад в  $\bar{\theta} G \tilde{G}$  член. Однако преобразование (5.82) будет в то же время генерировать  $CP$ -нарушающий  $\gamma^5$ -зависящий массовый член для  $u$  и  $d$ -кварков

$$L_{CP-\text{нар}}^{\text{эф}} = i \bar{\theta} m_q \left[ \bar{u} \frac{\gamma^5}{2} u + \bar{d} \frac{\gamma^5}{2} d \right]. \quad (5.83)$$

Этот лагранжиан можно непосредственно использовать для вычисления электрического дипольного момента нейтрона

$$d_n \bar{n} \sigma_{\mu\nu} K^\nu \gamma_5 n = |n\rangle T \left( J_\mu^{\text{электр}} i \int d^4 x L_{CP-\text{нар}}^{\text{эф}} |n\rangle \right). \quad (5.84)$$

Чтобы найти  $d_n$ , нужно вставить полный набор состояний  $|x\rangle$  в матричный элемент (5.84) и попытаться определить, какой набор состояний  $|x\rangle$  доминирует. В литературе существуют два подхода к этой проблеме. В одном из них для  $|x\rangle$  используются нечетные  $|N_{1/2}\rangle$  состояния, связанные с нейтроном посредством лагранжиана  $L_{CP-\text{нар}}^{\text{эф}}$ .

В другом подходе в качестве набора  $|x\rangle$  выбираются состояния мягких пионов  $|x\rangle \sim |N_{\pi \text{ soft}}\rangle$ . Результаты этих вычислений весьма похожи и дают следующие значения:

$$d_n \sim \frac{e}{M_n} \left( \frac{m_q}{M_n} \right) \bar{\theta} \sim \left\{ \begin{array}{l} 2.7 \cdot 10^{-16} \bar{\theta} e \cdot \text{см} \quad (|x\rangle = |N_{1/2}^-\rangle) \\ 5.2 \cdot 10^{-16} \bar{\theta} e \cdot \text{см} \quad (|x\rangle = |N_{\pi}\rangle) \end{array} \right\}. \quad (5.85)$$

Экспериментальное ограничение

$$d_n < 1.1 \cdot 10^{-25} e \cdot \text{см} \quad (5.86)$$

Таким образом, чтобы избежать противоречия с экспериментом, параметр  $\bar{\theta}$  должен быть меньше  $2 \cdot 10^{-10}$ . Почему этот параметр столь мал?

## 5.5. Киральное решение сильной CP – проблемы

В 1977 г. Рессей & Quinn предложили динамическое решение сильной CP-проблемы. Они предположили, что лагранжиан стандартной модели был инвариантен относительно дополнительной  $U(1)$  киральной симметрии – симметрии  $U(1)_{PQ}$ . Это допущение предполагает определенные ограничения на хиггсовский спектр теории, во всем же другом не встречает особых проблем. Поскольку  $U(1)_{PQ}$  симметрия – киральная симметрия, то предположение о том, что она была точной, исключает  $\bar{\theta} G \tilde{G}$  член, поскольку ки-

ральное вращение  $\exp \left[ -i \frac{\theta}{n_f} \tilde{Q}_5^{PQ} \right]$  дает

$$\exp \left[ -i \frac{\theta}{n_f} \tilde{Q}_5^{PQ} \right] |\bar{\theta}\rangle = |0\rangle. \quad (5.87)$$

Итак, под действием  $U(1)_{PQ}$  преобразования эффективный вакуумный угол  $\bar{\theta}$  обращается в ноль, и этот параметр больше в теории не присутствует. Однако, если  $U(1)_{PQ}$  является дополнительной глобальной симметрией стандартной модели, то невозможно, чтобы она оставалась ненарушенной. Рессей & Quinn показали, что да-

же если  $U(1)_{PQ}$  спонтанно нарушена,  $\bar{\theta}G\tilde{G}$  член исключается. Чтобы это увидеть, надо сконцентрироваться на ассоциированном намбу-голдстоуновском бозоне, который возникает при спонтанном нарушении  $U(1)_{PQ}$  симметрии. Эта частица называется аксионом. Это название было введено Вайнбергом и Вилчеком в связи с  $U(1)_{PQ}$  симметрией. Однако оказалось, что аксион не полностью безмассовый, т.е. это псевдо-намбу-голдстоуновский бозон. Это следствие  $U(1)_{PQ}$  симметрии, имеющей аномалию вследствие КХД взаимодействий. Масса аксиона

$$m_\Lambda \sim \frac{\Lambda_{\text{КХД}}^2}{f}, \quad (5.88)$$

где  $\Lambda_{\text{КХД}}$  – типичный масштаб КХД взаимодействий,  $f$  – масштаб  $U(1)_{PQ}$  нарушения. Если  $f \gg \Lambda_{\text{КХД}}$ , то аксион оказывается гораздо легче обычных адронов. Если обозначить аксионное поле через  $a(x)$ , то использование  $U(1)_{PQ}$  симметрии в стандартной модели сводится к замещению  $CP$ -нарушающего  $\bar{\theta}$  параметра динамически  $CP$ -сохраняющим аксионным полем

$$\bar{\theta} \rightarrow \frac{a(x)}{f}. \quad (5.89)$$

Чтобы понять, почему так происходит, следует напомнить, что аксионное поле намбу-голдстоуновского бозона нарушенной  $U(1)_{PQ}$  симметрии при  $U(1)_{PQ}$  преобразовании изменяется следующим образом:

$$a(x) \xrightarrow{U(1)_{PQ}} a(x) + \alpha f, \quad (5.90)$$

где  $\alpha$  – параметр, ассоциированный с  $U(1)_{PQ}$  преобразованием. Из-за свойства (5.90) аксионное поле может войти в лагранжиан лишь через производную.

Учитывая дополнительные вклады в лагранжиан за счет аксионного поля, получаем эффективный лагранжиан



$$\begin{aligned}
L_{\text{ст.мод}}^{\text{эф}} = & L_{\text{ст.мод}} + \bar{\theta} \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a + \\
& + L_{\text{аксион}}^{\text{взаим}} \left[ \frac{\partial^\mu a}{f}; \psi \right] + \frac{a}{f} \varsigma \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{5.91}$$

В этом выражении третье слагаемое – кинетический член аксионного поля, четвертое слагаемое – схематически записанные взаимодействия аксионного поля с другими полями теории. Последнее же слагаемое в (5.91) не содержит производной от аксионного поля, нарушая тем самым обычные ожидания для нambu-голдстоуновских полей. Причина включения этого слагаемого в выражение (5.91) очевидна.  $U(1)_{PQ}$  симметрия аномальна

$$\partial^\mu J_{PQ}^\mu = \varsigma \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} , \tag{5.92}$$

где, как и в (5.91),  $\varsigma$  – модельно независимое число  $\sim 0(5.)$ . Аномалия (5.92) при киральном  $U(1)_{PQ}$  преобразовании отражается в эффективном лагранжиане (5.91). Это гарантировано наличием последнего слагаемого в выражении (5.91). Это слагаемое, связанное с киральной аномалией, содержит аксионное поле (а не его производную), является потенциалом аксионного поля. В результате получается, что допустимы не все значения вакуумных средних (VEV) аксионного поля. Минимум  $V_{\text{эф}}$  соответствует

$$\left\langle \frac{\partial V_{\text{эф}}}{\partial a} \right\rangle = - \frac{\varsigma}{f} \frac{\alpha_3}{8\pi} \left\langle G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} \right\rangle \Big|_{\langle a \rangle \neq 0} . \tag{5.93}$$

Рессеi & Quinn показали, что периодичность  $\langle G\tilde{G} \rangle$  по вакуумному углу  $\theta_{\text{эф}}$  в лагранжиане (5.91)

$$\theta_{\text{эф}} = \bar{\theta} + \frac{\varsigma}{f} \langle a(x) \rangle , \tag{5.94}$$

требует, чтобы  $\theta_{\text{эф}} = 0$  или

$$\langle a(x) \rangle = - \frac{f}{\varsigma} \bar{\theta} . \tag{5.95}$$

Как следствие (5.95) получаем, что только физическое аксионное поле:

$$a(x)_{\text{физич}} = a(x) - \langle a(x) \rangle, \quad (5.96)$$

взаимодействует с напряженностями глюонного поля, исключая при этом  $\theta G\tilde{G}$  член.

Таким образом, использование дополнительной  $U(1)_{PQ}$  симметрии и ее нарушения позволяет решить сильную CP-проблему.

Как уже отмечалось выше, из-за аномалии  $U(1)_{PQ}$  тока, аксион оказывается массивным. Это видно из эффективного лагранжиана (5.91). Вторая производная эффективного потенциала, вычисленная при минимальном значении  $\langle a(x) \rangle$  дает для квадрата массы аксиона

$$m_a^2 = \left\langle \frac{\partial^2 V_{\text{эф}}}{\partial a^2} \right\rangle_{\langle a \rangle} = -\frac{\zeta}{f} \frac{\alpha_3}{8\pi} \frac{\partial}{\partial a} \left\langle G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} \right\rangle_{\langle a \rangle} \sim \frac{\Lambda_{\text{КХД}}^2}{f}. \quad (5.97)$$

Очевидно, что эффективная теория, включающая  $U(1)_{PQ}$  и аксион, не содержит сильной CP-проблемы. Однако остается прямое взаимодействие массивного аксионного поля с глюонной псевдоскалярной плотностью

$$L_{\text{ст.мод}}^{\text{эф}} = L_{\text{ст.мод}} + L_{\text{аксион}}^{\text{взаим}} \left[ \frac{\partial_\mu a_{\text{физ}}}{f}; \psi \right] - \\ - \frac{1}{2} \partial_\mu a_{\text{физ}} \partial^\mu a_{\text{физ}} - \frac{1}{2} m_a^2 a_{\text{физ}}^2 + \frac{a_{\text{физ}}}{f} \zeta \frac{\alpha_3}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}. \quad (5.98)$$

Как очевидно из этого лагранжиана, аксионная физика зависит от масштаба  $U(1)_{PQ}$  нарушения  $f$ . В первоначальной работе Рессеи & Quinn ассоциировали  $f$  с масштабом электрослабого нарушения симметрии  $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ . Для учета  $U(1)_{PQ}$  симметрии они ввели в стандартную модель два хиггсовских дублета  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  с разными  $U(1)_{PQ}$  зарядами. Аксионное поле оказывается общей фазой полей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которое относится к слабому гиперзаряду. Разделяя вклады  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

$$\Phi_1 = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \exp \left[ ix \frac{a}{f} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_2 = \frac{V_2}{\sqrt{2}} \exp \left[ i \frac{a}{xf} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (5.99)$$

где  $x = \frac{v_2}{v_1}$  отношение двух VEV хиггсовских полей, получаем, что масштаб нарушения  $U(1)_{PQ}$  симметрии

$$f = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} \approx 250 \text{ ГэВ}. \quad (5.100)$$

Поле  $\Phi_1$  имеет слабый гиперзаряд  $(-1/2)$ , а поле  $\Phi_2$  – слабый гиперзаряд  $(+1/2)$ . Следовательно, в юкавских взаимодействиях  $\Phi_1$  связывает  $u_{Rj}$  поля с левыми кварковыми дублетами, а  $\Phi_2$  связывает  $d_{Rj}$  с этими же полями:

$$L_{\text{юкав}} = -\Gamma_{ij}^u (\bar{u}, \bar{d})_{Lj} \Phi_1 u_{Rj} - \Gamma_{ij}^d (\bar{u}, \bar{d})_{Lj} \Phi_2 d_{Rj} + \text{э.с.} \quad (5.101)$$

В силу соотношения (5.99), очевидно, что эти взаимодействия  $U(1)_{PQ}$  инвариантны. Сдвиг аксионного поля на  $\alpha_f$  (5.90) при  $U(1)_{PQ}$  преобразовании компенсируется соответствующим вращением правых кварковых полей. При  $U(1)_{PQ}$  преобразовании имеем

$$a_{\text{физич}} \xrightarrow{PQ} a_{\text{физич}} + \alpha_f; \quad u_{Rj} \xrightarrow{PQ} \exp[-i\alpha x] u_{Rj}; \quad d_{Rj} \xrightarrow{PQ} \exp\left[-i \frac{\alpha}{x}\right] d_{Rj}. \quad (5.102)$$

Отсюда очевидно, что  $U(1)_{PQ}$  преобразование сопровождается  $U(1)_A$  преобразованием. В результате  $\bar{\theta} \rightarrow 0$ , как уже не раз отмечалось.

К сожалению, слабый масштаб для аксионов (при  $f \approx 250$  ГэВ  $m_a \approx 100$  кэВ) исключен экспериментально. Если бы аксион существовал на слабом масштабе, то бренчинг распада  $K^\pm \rightarrow \pi^\pm a$  составлял бы

$$Br(K^\pm \rightarrow \pi^\pm a) \approx 3 \cdot 10^{-5}. \quad (5.103)$$

Экспериментально, однако процесс  $K^\pm \rightarrow \pi^\pm + (\text{ничего})$  имеет бренчинг на три порядка ниже:

$$Br(K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \text{ничего}) < 3.8 \cdot 10^{-8} \quad (5.104)$$

Хотя аксионы на слабом масштабе не существуют, сильная СР-проблема решается благодаря существованию  $U(1)_{PQ}$  симметрии. Динамическое стремление  $\bar{\theta} \rightarrow 0$  происходит независимо от масштаба  $f$ , на котором происходит спонтанное нарушение  $U(1)_{PQ}$ . Очевидно, если  $f = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ , то аксион чрезвычайно легкий ( $m_a \sim \Lambda_{\text{КХД}}^2 / f$ ), исключительно слабо связанный (константа связи  $\sim 1/f$ ), очень долгоживущий ( $\tau_a \sim f^5$ ), т.е. практически невидимый.

Если  $f = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ , то очевидно, что спонтанное нарушение  $U(1)_{PQ}$  должно происходить посредством VEV поля, которое является  $SU(2) \times U(1)$  синглетом. Поэтому в моделях невидимого аксиона – это фаза, связанная с  $SU(2) \times U(1)$  синглетным полем  $\sigma$ . Оставляя только одну аксионную степень свободы

$$\sigma = \frac{f}{\sqrt{2}} e^{ia/f}. \quad (5.105)$$

Оказывается, что астрофизика и космология дают важные ограничения на величину масштаба  $f$   $U(1)_{PQ}$  нарушения или, эквивалентно, массу аксиона

$$m_a \approx 6 \left[ \frac{10^6 \text{ ГэВ}}{f} \right] \text{ЭВ}. \quad (5.106)$$

Эти ограничения определяют пространство параметров моделей невидимого аксиона.

## 5.6. Существует ли реальный намбу-голдстоуновский бозон?

Уже около 50 лет известно, что при нарушении глобальной группы симметрии  $G$  до подгруппы  $H$  [ $G \rightarrow H$ ] в спектре теории появляется  $\dim(G/H)$  безмассовых намбу-голдстоуновских бозонов. Однако мы не имеем реальных физических примеров этого явления. Пожалуй, пионы являются замечательным примером состоя-

ний почти намбу-голдстоуновских бозонов. Несмотря на то, что пионы – намбу-голдстоуновские возбуждения, ассоциированные с нарушением  $SU(2)_V \times SU(2)_A$ -приближенной глобальной симметрии КХД до группы  $SU(2)_V$ , пионы имеют массу, поскольку  $u$  и  $d$  – кварки не являются безмассовыми.

Кажется невозможным, чтобы реальный физический намбу-голдстоуновский бозон существовал в природе. Аргумент в пользу этого утверждения достаточно простой. Поскольку эти частицы безмассовые, их существование становится под сомнение тем, что единственные дальнедействующие силы, известные в природе, – это гравитация и электромагнетизм. Однако еще в 1980-х годах было осознано, что намбу-голдстоуновские бозоны с массой  $m = 0$  не приводят к отмеченному выше противоречию, и вполне можно рассматривать возможность физического существования таких состояний.

Эта идея возникла в результате исследования возможности спонтанного нарушения лептонного числа. намбу-голдстоуновский бозон, связанный со спонтанным нарушением лептонного числа был назван майороном. Вскоре Вилчек рассмотрел теорию, в которой глобальное число, характеризующее поколение, тоже спонтанно нарушено. Соответствующий намбу-голдстоуновский бозон был назван фамилоном. Объяснение, почему намбу-голдстоуновские бозоны не вступают в противоречие с современными ограничениями на дополнительные дальнедействующие взаимодействия, основано на теореме [Gelmini, Nussinov, Yanagida], утверждающей, что обмен намбу-голдстоуновскими бозонами приводит только к дальнедействующим тензорным силам.

Доказательство этой теоремы довольно простое. Нас будет интересовать потенциал, создаваемый обменом намбу-голдстоуновским бозоном между двумя фермионами. Напомним, что намбу-голдстоуновское бозонное поле  $\pi$  испытывает сдвиг при нарушающих симметрию преобразованиях

$$\pi(x) \xrightarrow{\zeta} \pi(x) + v_\pi \zeta. \quad (5.107)$$

В этом выражении  $\zeta$  – параметр из  $G/H$ ,  $v_\pi$  – масштабный параметр, связанный с нарушением рассматриваемой симметрии.

Вследствие свойств (5.107), намбу-голдстоуновские поля всегда имеют связи через производные. Следовательно, наиболее общий вид связи намбу-голдстоуновского бозона  $\pi$  с двумя фермионами  $f_1$  и  $f_2$  имеет вид

$$L_{NGB}^{\text{ферм}} = i \frac{\partial_\mu \pi}{v_\pi} \bar{f}_1 [a \gamma_\mu + b \gamma_\mu \gamma_5] f_2 + \text{э.с.}, \quad (5.108)$$

где  $a$  и  $b$  – численные коэффициенты. Если использовать уравнение движения для фермионов, то (5.108) сводится к более полезной форме, содержащей  $\pi$  поле

$$L_{NGB} = \frac{\pi}{v_\pi} \bar{f}_1 [a(m_1 - m_2) + b(m_1 + m_2) \gamma_5] f_2 + \text{э.с.} \quad (5.109)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы фермионных полей  $f_1$  и  $f_2$ .

При вычислении потенциала, вызванного  $\pi$ -обменом между двумя фермионами, нужно использовать лагранжиан (5.109) для каждой вершины при  $f_1 = f_2$ . Очевидно, что для двух одинаковых фермионов эффективная связь намбу-голдстоуновского бозона всегда будет псевдоскалярной связью. Таким образом, обмен намбу-голдстоуновским бозоном не будет генерировать когерентные дальнедействующие силы, так как псевдоскалярная связь в нерелятивистском пределе сводится к  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  связи. Более точно, эффективная диагональная связь намбу-голдстоуновского бозона  $\pi$  с фермионом  $f$  определяется лагранжианом

$$L_{NGB}^{\text{диаг}} = i g_\pi \frac{m_f}{v_\pi} \bar{f} \gamma_5 f \pi, \quad (5.110)$$

где  $g_\pi$  – безразмерная константа связи. В нерелятивистском пределе (5.110) сводится к лагранжиану

$$L_{NGB}^{\text{диаг}} \rightarrow g_\pi \chi_f^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{V}}{v_\pi} \chi_f \pi, \quad (5.111)$$

где  $\chi_f$  – спинор Паули.

Такое взаимодействие приводит к тензорному обменному потенциалу между двумя фермионами, который зависит от спина и ведет себя как  $\sim 1/r^3$ , а не  $1/r$

$$V_{NGB\text{-обмен}}^{\text{эф}} = \frac{g_\pi^2 / 4\pi}{v_\pi^2} \left\{ \frac{\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 - 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r})}{r^3} + \frac{4\pi}{3} \delta^3(r) \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \right\}. \quad (5.112)$$

В литературе имеются попытки оценить величину возможных немагнитных диполь-дипольных взаимодействий в среде, возникающих при обмене реальным нambu-голдстоуновским бозоном. Чтобы не противоречить эксперименту, необходимо считать

$$\frac{v_\pi}{g_\pi} \geq 1 \text{ ТэВ}. \quad (5.113)$$

Таким образом, на масштабах, не слишком превышающих электро-слабый масштаб, допустимо существование реальных нambu-голдстоуновских бозонов, связанных со спонтанным нарушением

глобальных симметрий! Если же  $\frac{v_\pi}{g_\pi}$  гораздо больше (5.113), то

вряд ли следует ожидать каких либо проявлений нambu-голдстоуновского бозона.

## 5.7. Майорон

Проиллюстрируем сказанное выше примером спонтанного нарушения лептонного числа и связанного с ним майорона. Как уже отмечалось выше, лептонное число – это классическая глобальная симметрия стандартной модели. Даже на квантовом уровне, поскольку амплитуды  $v \neq 0$  сильно подавлены, лептонное число остается почти точной симметрией. Однако нет причин считать, что эта симметрия остается, если рассматриваются расширения стандартной модели. Действительно, в простейшем расширении стандартной модели – для каждого семейства вводятся правые нейтринные поля  $\nu_{Ri}$ . Поскольку эти поля являются  $SU(2) \times U(1)$  синглетами, то можно записать майорановский (фермион-фермионный) массовый член, содержащий эти поля

$$L_{\text{масс}} = \frac{-(M_R)_{ij}}{2} \nu_{Ri}^T C \nu_{Rj} + \text{э.с.}, \quad (5.114)$$

где  $C$  – матрица зарядового сопряжения, уже использованная нами ( $C=1$  в майорановском представлении). Очевидно, что в  $L_{\text{масс}}$  лептонное число не представлено, поскольку два его члена несут, соответственно, лептонные числа  $(+2)$  и  $(-2)$ .

Можно, однако, в этом примере восстановить лептонное число как симметрию, вводя и соответствующим образом трансформируя хиггсовское поле. Для этого необходимо комплексное  $SU(2) \times U(1)$  синглетное поле  $\sigma$ , несущее лептонное число  $(-2)$ . Очевидно, что лагранжиан имеет вид

$$L = -\frac{h_{ij}}{\sqrt{2}} \left[ v_{Ri}^T C v_{Rj} \sigma + \text{э.с.} \right], \quad (5.115)$$

при этом лептонное число сохраняется. Если динамика системы приводит к тому, что  $\sigma$  приобретает  $\text{VEV} \langle \sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} V$ , то лагранжиан (5.115) будет содержать майорановский массовый член для правых нейтринных полей. В этом случае находим

$$(M_R)_{ij} = h_{ij} V, \quad (5.116)$$

и лептонное число спонтанно нарушено. Следовательно, теория должна содержать намбу-голдстоуновский бозон – майорон.

Как и в случае аксиона, майоран можно идентифицировать с фазой поля, связанной  $i$  с комплексным полем  $\sigma$ , т.е. поле  $\sigma$  представляется в виде

$$\sigma \approx \frac{V}{\sqrt{2}} e^{i\chi/V}, \quad (5.117)$$

где  $\chi$  – майорон.

Если бы взаимодействие (5.115) было единственным взаимодействием, которое имеют  $v_{Ri}$  поля, то очевидно, что  $\chi$  был бы связан только с этими полями. Однако, вводя правые нейтринные поля, нельзя избежать связи  $v_{Ri}$  посредством обычного хиггсовского дублетного поля, с обычными лептонными дублетными полями  $(v, e)_{Li}$ . В результате этих связей майорановское поле  $\chi$  будет иметь взаимодействие с левыми нейтринными полями. Однако, если правая майорановская масса  $M_R$  (или, эквивалентно,  $\text{VEV}$   $\sigma$ -поля) ве-



лика, то майорон будет, главным образом, связан с правыми нейтрино.

Рассмотрим более детально, как это происходит. В результате спонтанного нарушения как лептонного числа, так и  $SU(2) \times U(1)$  симметрии, нейтринные поля приобретают как дираковский (фермион-антифермионный), так и майорановский массовый член

$$L_{\text{масс}} = -\frac{1}{2}(M_R)_{ij}[\nu_{Ri}^T \nu_{Rj}] - (M_D)_{ij}[\bar{\nu}_{Li} \nu_{Rj}] + \text{э.с.} \quad (5.118)$$

с дираковской массовой матрицей, пропорциональной дублетному хиггсовскому вакуумному среднему. Если собственные значения  $M_R$  гораздо больше  $M_D$ , тогда нейтринная массовая матрица

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

содержит набор больших собственных значений, соответствующих собственным значениям  $M_R$ , и набор чрезвычайно малых собственных значений, ассоциированных с матрицей  $M_D^2 / M_R$ . В этом состоит знаменитый “see-saw” механизм (Yanagida et.al., 1979). В результате получается спектр нейтрино, содержащий как сверхтяжелые, так и чрезвычайно легкие состояния:

$$L_{\text{масс}} \approx -\frac{1}{2} \left[ \frac{M_D^2}{M_R} \right]_{ij} \bar{\eta}_{1i} \eta_{1j} - \frac{1}{2} [M_R]_{ij} \bar{\eta}_{2i} \eta_{2j}. \quad (5.120)$$

Легкие нейтрино  $\eta_{1i}$ , главным образом, – левые, а тяжелые нейтрино  $\eta_{2i}$  – правые. Хотя поле  $\chi$ , в основном, связано с тяжелыми полями  $\eta_{2i}$ , существует слабая связь  $\chi$  с полями  $\eta_{1i}$ . Таким образом, майорон, как результат смешивания масс нейтрино, имеет слабую связь с обычными левыми нейтрино

$$L_{\text{майор}}^{\text{взаим}} = -\frac{h_{ij}}{2} \bar{\eta}_{2i} i\gamma_5 \eta_{2j} \chi - \left( \frac{h M_D^2}{M_R^2} \right) \bar{\eta}_{1i} i\gamma_5 \eta_{2j} \chi. \quad (5.121)$$

Майороновская связь с легкими нейтрино  $\sim M_D^2 / M_R^2 \sim \frac{m_v}{M_R}$ , где

$m_v$  – масса легкого нейтрино. Майорон имеет еще более слабую

связь с обычной материей из-за смешивания  $\chi$  с  $Z^0$  на однопетлевом уровне

$$L_{\text{материя}}^{\text{эф}} = i \frac{m_f}{V_\chi} \bar{f} \gamma_5 f \chi, \quad (5.122)$$

где масштаб  $V_\chi \approx (G_F m_\nu)^{-1} \gg \text{ТэВ}$ . Очевидно, что майорон в этой модели легко удовлетворяет ограничению на диполь-дипольные взаимодействия в среде. Если майорон существует, то оказывается возможным распад наиболее тяжелого из легких нейтрино на другие нейтрино с испусканием майорона. Если процесс  $\nu_i \rightarrow \nu_j \chi$  был бы достаточно быстрым, то он мог бы открыть область нейтринных масс, подавленных космологией. Для стабильных нейтрино известно, что их массы в интервале от нескольких электронвольт до нескольких гига электронвольт исключены космологическими данными. Однако это рассмотрение не применимо для нестабильных нейтрино. Если время жизни по отношению к распаду  $\nu_i \rightarrow \nu_j \chi$  гораздо меньше времени жизни Вселенной  $T_0$ , то можно ожидать красного смещения энергии  $\nu_i$  за массу  $m_{\nu_i}$ . Следовательно, вклад таких нейтрино в плотность энергии Вселенной

$$\rho_{\nu_i} \sim m_{\nu_i} \left[ \frac{\tau}{T_0} \right]^{1/2} T_\nu^3, \quad (5.123)$$

где  $T_\nu$  – современная нейтринная температура  $T_\nu \sim T_\gamma \sim 3 \text{ К}$ .

## 5.8. Глобальные симметрии и гравитация

Выше обсуждались различные глобальные симметрии взаимодействий в стандартной модели, однако необходимо рассмотреть роль гравитационных взаимодействий. По-видимому, наиболее простой способ убедиться в том, что гравитационные взаимодействия способны привести к серьезным проблемам – это обратиться к “no-hair” теореме для черных дыр. Эта теорема (Banks, 1990) утверждает, что черные дыры могут характеризоваться только несколькими фундаментальными величинами (массой, спином), но не

обладают другими квантовыми числами. Поскольку черные дыры способны поглощать частицы, несущие глобальный заряд, не неся при этом глобального заряда, то очевидно, что эти процессы сопровождаются нарушением симметрии, ассоциированной с этими глобальным зарядом.

Можно параметризовать эффект нарушения глобальных симметрий гравитационными взаимодействиями, добавив к низкоэнергетическому лагранжиану неперенормируемые члены, содержащие обратные степени планковской массы  $M_{Pl} \sim 10^{19}$  ГэВ. Эти члены должны быть построены так, чтобы точно нарушать рассматриваемые симметрии. Итак, полный лагранжиан теории, помимо вклада стандартной модели, будет включать эффективные неперенормируемые взаимодействия, содержащие операторы  $O_n$ , нарушающие глобальные симметрии стандартной модели

$$L_{\text{грав.взаим}}^{\text{эф}} = \sum_n \frac{O_n}{M_{Pl}^n}. \quad (5.124)$$

В этом лагранжиане размерность операторов  $O_n$  равна  $n + 4$ .

Поскольку  $M_{Pl} \sim 10^{19}$  ГэВ  $\gg (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \sim 250$  ГэВ, то наивно можно было бы ожидать, что взаимодействие (5.124) важно только на сверхтяжелых масштабах. Это утверждение оказывается правильным для взаимодействий самих по себе, но неверным при рассмотрении влияния взаимодействия (5.124) на нambu-голдстоуновский сектор. Чтобы продемонстрировать первое утверждение, рассмотрим пример  $(B+L)$  нарушения. Доминирующее  $d = 6$   $(B+L)$ нарушающее взаимодействие, индуцируемое гравитацией, схематически имеет следующую форму

$$L_{(B+L)\text{-наруш}} \sim \frac{1}{(M_{Pl})^2} u_i^c d_j u_k^c e f_{ijk}. \quad (5.125)$$

Такой лагранжиан приводит ко времени жизни протона в процессе  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ :

$$\tau(p \rightarrow e^+ \pi^0) \sim (M_p)^4 \sim 10^{46} \text{ лет}. \quad (5.126)$$

Это значение гораздо больше современного экспериментального ограничения на время жизни протона. Таким образом, нарушение

( $B+L$ ) вследствие гравитационных эффектов действительно несущественно.

Другая ситуация, однако, при рассмотрении нambu-голдстоуновского сектора. Обратимся снова к примеру спонтанного нарушения лептонного числа, сопровождаемого майороном. К сохраняющему лептонное число потенциалу, в котором  $SU(2) \times U(1)$  синглетное поле  $\sigma$  приобретает VEV, нужно добавить неперенормируемые, нарушающие лептонное число члены, индуцируемые гравитационными взаимодействиями. Простейший из таких членов содержит оператор размерности 5:

$$V_{\text{полн}} = \lambda \left( \sigma^+ \sigma - \frac{V^2}{2} \right)^2 - \frac{\lambda'}{M_{Pl}} (\sigma^+ \sigma)^2 [\sigma + \sigma^+]. \quad (5.127)$$

Первый член в этом потенциале инвариантен относительно преобразования лептонного числа  $\sigma \rightarrow e^{-2ia} \sigma$ . Однако это не так для второго члена, который  $\sim M_{Pl}^{-1}$ . Записывая, как и раньше

$$\sigma \approx \frac{V}{\sqrt{2}} \exp \left[ i \frac{\chi}{V} \right], \quad (5.128)$$

обнаруживаем, что эффект включения гравитационных поправок сводится к появлению массы нambu-голдстоуновского поля  $\chi$ . Масса майорона

$$m_\chi^2 = \frac{\lambda'}{2\sqrt{2}} V^2 \left( \frac{V}{M} \right). \quad (5.129)$$

Заметим, что величина массы майорона зависит от  $V$  – масштаба спонтанного нарушения лептонного числа. Например, если взять

$V \sim \text{ТэВ}$ , то  $m_\chi \sim V \left( \frac{V}{M_p} \right)^{1/2} \approx 10 \text{ КэВ}$ . Если  $V$  принимает большое

значение, то масса майорона растет

$$m_\chi \sim 10 \left[ \frac{V}{\text{ТэВ}} \right]^{3/2} \text{кэВ}. \quad (5.130)$$

Очевидно, если майорон массивный, то некоторые его свойства значительно изменяются. Например, может оказаться, что распад  $\nu_i \rightarrow \nu_j \chi$  будет кинематически подавленным. Конечно, такое воз-

можно только в предположении о нарушении симметрии лептонного числа оператором размерности 5. Если нарушение происходит за счет оператора размерности  $d$ , то масса майорона

$$m_\chi \sim V \left( \frac{V}{M_p} \right)^{\frac{d-4}{2}}, \quad (5.131)$$

т.е. с ростом  $d$  масса становится меньше.

Эти рассуждения вносят трудности в  $U(1)_{PQ}$  решение проблемы сильного  $CP$ -нарушения. Гравитационные эффекты не только дают вклад в массу аксиона, но и способны изменить КХД потенциал так, что  $\bar{\theta}$  не будет стремиться к нулю! Можно пояснить, что происходит с эффективным аксионным потенциалом как в отсутствии, так и в присутствии  $U(1)_{PQ}$  нарушающих гравитационных взаимодействий.

В отсутствие гравитации, физический эффективный гравитационный потенциал можно записать в виде

$$V_{\text{аксион}} = -\Lambda_{\text{КХД}}^4 \cos\left(\frac{a_{\text{физ}}}{f}\right). \quad (5.132)$$

Этот потенциал обладает условием периодичности по  $\left(\frac{a_{\text{физ}}}{f}\right)$ ,

имеет минимум при  $\langle a_{\text{физ}} \rangle = \bar{\theta}_{\text{эф}} = 0$  и приводит к массе аксиона  $m_a = \Lambda_{\text{КХД}}^2 / f$ .

Включение гравитационных взаимодействий состоит в добавлении к этому потенциалу операторов различных размерностей

$$\tilde{V}_{\text{акс.}} = -\Lambda_{\text{КХД}}^4 \cos\frac{a_{\text{физ}}}{f} - \frac{Cf^d}{M_{Pl}^{d-4}} \left[ \frac{a_{\text{физ}}}{f} - \delta \right]. \quad (5.133)$$

В этом выражении  $C$  – безразмерная константа,  $\delta$ - $CP$  – нарушающая фаза, которая входит посредством гравитационных взаимодействий. Потенциал (5.149) изменяет формулу для массы аксиона

$$m_a^2 \approx \frac{\Lambda_{\text{КХД}}^4}{f^2} + \frac{cf^{d-2}}{M_{Pl}^{d-4}}. \quad (5.134)$$

Для величины  $f$  в области значений, рассматриваемых в моделях невидимого аксиона, второе слагаемое в выражении (5.133) доминирует над КХД массой аксиона, если не окажется чрезвычайно малой, и (или) размерность  $d$  довольно большой.

Проблема в том, что  $\tilde{V}_{\text{акс}}$  не имеет минимума при  $\langle a_{\text{физ}} \rangle = 0$ . Минимум у  $\tilde{V}_{\text{акс}}$  оказывается при

$$\bar{\theta}_{\text{эф}} = \frac{\langle a_{\text{физ}} \rangle}{f} \approx c \sin \delta \frac{f^d}{M_{Pl}^{d-4} \Lambda_{\text{КХД}}^4}. \quad (5.135)$$

Таким образом, гравитационные эффекты (при условии, что  $CP$ -нарушающая фаза связана с ними), индуцируют ненулевые  $\bar{\theta}$  даже в присутствии  $U(1)_{PQ}$  симметрии!

Чтобы удовлетворить ограничению  $\bar{\theta} \leq 10^{-10}$ , необходимо, чтобы  $d$  было большим и (или) константа чрезвычайно малой.

Следует заметить, что ясного разрешения этой проблемы нет, и это в значительной степени осложняет киральной решение сильной  $CP$ -проблемы. Однако какое-либо понимание свойств квантовой гравитации отсутствует, и это оставляет надежду, что квантовой гравитации эти проблемы будут преодолены.

Некоторые обнадеживающие результаты в этом направлении получены в теории струн.

Если гравитационные эффекты индуцируют значения  $\bar{\theta} < 10^{-10}$ , то сильная  $CP$ -проблема решается с помощью  $U(1)_{PQ}$  симметрии, а масса аксиона приближенно задается КХД.

#### 6.1. Введение

Напомним (глава 1), что лоренц-преобразования

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (6.1)$$

сохраняют инвариантность пространственно-временного интервала

$$x_\mu x^\mu = \vec{r}^2 - c^2 t^2 = \vec{r}'^2 - c^2 t'^2 = x'_\mu x'^\mu. \quad (6.2)$$

Это условие приводит к ограничению вида матриц  $\Lambda^\mu_\nu$

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda_\mu \eta_{\lambda k} \Lambda^k_\nu, \quad (6.3)$$

где матричный тензор  $\eta_{\mu\nu}$  представляет собой диагональную матрицу

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Псевдоортогональность матриц (6.3)

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (6.5)$$

позволяет классифицировать Лоренц преобразования в зависимости от знака детерминанта и  $\Lambda^0_0$

$$\det \Lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}; \quad \Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2} = \begin{cases} \geq +1 \\ \leq -1 \end{cases}. \quad (6.6)$$

В результате группа Лоренца разбивается на четыре части

$$\begin{aligned} L_+^\uparrow : \quad \det \Lambda = +1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1; \quad L_-^\uparrow : \quad \det \Lambda = -1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1; \\ L_+^\downarrow : \quad \det \Lambda = +1, \quad \Lambda^0_0 \leq -1; \quad L_-^\downarrow : \quad \det \Lambda = -1, \quad \Lambda^0_0 \leq -1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Матрицы преобразований  $\Lambda$ , принадлежащие  $\Lambda_+^\uparrow$  образуют подгруппу группы Лоренца. Ее называют собственной ортохронной группой Лоренца. Все другие преобразования в группе Лоренца

можно получить из  $\Lambda \in L_+^\uparrow$ , используя два дискретных преобразования  $P$  и  $T$ , характеризующиеся матрицами

$$P_\nu^\mu = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}; \quad T_\nu^\mu = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

которые соответствуют пространственной инверсии ( $P$ -четности) и обращению времени. Очевидно, что если  $\Lambda \in L_+^\uparrow$ , то  $P\Lambda \in L_-^\uparrow$ ,  $PT\Lambda \in L_+^\downarrow$ , и  $T\Lambda \in L_-^\downarrow$ . Замечательно, что природа инвариантна только относительно собственных ортохронных преобразований Лоренца. Четность нарушается в слабых взаимодействиях. Это было теоретически показано в 1956 г. Ли и Янгом и вскоре подтверждено в опытах Ву и др. Детектирование распада  $K_L^0$  на  $\pi$ -мезоны показало, что, по-видимому, обращение времени не является симметрией природы. Это оказалось возможным понять на основе стандартной модели электрослабых и сильных взаимодействий, а также СРТ теоремы, установленной Паули и др. в 1955 г. Чтобы описать эти экспериментальные данные, надо прежде всего понять, как дискретные пространственно-временные преобразования  $P$  и  $T$  действуют на квантовые поля. Кроме того, надо рассмотреть действие преобразования зарядового сопряжения, изменяющего знаки частиц. Начнем обсуждение с четности.

## 6.2. Пространственная четность

Свойства преобразований четности электромагнитных полей следуют из классических рассмотрений. Сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (6.9)$$

очевидно меняет знак при преобразованиях четности, поскольку при этом  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ . Следовательно, поле  $\vec{E}$  – нечетно, а  $\vec{B}$  – четно относительно пространственной инверсии



$$E(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -E(-\vec{x}, t); \quad \vec{B}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \vec{B}(-\vec{x}, t). \quad (6.10)$$

Формально это преобразование осуществляется унитарным оператором  $U(1)$ . Этот оператор преобразует векторный потенциал  $A^\mu(\vec{x}, t)$  в потенциал  $A^\mu(-\vec{x}, t)$ . Исходя из соотношения (6.10), легко понять, что

$$U(P)A^\mu(\vec{x}, t)U(P)^{-1} = \varepsilon(\mu)A^\mu(-\vec{x}, t), \quad (6.11)$$

где символ  $\varepsilon(\mu)$  означает следующее

$$\varepsilon(\mu) = \begin{cases} -1 & \mu \neq 0; \\ +1 & \mu = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Скалярные поля со спином ноль  $S(\vec{x}, t)$  и псевдоскалярные поля  $P(\vec{x}, t)$  относительно преобразований четности являются, соответственно, четными и нечетными

$$\begin{aligned} U(P)S(\vec{x}, t)U(P)^{-1} &= S(-\vec{x}, t); \\ U(P)P(\vec{x}, t)U(P)^{-1} &= -P(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Поведение дираковских полей со спином  $\frac{1}{2}$   $\Psi(\vec{x}, t)$  относительно преобразования  $P$  несколько более сложное. Однако это поведение определяется предположением о том, что уравнение Дирака инвариантно по отношению к этой операции

$$U(P)\Psi(\vec{x}, t)U(P)^{-1} = \eta_P \gamma^0 \Psi(-\vec{x}, t). \quad (6.14)$$

В этом выражении  $\eta_P$  – фазовый фактор единичной величины ( $|\eta_P|^2 = 1$ ). Поскольку во все выражения, характеризующие динамику, входят билинейные комбинации полей, то  $\eta_P$  не имеет физического значения, т.е. можно считать  $\eta_P = 1$ .

Исходя из соотношения (6.14), можно вывести свойства четности для фермион – антифермионных билинейных комбинаций.

Поскольку

$$\gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0; \quad \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i; \quad \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma_5, \quad (6.15)$$

получаем

$$\begin{aligned}
U(P)\bar{\Psi}(\vec{x},t)\Psi(\vec{x},t)U(P)^{-1} &= \bar{\Psi}(-\vec{x},t)\Psi(-\vec{x},t) - (\text{скаляр}) \\
U(P)\bar{\Psi}(\vec{x},t)i\gamma_5 U(P)^{-1} &= -\bar{\Psi}(-\vec{x},t)i\gamma_5 \Psi(-\vec{x},t) - (\text{псевдоскаляр}) \\
U(P)\bar{\Psi}(\vec{x},t)\gamma^\mu \Psi(\vec{x},t)U(P)^{-1} &= \\
&= \eta(\mu) \bar{\Psi}(-\vec{x},t)\gamma^\mu \Psi(-\vec{x},t) - (\text{вектор}) \\
U(P)\bar{\Psi}(\vec{x},t)\gamma^\mu \gamma_5 \Psi(\vec{x},t)U(P)^{-1} &= \\
&= -\eta(\mu) \bar{\Psi}(-\vec{x},t)\gamma^\mu \gamma_5 \Psi(-\vec{x},t) - (\text{псевдовектор}).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Исходя из этих свойств, сразу получаем, что электромагнитные взаимодействия инвариантны относительно преобразований четности

$$W_{\text{взаим}}^{\text{электр}} = \int d^4x A^\mu(x) \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \xrightarrow{P} W_{\text{взаим}}^{\text{электр}}. \tag{6.17}$$

Если вспомнить определение киральности полей  $\Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi(x)$ ;

$\Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi(x)$ , то преобразование четности  $P$  переводит состояние с одной киральностью в другое состояние:

$$\Psi_L(\vec{x},t) \xrightarrow{P} \gamma^0 \Psi_R(-\vec{x},t); \quad \Psi_R(\vec{x},t) \xrightarrow{P} \gamma^0 \Psi_L(-\vec{x},t). \tag{6.18}$$

Очевидно, что кирально ассиметричные слабые взаимодействия будут нарушать четность. Таким образом, в этом секторе стандартной модели пространственная четность нарушена. Сильные же взаимодействия инвариантны относительно преобразований четности. Эти взаимодействия описываются квантовой хромодинамикой, в которой левые и правые кварки являются триплетами по отношению к калибровочной  $SU(3)$  группе

$$q_L \sim 3; \quad q_R \sim 3, \tag{6.19}$$

и кварки различаются лишь слабыми взаимодействиями. Относительно слабой  $SU(2)$  группы электрослабой  $SU(2) \times U(1)$  теории левые поля  $\Psi_L$  кварков и лептонов образуют дублеты, а правые компоненты  $\Psi_R$  – синглеты

$$\Psi_L \sim 2; \quad \Psi_R \sim 1. \tag{6.20}$$

В этом и состоит причина нарушения четности в слабых взаимодействиях.

### 6.3. Зарядовое сопряжение

Как уже отмечалось выше, зарядовое сопряжение означает замену знаков электрических зарядов на противоположные.

Для электромагнитного поля преобразование зарядового сопряжения  $C$  означает замену знака векторного потенциала

$$U(C)A^\mu(x)U(C)^{-1} = -A^\mu(x). \quad (6.21)$$

Для дираковских полей зарядовое сопряжение преобразует частицу в античастицу, и эта операция соответствует эрмитовому сопряжению

$$U(C)\Psi(x)U(C)^{-1} = \eta_C C \Psi^+(x). \quad (6.22)$$

Здесь  $\eta_C$  – снова фазовый фактор единичной величины, который можно считать  $\eta_C \equiv 1$ . Форму матрицы  $C$  можно найти, исходя из требования инвариантности уравнения Дирака по отношению к преобразованию (6.22)

$$C\gamma_\mu^* C^{-1} = -\gamma_\mu. \quad (6.23)$$

Конкретная форма матрицы  $C$  зависит от формы используемых  $\gamma$ -матриц. В майорановском представлении, когда  $\gamma$ -матрицы чисто мнимые ( $\gamma_\mu^* = -\gamma_\mu$ ,  $C=1$ ). В дираковском же представлении

$$\left( \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ матрица } C = \gamma_2.$$

Из-за простоты матрицы  $C$  в майорановском представлении, будем её использовать при рассмотрении зарядового сопряжения.

Используя соотношение (6.22), можно найти свойства фермион-антифермионных билинейных комбинаций относительно операции зарядового сопряжения. Проиллюстрируем сначала эти свойства на примере скалярной плотности  $\bar{\Psi}\Psi$ :

$$\begin{aligned} U(C)\bar{\Psi}(x)\Psi(x)U(C)^{-1} &= U(C)\Psi_\alpha^+(x)(\gamma^0)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x)U(C)^{-1} = \\ &= \Psi_\alpha(x)(\gamma^0)_{\alpha\beta}\Psi_\beta^+(x) = -\Psi_\beta^+(x)(\gamma^0)_{\alpha\beta}\Psi_\alpha(x) = \\ &= -\Psi_\beta^+(x)(\gamma^{0T})_{\beta\alpha}\Psi_\alpha(x) = +\bar{\Psi}(x)\Psi(x). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Вторая строчка в выражении (6.24) следует из (6.22) в предположении майорановского представления  $C=1$ . Третья строчка в (6.24)

получена из условия антикоммутирования фермионных полей. Наконец, в последней строке (6.24) использовано то, что в майорановском представлении  $\gamma^0$  – антисимметричная матрица ( $\gamma^{0T} = -\gamma^0$ ).

Аналогично получаются и другие соотношения для фермион-антифермионных билинейных комбинаций при преобразованиях зарядового сопряжения:

$$\begin{aligned} U(C)\bar{\Psi}(x)\Psi(x)U(C)^{-1} &= \bar{\Psi}(x)\Psi(x) - (\text{скаляр}); \\ U(C)\bar{\Psi}(x)i\gamma_5\Psi(x)U(C)^{-1} &= \bar{\Psi}(x)\gamma_5\Psi(x) - (\text{псевдоскаляр}); \\ U(C)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)U(C)^{-1} &= -\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) - (\text{вектор}); \\ U(C)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(x)U(C)^{-1} &= \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(x) - (\text{псевдовектор}). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Эти результаты имеют важные следствия. Например, из них следует, что электромагнитные взаимодействия  $C$  – инвариантны. Действительно, из соотношений (6.21) и (6.25) получаем:

$$W_{\text{взаим}}^{\text{электр}} = \int d^4x e A^\mu(x) \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \xrightarrow{C} W_{\text{взаим}}^{\text{электр}}, \quad (6.26)$$

поскольку как  $A^\mu$ , так и электромагнитный ток  $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ , изменяют знак при преобразовании  $C$ .

Сильные взаимодействия также инвариантны по отношению к зарядовому сопряжению. Это утверждение требует пояснений. Действительно,  $SU(6,3)$  токи не имеют таких простых трансформационных свойств, как электромагнитный ток, поскольку он содержит нейтральные  $SU(6,3)$  матрицы  $\lambda_\alpha$ . Эффективно эти матрицы в билинейных комбинациях при зарядовом сопряжении переходят в транспонированные матрицы

$$U(C)\bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda_\alpha}{2}qU(C)^{-1} = -\bar{q}\gamma^\mu\left(\frac{\lambda_\alpha}{2}\right)^T q. \quad (6.27)$$

Поскольку матрицы  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$  и  $\lambda_8$  – симметричны, а  $\lambda_2, \lambda_5$  и  $\lambda_1$  – антисимметричны, то

$$J_a^\mu \rightarrow -\eta(a)J_a^\mu, \quad (6.28)$$

$$\text{где} \quad \eta(a) = \begin{cases} +1 & \text{для } a = 1, 3, 4, 6 \text{ и } 8 \\ -1 & \text{для } a = 2, 5 \text{ и } 7. \end{cases} \quad (6.29)$$

Чтобы гарантировать инвариантность членов с кварк – глюонным взаимодействием:

$$W_{\text{взаим}} = \int d^4 g_3 A_a^\mu J_{\mu a} \quad (6.30)$$

относительно зарядового сопряжения, надо предположить, что свойства глюонных полей по отношению к операции  $C$  зависят от той компоненты поля, которая входит в рассмотрение. Действительно, для  $C$ -инвариантности (6.30) необходимо

$$U(C)A^\mu(x)U(C)^{-1} = -\eta A_a^\mu(x). \quad (6.31)$$

Легко проверить, что это трансформационное свойство необходимо для обеспечения определенных  $C$  – свойств нелинейных напряженностей глюонных полей

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + gf_{abc}A_b^\mu A_c^\nu. \quad (6.32)$$

Для  $SU(3)$  единственные неравные нулю структурные константы

$$f_{abc} \neq 0 \text{ для } abc = \{123, 147, 156, 246, 257, 345, 367, 458, 678\}. \quad (6.33)$$

Как можно видеть,  $f_{abc} \neq 0$  только в случаях, когда среди индексов есть нечетное число. Это означает, что  $G_a^{\mu\nu}$  преобразуется при зарядовом сопряжении так, как  $A_a^\mu$ :

$$U(C)G_a^{\mu\nu}(x)U(C)^{-1} = -\eta(a)G_a^{\mu\nu}(x). \quad (6.34)$$

Тогда для сильных взаимодействий имеем

$$W^{KXD} = \int d^4x \left[ -\bar{q} \left( \gamma^\mu \frac{1}{i} D_\mu + m_q \right) q - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} \right] \xrightarrow{C} W^{KXD}. \quad (6.35)$$

Другая ситуация для слабых взаимодействий, поскольку они включают как векторные, так и псевдовекторные взаимодействия. Рассмотрим, для примера,  $SU(2)$  токи лептонов первого поколения

$$J_i^\mu = (\bar{\nu}_e \bar{e})_L \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{4} (\bar{\nu}_e \bar{e}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \tau_i \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Этот ток преобразуется по-разному в своих векторных и псевдо-векторных частях, как и в 1, 3 и 2 компонентах

$$\begin{aligned} U(C)J_{1,3}^\mu U(C)^{-1} &= -\frac{1}{4}(\bar{v}_e \bar{e})\gamma^\mu (1 + \gamma_5)\tau_{1,3} \begin{pmatrix} v_e \\ e \end{pmatrix}; \\ U(C)J_2^\mu U(C)^{-1} &= +\frac{1}{4}(\bar{v}_e \bar{e})\gamma^\mu (1 + \gamma_5)\tau_2 \begin{pmatrix} v_e \\ e \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Отличие в поведении 1, 3 и 2 компонент можно исключить, если постулировать следующие  $C$  – трансформационные свойства  $W_i^\mu$  полей

$$U(C)W_i^\mu(x)U(C)^{-1} = -\eta(i)W_i^\mu(x), \quad (6.38)$$

где

$$\eta(i) = \begin{cases} +1, & i = 1, 3 \\ -1, & i = 2 \end{cases} \quad (6.39)$$

Заметим, что эти свойства – как раз те свойства, которые можно было ожидать, поскольку они подразумевают:

$$W_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^\mu \pm iW_2^\mu) \xrightarrow{C} W_\mp^\mu. \quad (6.40)$$

Однако присутствие векторных и псевдовекторных частей в токах, определяющее слабые взаимодействия, не дает оснований считать, что

$$W_{\text{слаб.взаим.}} \xrightarrow{C} W_{\text{слаб.взаим.}}, \quad (6.41)$$

как это и наблюдается экспериментально.

## 6.4. Обращение времени

Классически  $T$ -инвариантность означает, что уравнения движения, описывающие частицу, распространяющуюся из положения  $A$  в положение  $B$  по некоторому пути, допускают и обратное по времени движение. Очевидно, при обращении во времени движении все импульсы меняют знак, а координаты остаются неизменными. Итак, при  $T$ -преобразовании

$$\vec{p} \xrightarrow{T} -\vec{p}; \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow{T} \vec{F}. \quad (6.42)$$

На квантовомеханическом уровне замена начальных состояний на конечные означает введение антиунитарного оператора  $U(6.T)$  обращения времени, причем этот оператор обладает следующим свойством

$$U(T) = V(T)K, \quad (6.43)$$

где  $V(T)$  – унитарный оператор, а  $K$  – осуществляет комплексное сопряжение любого  $i$ -числа, на которое он действует. Оператор комплексного сопряжения, как часть  $U(T)$ , формирует антиунитарный оператор. Необходимость комплексного сопряжения в связи с обращением времени видна уже на уровне уравнения Шредингера. Действительно, из уравнения

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = H \Psi(\vec{x}, t) \quad (6.44)$$

можно вывести, что  $\Psi^*(\vec{x}, -t)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\vec{x}, -t) = H^* \Psi^*(\vec{x}, -t). \quad (6.45)$$

Если гамильтониан вещественный ( $H^* = H$ ), то можно видеть, что  $\Psi^*(\vec{x}, -t)$  тоже является решением уравнения Шредингера. Таким образом, в квантовой механике комплексное сопряжение волновой функции (наряду с вещественностью гамильтониана) связано с обращением направления времени. Комплексное сопряжение с обращением времени эффективно изменяют in и out состояния

$$\langle U(T)\phi | U(T)\Psi \rangle = \langle \Psi | \phi \rangle. \quad (6.46)$$

Если  $T$  является симметрией теории, то в этой теории связаны как прямые, так и обратные во времени процессы (например, распад  $A \rightarrow BC$  и образование  $A$  при слиянии  $B$  и  $C$ ). Более точно, если обращение времени является симметрией теории, то в этой теории  $S$  – матричный элемент  $S_{fi}$  связан с матричным элементом  $S_{\bar{f}\bar{i}}$ , где состояния  $\bar{i}, \bar{f}$  имеют все направления импульсов  $\{\vec{p}\}$ , противоположные по сравнению с состояниями  $i, f$ . Иначе говоря

$$\begin{aligned} S_{fi} = {}_{out} \langle f | i \rangle_{in} &= {}_{in} \langle U(T)i | U(T)f \rangle_{out} = \\ &= {}_{out} \langle \bar{i} | \bar{f} \rangle_{in} = S_{\bar{f}\bar{i}}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Подчеркнем, что последний «шаг» в (6.47) справедлив только тогда, когда обращение времени является симметрией теории, так как только в этом случае

$$U(T)|f\rangle_{out} = |\bar{f}\rangle_{in}; \quad U(T)|i\rangle_{in} = |\bar{i}\rangle_{out}. \quad (6.48)$$

Необходимо прокомментировать предположение о вещественности гамильтониана. Это не так в случае, когда в задаче рассматривается спин, поэтому есть резон в добавлении дополнительного оператора  $V(T)$  в соотношение (6.43). Более точно следует записать

$$V(T)H^*V(T)^{-1} = H. \quad (6.49)$$

В отсутствие спина,  $V(T)$  – единичная матрица, но если есть спин, ее присутствие допускает  $T$ -инвариантность. Простейший пример представляет собой спин-орбитальное взаимодействие в атомной физике

$$H_{C.O.} = \lambda \vec{\sigma} \vec{L}, \quad (6.50)$$

где  $\lambda$  – некоторая константа.

Поскольку  $\vec{L} = \vec{r} \times \frac{1}{i} \vec{\nabla}$ , то

$$H_{C.O.} = \lambda \vec{\sigma}^* \vec{L}^* = -\lambda \vec{\sigma}^* \vec{L}, \quad (6.51)$$

что не одно и то же с выражением (6.50), так как  $\vec{\sigma}_2^* = -\vec{\sigma}_2$ , но  $\vec{\sigma}_{1,3}^* = \vec{\sigma}_{1,3}$ . Однако  $\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}^* \vec{\sigma}_2 = -\vec{\sigma}$ , поэтому использование  $V(T) = \vec{\sigma}_2$  гарантирует, что

$$V(T)H_{C.O.}^*V(T)^{-1} = H_{C.O.} \quad (6.52)$$

Физически это означает, что при обращении времени не только  $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$ , но и  $\vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$ .

В классической теории поля можно непосредственно установить, как преобразование обращения времени влияет на электромагнитные поля. Так как сила Лоренца инвариантна относительно преобразования  $T$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \xrightarrow{T} \vec{F}, \quad (6.53)$$

то поле  $\vec{E}$  четно, а  $\vec{B}$  – нечетно при обращении времени. В терминах векторного потенциала имеем



$$U(T)A^\mu(\vec{x},t)U(T)^{-1} = \eta(\mu)A^\mu(\vec{x},-t). \quad (6.54)$$

Для частиц со спином  $\frac{1}{2}$  можно вывести трансформационные свойства  $\Psi(\vec{x},t)$  при  $T$ -преобразованиях, исходя из требования, чтобы действие  $U(T)$  на  $\Psi(\vec{x},t)$  порождало другое решение уравнения Дирака. Записывая

$$U(T)\Psi(\vec{x},t)U(T)^{-1} = \eta_T T \Psi(\vec{x},-t) \quad (6.55)$$

с  $\eta_T$ -фазой единичной величины и учитывая, что  $U(T)$  комплексно сопрягает все  $c$ -числа, находим, что для инвариантности уравнения Дирака матрица  $T$  должна удовлетворять условиям:

$$T\gamma^{0*}T^{-1} = \gamma^0; \quad T\gamma^{i*}T^{-1} = -\gamma^i. \quad (6.56)$$

Как и в случае матрицы зарядового сопряжения  $C$ , форма матрицы  $T$  зависит от представления  $\gamma$ -матриц. В удобном майорановском представлении  $\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu$  получаем:

$$T = \gamma^0 \gamma_5. \quad (6.57)$$

С помощью соотношений (6.55) и (6.57) легко найти  $T$ -трансформационные свойства фермион-антифермионных билинейных комбинаций

$$\begin{aligned} U(T)\bar{\Psi}(\vec{x},t)\Psi(\vec{x},t)U(T)^{-1} &= \bar{\Psi}(\vec{x},-t)\Psi(\vec{x},-t) - \text{скаляр} \\ U(T)\bar{\Psi}(\vec{x},t)i\gamma_5\Psi(\vec{x},t)U(T)^{-1} &= \bar{\Psi}(\vec{x},-t)i\gamma_5\Psi(\vec{x},-t) - \text{псевдоскаляр} \\ U(T)\bar{\Psi}(\vec{x},t)\gamma^\mu\Psi(\vec{x},t)U(T)^{-1} &= \eta(\mu)\bar{\Psi}(\vec{x},-t)\gamma^\mu\Psi(\vec{x},-t) - \text{вектор} \\ U(T)\bar{\Psi}(\vec{x},t)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(\vec{x},t)U(T)^{-1} &= \\ &= -\eta(\mu)\bar{\Psi}(\vec{x},-t)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(\vec{x},-t) - \text{псевдовектор} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Из соотношения (6.54), а также из вещественности электромагнитной константы  $e$  следует, что электромагнитные взаимодействия  $T$ -инвариантны

$$W_{\text{взаим}}^{\text{электр}} = \int d^4x e A^\mu(x) \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \xrightarrow{T} W_{\text{взаим}}^{\text{электр}}. \quad (6.59)$$

Можно проверить, что калибровочные взаимодействия КХД и  $SU(2) \times U(1)$  электрослабой теории также  $T$ -инвариантны, если правильно определен закон преобразования калибровочных полей. Поскольку в  $SU(3)$  только  $\lambda_2, \lambda_5$  и  $\lambda_6$  – мнимые матрицы, а для

$SU(2)$  мнимая матрица  $\sigma_2$ , то легко проверить, что желаемыми  $T$ -трансформационными свойствами являются:

$$\begin{aligned} U(T)A_a^\mu(\vec{x}, t)U(T)^{-1} &= \eta(\mu)\eta(a)A_a^\mu(\vec{x}, -t); \quad (SU(3)) \\ U(T)W_i^\mu(\vec{x}, t)U(T)^{-1} &= \eta(\mu)\eta(i)W_i^\mu(\vec{x}, -t); \quad (SU(2)) \\ U(T)Y^\mu(\vec{x}, t)U(T)^{-1} &= \eta(\mu)Y^\mu(\vec{x}, -t) \quad (U(1)). \end{aligned} \quad (6.60)$$

В отличие от  $C$  – преобразования,  $T$  – преобразование изменяет векторные токи одинаковым образом. Таким образом, используя соотношения (6.58) и (6.60) получаем:

$$W_{\text{калибр.}}^{CM} \xrightarrow{T} W_{\text{калибр.}}^{CM} \quad (6.61)$$

Стандартная модель, однако, может иметь  $T$ -нарушающие взаимодействия в электрослабом секторе, включающем скалярное хиггсовское поле. Константы связи хиггсовского поля, в отличии от калибровочных констант, не обязательно должны быть вещественными. Комплексность констант связи определяет возможность  $T$ -нарушающих взаимодействий. Проверим это утверждение в простейшем случае одного комплексного хиггсовского дублета:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (6.62)$$

Скалярные хиггсовские самовзаимодействия, определяющие нарушение  $SU(2) \times U(1)$ , содержат только вещественные коэффициенты, т.к. хиггсовский потенциал должен быть эрмитовым:

$$V = \lambda \left( \Phi^\dagger \Phi - \frac{V^2}{2} \right) = V^+, \quad (6.63)$$

т.е.  $\lambda$  и  $V$  – вещественные параметры.

Юкавские взаимодействия  $\Phi$  с кварковыми полями, однако, могут содержать комплексные коэффициенты.

Если  $i, j$  нумеруют семейства, то эти взаимодействия записываются в виде

$$L_{\text{юкава}} = -\Gamma_{ij}^u(\bar{u}, \bar{d})_{Li} \Phi U_{Rj} - \Gamma_{ij}^d(\bar{u}, \bar{d})_{Li} \tilde{\Phi} d_{Rj} + \text{э.с.} \quad (6.64)$$

В этом выражении  $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$ , а матрицы  $\Gamma_{ij}^u$  и  $\Gamma_{ij}^d$  – произвольные комплексные матрицы. После спонтанного нарушения электросла-

бой симметрии, из дублета  $\Phi$  остается одно скалярное возмущение – хиггсовский бозон  $H$  и вакуумное среднее  $V$ :

$$\Phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V + H \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Юкавские взаимодействия (6.64) генерируют массовые члены для зарядов  $2/3$  и  $(-1/3)$  кварков:

$$M_{ij}^{u,d} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{ij}^{u,d} V. \quad (6.66)$$

Как известно,  $M_{ij}^{u,d}$  могут быть диагонализированы биунитарным преобразованием

$$(U_L^{u,d})^+ M^{u,d} U_R^{u,d} = M^{u,d}. \quad (6.67)$$

Диагональные матрицы  $M^{u,d}$  имеют вещественные собственные значения  $m_i$ , соответствующие физическим кварковым массам. Кроме того, биунитарные преобразования кварковых полей диагонализуют матрицы юкавских связей, поскольку  $M$  и  $\Gamma$  линейно связаны. Следовательно, все, что остается от юкавского сектора после этих преобразований – простое взаимодействие

$$L_{\text{юкавс}}^{\text{эф}} = - \sum m_i \bar{q}_i(x) q_i(x) \left[ 1 + \frac{H(x)}{V} \right]. \quad (6.68)$$

Если  $H(\vec{x}, t)$  имеет канонический закон  $T$  – преобразования, то можно ожидать для скалярного поля

$$U(T) H(\vec{x}, t) U(T)^{-1} = H(\vec{x}, -t). \quad (6.69)$$

Соотношение (6.68) содержит  $T$ -сохраняющее взаимодействие. Однако комплексная природа первоначальных юкавских связей допускает наличие некоторых  $T$ -нарушающих взаимодействий. Действительно, биунитарные преобразования над кварковыми полями, которые необходимы для диагонализации кварковых массовых матриц, изменяют форму заряженных слабых токов. В самом деле, до этих преобразований лагранжиан заряженных токов имел вид

$$L^{CC} = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[ W_+^\mu J_{-\mu}^0 + W_-^\mu J_{+\mu}^0 \right], \quad (6.70)$$

где

$$J_{-\mu}^0 = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mathbb{1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (6.71)$$

и

$$J_{+\mu}^0 = (J_{-\mu}^0)^+ . \quad (6.72)$$

Очевидно, что взаимодействие (6.70)  $T$ -инвариантно. Однако, после биунитарного преобразования кварковых полей, заряженный ток  $J_{-\mu}^0$  изменяется следующим образом

$$J_{-\mu}^0 = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (6.73)$$

где матрица смешивания CKM

$$V_{CKM} = U_L^{u+} U_L^d \quad (6.74)$$

– унитарная матрица. Поскольку, вообще говоря,  $V_{CKM}$  комплексна, то присутствие этой комплексности в токах  $J_{-\mu}^0$  (6.  $J_{+\mu}^0$ ) может приводить к  $T$ -нарушению.

Для трех поколений кварков и лептонов нетрудно показать, что матрица  $V_{CKM}$  имеет только одну физическую фазу  $\delta$ . Все другие фазы исключаются путем переопределения кварковых полей. Если  $\delta \neq 0$ , то заряженный слабый ток не обладает  $T$ -инвариантностью:

$$L^{CC}(\vec{x}, t) = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} [W_+^\mu J_{-\mu} + W_-^\mu J_{+\mu}] \xrightarrow{T} L^{CC}(\vec{x}, -t), \quad (6.75)$$

и стандартная модель может содержать наблюдаемые проявления нарушения  $T$ -инвариантности.

## 6.5. CPT-преобразование

Если природа описывается локальной лоренц-инвариантной полевой теорией с обычным соотношением между спином и статистикой, то имеет место знаменитая  $CPT$ -теорема (Паули, 1955 г.). При таких условиях можно показать, что действие теории всегда инвариантно относительно  $C, P, T$  преобразований, т.е.

$$W \xrightarrow{CPT} W. \quad (6.76)$$

Мы не будем доказывать эту теорему (см. главу 2), а покажем, как она применяется. Сначала рассмотрим действие  $CPT$  преобразования на электромагнитные взаимодействия. Используя соотношения (6.14), (6.16), (6.21), (6.25), (6.54) и (6.58) получаем

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CPT} [-1] [\eta(\mu)] [\eta(\mu)] A^\mu(-\vec{x}, -t) = -A^\mu(-\vec{x}, -t); \\ J_{\text{электр}}^\mu(\vec{x}, t) &= \bar{\Psi}(\vec{x}, t) \gamma^\mu \Psi(\vec{x}, t) \xrightarrow{CPT} [-1] [\eta(\mu)] \times \\ &\times [\eta(\mu)] J_{\text{электр}}^\mu(-\vec{x}, -t) = -J_{\text{электр}}^\mu(-\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Очевидно поэтому, что при  $CPT$ -преобразовании

$$W_{\text{взаим}}^{\text{электр}} = \int d^4x e A^\mu(x) J_\mu^{\text{электр}}(x) \xrightarrow{CPT} W_{\text{взаим}}^{\text{электр}}. \quad (6.78)$$

Это, однако, тривиальный результат, поскольку  $W_{\text{взаим}}^{\text{электр}}$  порознь инвариантно относительно  $C$ ,  $P$  и  $T$  преобразований.  $CPT$ -инвариантность, если это общее свойство, должна выполняться даже при нарушении отдельных симметрий. Наиболее значимую проверку предоставляет электрослабая теория. В этой теории  $C$  и  $P$  нарушаются во взаимодействиях нейтральных токов, однако  $T$  и  $CPT$  сохраняются. Проверим это. Действие для взаимодействующих нейтральных токов

$$W_{\text{взаим}}^{\text{нейтр.}} = \frac{e}{2 \cos Q_W \sin Q_W} \int d^4x Z_\mu J_{NC}^\mu. \quad (6.79)$$

Нейтральный ток

$$J_{\text{нейтр}}^\mu = 2 \left[ J_3^\mu - \sin^2 Q_W J_{\text{электр}}^\mu \right] = V^\mu + A^\mu, \quad (6.80)$$

содержит как векторную, так и псевдовекторную части, поскольку последняя присутствует в  $SU(2)$ -токе  $J_3^\mu$ . Четность и зарядовая четность в соотношении (6.79) нарушены, поскольку векторный и псевдовекторный токи изменяются по-разному при действии этих преобразований. Действительно, при  $P$ -преобразовании

$$\begin{aligned} Z^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{P} \eta(\mu) Z^\mu(-\vec{x}, t); \quad V^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \eta(\mu) V^\mu(-\vec{x}, t); \\ A^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{P} -\eta(\mu) A^\mu(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (6.81)$$

При  $C$ -преобразовании

$$\begin{aligned} Z^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{C} -Z^\mu(\vec{x}, t); & V^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{C} -V^\mu(\vec{x}, t); \\ A^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{C} A^\mu(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (6.82)$$

С другой стороны, в соотношении (6.79)  $T$ -инвариантность сохраняется, поскольку при обращении времени

$$\begin{aligned} Z^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} \eta(\mu) Z^\mu(\vec{x}, -t); & V^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} \eta(\mu) V^\mu(\vec{x}, -t); \\ A^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} \eta(\mu) A^\mu(\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Используя соотношения (6.81)–(6.83), можно показать, что взаимодействие нейтральных токов сохраняют  $CPT$ . Действительно

$$\begin{aligned} Z^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CPT} -Z^\mu(-\vec{x}, -t); & V^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CPT} -V^\mu(-\vec{x}, -t); \\ A^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CPT} -A^\mu(-\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (6.84)$$

Очевидно, что  $CP$  и  $T$ -преобразования для действия, содержащего нейтральные токи, являются эквивалентными

$$W_{\text{взаим}}^{\text{нейтр}} \xrightarrow{CP} W_{\text{взаим}}^{\text{нейтр}} \xrightarrow{T} W_{\text{взаим}}^{\text{нейтр}}. \quad (6.85)$$

Эквивалентность между  $T$  и  $CP$ -преобразованиями имеет место даже в случае нарушения обеих симметрий. В этом случае комбинированное  $CPT$ -преобразование сохраняет действие. В этом состоит существо  $CPT$ -теоремы. В качестве пояснения, исследуем  $T$ -нарушающее заряженное взаимодействие между  $u$  и  $b$  – кварками, определяемое комплексным матричным элементом матрицы СКМ  $V_{ub}$

$$\begin{aligned} W_{ub}^{\text{заряж.ток}} &= \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \times \\ &\times \int d^4x \{ V_{ub} W_+^\mu \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b + V_{ub}^* W_-^\mu \bar{b} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u \}, \end{aligned} \quad (6.86)$$

$$\text{где} \quad W_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^\mu \pm W_2^\mu). \quad (6.87)$$

Поскольку при  $T$ -преобразовании

$$\begin{aligned} W_1^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} \eta(\mu) W_1^\mu(\vec{x}, -t); \\ W_2^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} -\eta(\mu) W_2^\mu(\vec{x}, -t), \end{aligned} \quad (6.88)$$

то с учетом фактора в (6.87), получим

$$W_\pm^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} \eta(\mu) W_\pm^\mu(\vec{x}, -t). \quad (6.89)$$

С другой стороны, при  $T$ -преобразовании  $u$ -  $b$  ток ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{x}, t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} \eta(\mu) \bar{u}(\vec{x}, -t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(\vec{x}, -t) \\ \bar{b}(\vec{x}, t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} \eta(\mu) \bar{b}(\vec{x}, -t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Следовательно, действие  $W_{ub}^{\text{заряж.ток}}$  действительно  $T$ -инвариантно

$$\begin{aligned} W_{ub}^{\text{заряж.ток}} &\xrightarrow{T} \tilde{W}_{ub}^{\text{заряж.ток}} = \\ &= \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \int d^4x \left\{ V_{ub}^* W_+^\mu \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b + \right. \\ &\quad \left. + V_{ub} W_-^\mu \bar{b} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u \right\}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Поведение отдельных составляющих действие  $W_{ub}^{\text{заряж.ток}}$  относительно  $CP$  и  $T$  разное. В самом деле

$$\begin{aligned} W_1^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CP} -\eta(\mu) W_1^\mu(-\vec{x}, t); \\ W_2^\mu(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CP} \eta(\mu) W_2^\mu(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Следовательно, в этом случае

$$W_\pm^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{CP} -\eta(\mu) W_\mp^\mu(-\vec{x}, t). \quad (6.93)$$

Аналогично найдем, как относительно  $CP$  преобразуются  $u$ -  $b$  токи

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{x}, t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CP} -\eta(\mu) \bar{b}(-\vec{x}, t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(-\vec{x}, t) \\ \bar{b}(\vec{x}, t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(\vec{x}, t) &\xrightarrow{CP} \eta(\mu) \bar{u}(-\vec{x}, t) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Окончательный эффект влияния на  $W_{ub}^{\text{заряж.ток}}$  такой же, как при  $T$ -преобразовании

$$\begin{aligned}
& W_{ub}^{\text{заряж.ток}} \xrightarrow{CP} \tilde{W}_{ub}^{\text{заряж.ток}} = \\
& = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \int d^4 x \left\{ V_{ub} W_-^\mu \bar{b} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u + \right. \\
& \quad \left. + V_{ub}^* W_+^\mu \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b \right\}. \quad (6.95)
\end{aligned}$$

Из этого примера можно понять, почему справедлива *CPT*-теорема. Она возникает из комбинации эрмитовости лагранжиана и той роли, которую *T* и *CP* играют при их действии на *C*-числа, входящие в лагранжиан. Эрмитовость означает, что заданный член в лагранжиане, содержащий некоторый оператор  $O(b, x)$  и некоторое *C*-число  $a$ , имеет вид

$$L(x) = aO(x) + a^* O^+(x). \quad (6.96)$$

Под действием *T* оператор не меняется (6.3а исключением замены  $t \rightarrow -t$ ),  $a$  — число испытывает комплексное сопряжение

$$O(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} O(\vec{x}, -t); \quad a \xrightarrow{T} a^*. \quad (6.97)$$

Относительно же преобразования *CP*, оператор  $O$  переходит в эрмитово сопряженный, *C*-число же не меняется

$$O(\vec{x}, t) \xrightarrow{CP} O^+(-\vec{x}, t); \quad a \xrightarrow{CP} a. \quad (6.98)$$

Объединение же операций *T* и *CP* изменяет эффективно первое слагаемое в (6.96) на второе слагаемое и т.д.

$$\begin{aligned}
L &= aO(x) + a^* O^+(x) \xrightarrow{CPT} L(-x) = \\
&= a^* O^+(-x) + aO(-x), \quad (6.99)
\end{aligned}$$

оставляя действие инвариантным

$$W = \int d^4 x L(x) \xrightarrow{CPT} W. \quad (6.100)$$

## 6.6. *C, P, T* нарушаются, нарушается ли *CPT*?

*C, P, T* симметрии с очень высокой степенью точности сохраняются в электромагнитных и сильных взаимодействиях. Стопроцентное нарушение *P* и *C* открыто в слабых взаимодействиях в 1957 г. *CP* нарушение в распадах нейтральных каонов обнаружено



в 1964 г., а в распадах  $B$ -мезонов – в 1999 г., но мы до сих пор не знаем природы  $CP$ -нарушения. Найдено  $T$ -нарушение в системе нейтральных мезонов и подтверждена  $CPT$ -инвариантность. Что касается гравитации, то трудно предположить экспериментальную проверку  $C$ ,  $P$ ,  $T$  в классическом слабом гравитационном поле, эффекты же квантовой гравитации относятся к Большому Взрыву и образованию черных дыр. Обсудим эффекты нарушения семи симметрий:  $C$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $CP$ ,  $PT$ ,  $CT$  и  $CPT$  в лабораторных экспериментах. Начнем обсуждение с трех ортогональных осей, представляющих нарушение  $C$ ,  $P$  и  $T$ , (рис. 6.1)

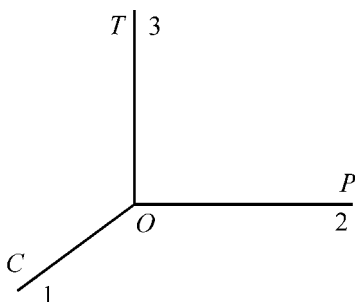


Рис. 6.1

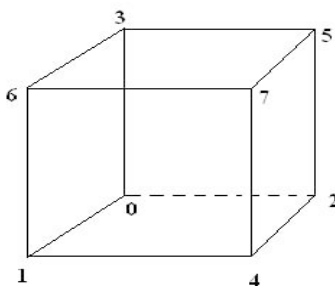


Рис. 6.2

Точка  $O$  на рис. 6.2 в начале координат соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -четные,  $P$ -четные,  $T$ -четные, следовательно,  $CP$ -четные,  $PT$ -четные,  $CT$ -четные  $CPT$ -четные.

Точка 1 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -нечетные,  $P$ -четные,  $T$ -четные, следовательно,  $CP$ -нечетные,  $PT$ -четные,  $CT$ -нечетные  $CPT$ -нечетные.

Точка 2 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -четные,  $P$ -нечетные,  $T$ -четные, следовательно,  $CP$ -четные,  $PT$ -нечетные,  $CT$ -четные и  $CPT$ -нечетные.

Точка 3 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -четные,  $P$ -четные,  $T$ -нечетные, следовательно,  $CP$ -четные,  $PT$ -нечетные,  $CT$ -нечетные и  $CPT$ -нечетные.

Таким образом, строятся первые четыре вершины  $CPT$ -куба. Теперь перейдем к другим вершинам (рис. 6.2): три в плоскостях  $CP$

(точка 4),  $PT$  (точка 5),  $CT$  (точка 6) и последняя вне этих плоскостей (точка 7).

Точка 4 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -нечетные,  $P$ -нечетные,  $T$ -четные, следовательно,  $CP$ -четные,  $PT$ -нечетные,  $CT$ -нечетные и  $CPT$ -четные.

Точка 5 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -четные,  $P$ -нечетные,  $T$ -нечетные, следовательно,  $CP$ -нечетные,  $PT$ -четные,  $CT$ -нечетные и  $CPT$ -четные.

Точка 6 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -нечетные,  $P$ -четные,  $T$ -нечетные, следовательно,  $CP$ -нечетные,  $PT$ -нечетные,  $CT$ -четные и  $CPT$ -четные.

Точка 7 соответствует взаимодействиям, которые  $C$ -нечетные,  $P$ -нечетные,  $T$ -нечетные, следовательно,  $CP$ -четные,  $PT$ -четные,  $CT$ -четные и  $CPT$ -нечетные.

Таким образом, для каждого из семи преобразований имеются четыре четные вершины и четыре нечетные.

Для  $C$ -преобразования вершины 0,2,5,3 – четные; 1,4,7,6 – нечетные.

Для  $P$ -преобразования вершины 0,3,6,1 – четные; 2,5,7,4 – нечетные.

Для  $T$ -преобразования вершины 0,1,4,2 – четные; 3,6,5,7 – нечетные.

Для  $CP$ -преобразования вершины 0,4,7,3 – четные; 1,2,5,6 – нечетные.

Для  $PT$ -преобразования вершины 0,5,7,1 – четные; 2,3,6,4 – нечетные.

Для  $CT$ -преобразования вершины 0,2,7,6 – четные; 1,3,5,4 – нечетные.

Для  $CPT$ -преобразования вершины 0,4,5,6 – четные; 1,2,3,7 – нечетные.

### 6.6.1. $C$ и $P$ -нарушение при сохранении $CP$

Начнем с  $(V-A)$ -взаимодействия слабых заряженных токов, открытых в 1957 г. Произведение  $VV$  и  $AA$  относится к точке  $O$ , а произведение к  $VA$  – к точке 4, поскольку векторный  $V$  ток  $C$ ,  $P$ ,  $T$  – нечетен, а аксиальный  $A$  ток  $C$ ,  $P$  – четен, но  $T$  – нечетен. Экспери-

ментально произведение  $VA$  проявляется в распаде  $K_1 \rightarrow 2\pi$ , а  $VV$  – в распаде  $K_2 \rightarrow 3\pi$ , где  $K_1$  и  $K_2$  соответствуют  $C$  – нечетным и  $C$  – четным суперпозициям  $K^0$  и  $\bar{K}^0$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0) ; \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0). \quad (6.101)$$

Так как  $K_1$  и  $K_2$  оба  $P$ -нечетные (псевдоскаляры), то  $K_1$  –  $CP$ -четен, а  $K_2$  –  $CP$ -нечетен.

Двухпионное состояние с  $J = 0$   $C$ -четное,  $P$ -четное и  $CP$ -четное. Следовательно, распад  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$   $C$ -нечетен,  $P$ -нечетен и  $CP$ -четен. Что касается трехпионного состояния с  $J = 0$ , то оно  $P$ -нечетно независимо от величины относительного углового момента  $l$  и  $L$ . Доминантное состояние с  $l = L = 0$   $C$ -четно. Поэтому распад  $K_2^0 \rightarrow 3\pi$ , главным образом,  $C$ -четен,  $P$ -четен и  $CP$ -четен.

$VA$ -взаимодействие (точка 4) проявляется в корреляции между спином и угловым моментом в  $\beta$ -распадах, распадах  $\mu$  и  $\tau$ -лептонов. Полулептонные распады мезонов и нелептонные распады гиперонов оказываются невозможными без интерференции членов  $VV$  и  $AA$  в квадратах модулей соответствующих амплитуд. То же самое относится к  $P$  и  $C$ -нарушающим корреляциям, вызванным нейтральными токами, открытыми в 1970 г. Все эти процессы осуществляются виртуальными  $W$  и  $Z$  бозонами.

### 6.6.2. $CP$ и $T$ -нарушения

Открытие в 1965 г. двухпионных распадов долгоживущих нейтральных каонов свидетельствовало о том, что  $CP$ -инвариантность нарушается. Эффективное взаимодействие, вызывающее эти распады соответствует точке (6) на рис. 6.2: оно  $C$ -нечетное, оно  $P$ -четное и  $T$ -нечетное, приводит к вакуумным переходам  $K_2$  в  $K_1$  и описывается комплексным параметром  $\varepsilon$ :

$$K_S = K_1 + \varepsilon K_2 ; \quad K_L = K_2 + \varepsilon K_1 . \quad (6.102)$$

Присутствие величины  $\varepsilon$  в соотношении (6.102) означает, что вероятность преобразования  $K$  в  $\bar{K}$  в течение времени  $t$  не равно вероятности преобразования  $\bar{K}$  в  $K$  за это же время. Действительно,

амплитуды различны из-за присутствия двух различных экспонент, описывающих распространение  $K_L$  и  $K_S$ . Это предсказание нарушения  $T$ -инвариантности было экспериментально установлено в 1998 г. коллаборацией CPLEAR. Другое подтверждение нарушения  $T$ -инвариантности получено в экспериментах по асимметрии между плоскостями  $e^+e^-$  и  $\pi^+\pi^-$ , наблюдаемой в распадах  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^- e^+e^-$ .

Сравнительно недавно получено согласие в определении параметра  $\varepsilon'$ , описывающего прямой распад  $K_2$  на  $2\pi$ . Этому процессу отвечает точка 5 на рис. 6.2 ( $C$ -четные,  $P$ -нечетные и  $T$ -четные). Точка 5 также определяет электрические дипольные моменты таких частиц, как нейтрон и электрон. Действительно, дипольный момент определяется членом в гамильтониане  $\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$ , где  $\vec{\sigma}$  представляет собой спин частицы,  $\vec{E}$  – электрическое поле. Этот член  $C$ -четный,  $P$ -нечетный и  $T$ -четный, т.е. взаимодействие  $CPT$ -инвариантно.

Подчеркнем, что на уровне стандартного электрослабого лагранжиана точки 5 и 6 имеют общее происхождение: фазу  $CKM$  матрицы заряженных кварковых токов. Особый интерес к точке 5 связан с очень малым значением  $\theta$ -члена КХД

$$L_\theta = \theta G_{\mu\nu} G_{\rho\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\delta}, \quad (6.103)$$

где  $G_{\mu\nu}$  – тензор напряженности глюонного поля.

### 6.6.3. $CP$ -нарушающие зарядовые асимметрии

Точки 5 и 6 должны проявлять себя в зарядовых асимметриях. Из соотношения (6.102) следует, что ширины полулептонных распадов  $K_L \rightarrow e^+ \nu_e \pi^-$  и  $K_L \rightarrow e^- \nu_e \pi^+$  должны быть разными, причем величина эффекта пропорциональна  $2\text{Re}\varepsilon$ . Эта зарядовая асимметрия измеряется как в электронном, так и в мюонном каналах. Еще одна зарядовая асимметрия была предсказана Okubo еще до открытия  $CP$ -нарушения, но она пока не измерена. Согласно Okubo

$$\frac{\Gamma(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0)}{\Gamma(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+)} \neq \frac{\Gamma(\bar{\Sigma}^- \rightarrow \bar{p}\pi^0)}{\Gamma(\bar{\Sigma}^- \rightarrow \bar{n}\pi^-)}. \quad (6.104)$$

Чтобы показать, как появляются эти эффекты, заметим, что амплитуды  $S$  и  $P$  волн

$$\begin{aligned} A(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0) &= \sqrt{\frac{2}{3}}A_3 - \sqrt{\frac{1}{3}}A_1; \\ A(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+) &= \sqrt{\frac{1}{3}}A_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}A_1, \end{aligned} \quad (6.105)$$

где  $A_3$  и  $A_1$  – амплитуды конечных состояний с изоспином  $T = 3/2$  и  $T = 1/2$ . Подобные же соотношения имеют место для античастиц

$$\begin{aligned} \bar{A}(\bar{\Sigma}^- \rightarrow \bar{p}\pi^0) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{A}_3 - \sqrt{\frac{1}{3}}\bar{A}_1; \\ \bar{A}(\bar{\Sigma}^- \rightarrow \bar{n}\pi^-) &= \sqrt{\frac{1}{3}}\bar{A}_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{A}_1. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Для простоты рассмотрим только  $S$ -волновые амплитуды. При этом мы не теряем общности, поскольку  $S$ - и  $P$ -волны в выражениях для парциальных ширин не интерферируют. Модули изотопических амплитуд, как и фазовые сдвиги, вследствие взаимодействий в конечном состоянии, одинаковые для частиц и античастиц ( $\bar{A}_1 = A_1$ ,  $\bar{A}_3 = A_3$ ,  $\bar{\delta}_1 = \delta_1$ ,  $\bar{\delta}_3 = \delta_3$ ), однако  $CP$ -нарушающие фазы имеют противоположные знаки (6.  $\bar{\Delta}_1 = -\Delta_1$ ,  $\bar{\Delta}_3 = -\Delta_3$ ). В результате появляется неравенство (6.104), если  $\delta_3 \neq \delta_1$  и  $\Delta_3 \neq \Delta_1$ .

#### 6.6.4. Проверки $CPT$ с античастицами

Вера в  $CPT$ -инвариантность основана на квантовой теории поля, в частности, на локальности лагранжиана, его лоренц-инвариантности и эрмитовости. Можно ожидать, что квантовая теория поля является некоторым приближением более фундаментальной теории (суперструн?). Так или иначе, независимо от конкретного источника  $CPT$ -нарушения, для сравнения предсказаний теории с экспериментом используется терминология квантовой теории поля.

Большинство явлений, предлагаемых для проверки  $CPT$ -симметрии, относятся к точке 1: они  $C$ -нечетны и  $PT$ -четны. К ним относятся:

1) поиски разницы в массах частиц и античастиц ( $m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}$ ,  $m_{K^+} - m_{K^-}$ ,  $m_{e^-} - m_{e^+}$ ,  $m_n - m_{\bar{n}}$  и т.д.);

2) поиски отличных от нуля сумм магнитных моментов частиц и античастиц ( $\mu_{\mu^+} \neq -\mu_{\mu^-}$ ,  $\mu_{e^+} \neq -\mu_{e^-}$ ,  $\mu_{p^+} \neq -\mu_{p^-}$  и т.д.).

Особенно популярны рассуждения об отличных от нуля разностях масс нейтрино и антинейтрино. Большинство этих рассуждений связано с нарушением Лоренц – инвариантности и (или) локальности. *CPT* – нарушающий эффект, вследствие интерференции точек 3 и 0, мог бы проявляться в поляризации мюона, перпендикулярной плоскостям распада  $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \pi^-$  и  $K_L^0 \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \pi^+$ , если бы она была одинаковой для обоих распадов. В этом случае корреляция  $\vec{S}_\mu [\vec{k}_\mu \times \vec{k}_\pi]$  является *C*-четной, но *T*-нечетной. Следовательно, эта корреляция *CPT* нечетна. Однако «фальшивое» *T*-нарушение, могло быть вызвано пион-мюонным рассеянием в конечном состоянии в точке 0 с фазой  $\delta \sim \alpha/3$ . Экспериментальный верхний предел на эту поляризацию составляет 0.5%. Заметим, что такая же поперечная поляризация в распадах  $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \pi^0$  и  $K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \pi^0$  не может быть фальшивой из-за электромагнитного рассеяния в конечном состоянии.

В качестве примера проявления точки 7 рассмотрим электрический дипольный момент частицы и античастицы, скажем,  $e^-$ ,  $e^+$  и  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ . Если *P* и *T* – нарушены, а *C* – сохраняется (точка 6), электрические дипольные моменты отличны от нуля, однако их сумма должна обращаться в ноль, поскольку они (подобно зарядам и магнитным дипольным моментам, описываемым точкой 0) должны иметь противоположные знаки. Это следует из отрицательной *C*-четности фотона.

Если снова обратиться к точке 7, то обнаружим, что она должна быть не только *P* и *T*-нечетной, но и *C*-нечетной. Это обстоятельство требует дополнительного слагаемого в лагранжиане, которое приводит не только к тому же абсолютному значению, но и к одному знаку электрических дипольных моментов частицы и анти-

частицы, т.е.  $d_{\nu_e} \neq d_{\bar{\nu}_e}$ . Подобные неравенства справедливы для всех лептонов и кварков, следовательно, и для адронов.

### 6.6.5. *CPT* и эрмитовость

Что могло бы означать обнаружение циркулярной поляризации фотонов от распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  (или  $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ )? Легко понять, что это наблюдение означало бы нарушение *CPT*-симметрии. Действительно, *C* сохраняется в этом распаде, в то время как произведение  $\vec{S} \cdot \vec{k}$  *P*-нечетно, но *T*-четно ( $\vec{S}$  и  $\vec{k}$  – фотонный спин и импульс). Подобное же рассуждение применимо к продольным поляризациям мюонов в распаде  $\pi^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ , наблюдаемым на уровне  $6 \cdot 10^{-6}$ . Корреляция  $\vec{S}_\mu \cdot \vec{k}_\mu$  *P*-нечетная и *T*-четная. С другой стороны, она должна быть *C*-четной, поскольку  $\eta^0$  – *C*-четное. Поэтому наблюдение  $\vec{S}_\mu \cdot \vec{k}_\mu$  корреляции свидетельствовало бы о *CPT*-нарушении.

Обсудим два слагаемых в лагранжиане, интерференция которых могла бы привести к корреляции  $\vec{S} \cdot \vec{k}$  в распаде  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Первое из них – скаляр  $g\phi F_{\mu\nu}F_{\rho\delta}\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}$ , второе – псевдоскаляр  $h\phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , где  $\phi$ -псевдоскалярное пионное поле, которое *C*-четное, *P*-нечетное и *T*-нечетное.

Вследствие эрмитовости лагранжиана, величины  $g$  и  $h$  должны быть вещественными. Степень же циркулярной поляризации фотонов пропорциональна  $g^*h - gh^*$ . Следовательно, для эрмитового лагранжиана циркулярная поляризация на древесном уровне должна обращаться в ноль. Она могла бы появиться из-за разности поглощательных частей рис. 6.3 в скалярных и псевдоскалярных амплитудах.

Если же степень поляризации оказывается другой по сравнению с диаграммой на рис. 6.3, то это означает нарушение эрмитовости.

Рассмотрим сначала случай, когда  $\text{Im } g = 0$ ,  $\text{Re } h = 0$ . Тогда член, пропорциональный  $g$ , относится к точке 0, член же, пропорциональный  $h$  – к точке 2, поскольку он *C*-четен, *P*-нечетен, *T*-четен, следовательно, *CPT*-нечетен.

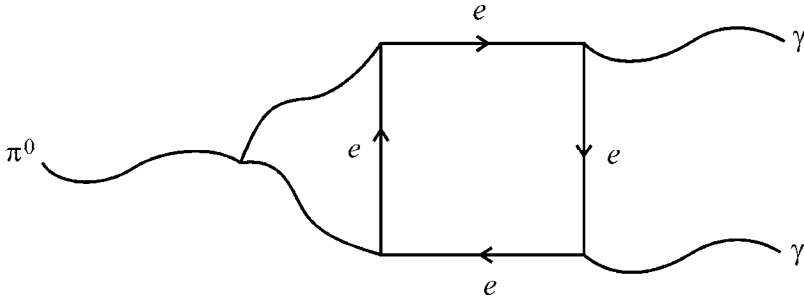


Рис. 6.3

В случае же  $\text{Re } g = 0$ ,  $\text{Im } h = 0$   $g$ -член  $C$ -четен,  $P$ -нечетен,  $T$ -нечетен, т.е.  $CPT$ -четен (точка 5). Интерференция точек 3 и 5 (а также точек 2 и 0) дают  $P$  и  $CPT$  нарушающую корреляцию  $\vec{S} \cdot \vec{k}$ . В общем случае, когда  $g$  и  $h$  – комплексные

$$g^* h - h^* g = 2i \text{Re } g \cdot \text{Im } h - 2i \text{Im } g \cdot \text{Re } h \quad (6.107)$$

и первый член справа в выражении (6.107) характеризует интерференцию точек 2 и 0, а второй интерференцию точек 3 и 5.

В отличие от случая разности масс частицы и античастицы, примеры  $CPT$ -нарушающих поляризаций могут быть сформулированы лоренц-инвариантным образом. На языке лагранжиана,  $CPT$ -нарушающие члены имеют «неправильную» фазу, нарушающую эрмитовость. Антиэрмитовы члены в лагранжиане нарушают унитарность  $S$ -матрицы.



### 7.1. Проблема иерархий

Электрослабый сектор стандартной модели содержит параметр размерности энергии (электрослабый масштаб) – вакуумное среднее хиггсовского поля

$$v \sim \text{ГэВ}. \quad (7.1)$$

Этот параметр, в принципе, задаёт масштаб масс в теории. Так, массы  $W$  (пренебрегая радиационными поправками):

$$M_W = \frac{gv}{2} \sim 80 \text{ ГэВ}, \quad (7.2)$$

А масса хиггсовского бозона

$$M_H = v\sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad (7.3)$$

где  $g$  –  $SU(2)$  калибровочная константа,  $\lambda$  – константа самовзаимодействия в хиггсовском потенциале

$$V = -\mu^2 \phi^+ \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^+ \phi)^2 \quad (7.4)$$

причём  $\lambda > 0$  и  $\mu^2 > 0$ .

В потенциале (7.4) поле  $\phi$  –  $SU(2)$  дублет:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Заметим, что отрицательный знак перед  $\mu^2$  существенен, поскольку только в этом случае “работает” механизм спонтанного нарушения симметрии. При этом минимум потенциала

$$|\phi| = \frac{\sqrt{2}\mu}{\lambda} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (7.6)$$

интерпретируется как ненулевой минимум классического потенциала. В свою очередь, классический минимум следует рассматривать как вакуумное среднее квантового поля. Если  $(-\mu^2)$  в потенциале заменить положительной величиной  $\mu^2$ , то классическое рав-

новесное значение будет в начале координат  $V = 0$ , и все частицы будут безмассовыми. Однако всё это справедливо на древесном уровне (без учёта петлевых поправок). Что произойдёт, если учесть петлевые поправки? Стандартная модель – перенормируемая теория, а это значит, что она даёт конечный результат с учётом всех поправок (петель) высших порядков, даже если виртуальные импульсы во всех петлях устремить к бесконечности. Однако это не означает, что в петлевых интегралах

$$\int^{\Lambda} d^4 K f(K, \text{внешние импульсы}) \quad (7.7)$$

следует считать параметр обрезания  $\Lambda$  стремящимся к бесконечности. Более обосновано, пожалуй, считать стандартную модель частью более общей теории, которая включает неизвестную пока “новую физику” при больших энергиях. Параметр  $\Lambda$  – это масштаб, на котором появляется новая физика и на котором необходимо модифицировать стандартную модель. В конце концов, мы ожидаем новую физику на масштабах, когда становятся существенными эффекты квантовой гравитации. Этот масштаб называют планковской массой

$$M_{Pl} = (G_N)^{-1/2} \sim 1,2 \cdot 10^{10} \text{ ГэВ}. \quad (7.8)$$

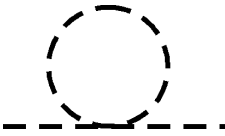


Рис. 7.1

Если  $M_{Pl}$  – действительно масштаб новой физики, то при учёте петлевых поправок в стандартной модели возникают серьёзные трудности. Действительно, четырёхбозонное взаимодействие в соотношении (7.4) в однопетлевом приближении даёт вклад в собственную энергию, представленный на рис. 7.1.

Этот вклад пропорционален

$$\lambda \int^{\Lambda} d^4 K \frac{1}{K^2 - M_H^2}. \quad (7.9)$$

Интеграл квадратично расходится и даёт поправку

$$\lambda \Lambda^2 \phi^+ \phi \quad (7.10)$$

к слагаемому  $-\mu^2 \phi^+ \phi$  в потенциале  $V$ .

Величина  $\upsilon$  связана с  $\mu$  соотношением (7.6) и фиксируется феноменологическим значением (7.1). Поэтому кажется, что величина  $\mu$  вряд ли больше нескольких сотен ГэВ. С другой стороны, если  $\Lambda \sim M_{Pl} \sim 10^{19}$  ГэВ, то однопетлевая поправка к “ $-\mu^2$ ” катастрофически больше  $(100 \text{ ГэВ})^2$  и положительна! Поэтому чтобы получить  $-(100 \text{ ГэВ})^2$  после учёта всех петлевых поправок, необходимо стартовать с гигантского отрицательного значения параметра  $(-\mu^2)$  в лагранжиане и надеяться на замечательные сокращения с  $(10^{19} \text{ ГэВ})^2$  до  $-(100 \text{ ГэВ})^2$ .

Это сокращение (“fine tuning”), включающее параметр  $\mu$ , влияет не только на массу хиггс-бозона (из (7.3) и (7.6)):

$$M_H = \sqrt{2}\mu, \quad (7.11)$$

$$\text{но и на массу } W: \quad M_W = \frac{g\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (7.12)$$

а также на массы всех частиц стандартной модели, поскольку они зависят от  $\upsilon$  и, следовательно, от  $\mu$ .

Но почему это так нас заботит, ведь нечто подобное всегда происходит с массовыми членами в перенормируемых теоремах? Эта проблема особенно острая в теориях со скалярными частицами (в отличие от теорий только с фермионами и калибровочными полями, которые способны формировать скалярные частицы как связанные состояния). Примером последнего типа теории может служить квантовая электродинамика (КЭД). Аналогом рис. 7.1 в КЭД будет однопетлевой процесс, в котором электрон испускает, а затем поглощает фотон. Этому процессу соответствует поправка  $\delta m$  к массе фермиона в лагранжиане

$$\delta m \sim \alpha \int^{\Lambda} \frac{d^4 K}{K K^2} \sim \alpha \Lambda. \quad (7.13)$$

При более точном вычислении интеграла

$$\delta m \sim \alpha m \ln \Lambda. \quad (7.14)$$

Поэтому даже при  $\Lambda \sim 10^{19}$  ГэВ  $\delta m \sim m$ , и в “fine tuning” нет необходимости.

Почему же получается  $\delta m \sim m$ ? Дело в том, что лагранжиан КЭД в пределе  $m \rightarrow 0$  кирально инвариантен. При киральных преобразованиях

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\Psi \quad (7.15)$$

для  $U(1)$ -симметрии и

$$\Psi \rightarrow e^{\frac{i\vec{a}\vec{\tau}}{2}\gamma_5}\Psi \quad (7.16)$$

в  $SU(2)$ -случае.

Киральная симметрия гарантирует, что все радиационные поправки к массе  $m$ , вычисленные в теории возмущений, будут исчезать в пределе  $m \rightarrow 0$ . Поэтому поправки к  $\delta m$  должны быть пропорциональны  $m$ , а зависимость от  $\Lambda$  (даже из соображений размерности) – только логарифмическая.

Что происходит с поправками к массам калибровочных частиц? В КЭД ненарушенная калибровочная симметрия обеспечивает  $m_\gamma \rightarrow 0$  во всех порядках теории возмущений. Другими словами, калибровочная инвариантность гарантирует, что члены вида

$$m_\gamma^2 A^\mu A_\mu \quad (7.17)$$

могут генерироваться за счёт радиационных поправок в ненарушенной калибровочной теории. С другой стороны, ненулевые массы  $W$  и  $Z$ -бозонов в стандартной модели возникают на непертурбативном уровне посредством спонтанного нарушения симметрии и вакуумного среднего  $v$ . Если  $v \equiv 0$ , то  $W$ ,  $Z$ , как и фотон, будут безмассовыми. Но  $v \sim \mu$ , поэтому массы, приобретаемые  $W$  и  $Z$  при нарушении симметрии, чувствительны к  $\Lambda$  и  $M_H$ . Можно ли найти симметрию, которая бы, подобно киральной или калибровочной симметрии, контролировала бы поправки  $\delta m$  к массе скалярных частиц в лагранжиане? Очевидно, что существуют фермионные петлевые поправки к  $-\mu^2\phi^+\phi$ , в которых частица  $\phi$  переходит в фермион-антифермионную пару, которая затем снова аннигилирует в  $\phi$ -частицу. Этот процесс даёт вклад

$$-g_f^2 \int \frac{d^4 K}{K K} \phi^+ \phi \sim g_f^2 \phi^+ \phi \Lambda^2. \quad (7.18)$$

Знак этого выражения существенен, он возникает за счёт замкнутой фермионной петли. Объединяя (7.10) и (7.18), получаем полную однопетлевую поправку

$$(\lambda - g_f^2)\Lambda^2\phi^+\phi. \quad (7.19)$$

Сразу возникает соблазн приравнять

$$\lambda = g_f^2, \quad (7.20)$$

тогда квадратичная по  $\Lambda$  поправка обратится в ноль. Именно такое сокращение происходит в суперсимметричных теориях. После сокращения члена с  $\Lambda^2$  две диаграммы для собственной энергии хиггсовского бозона дают

$$\sim \lambda(M_H^2 - m_f^2)\ln\Lambda. \quad (7.21)$$

Эта поправка может быть порядка  $M_H^2$ , если все бозоны и фермионы в теории имеют массы, не превышающие нескольких ТэВ. Частицы, участвующие в механизме сокращения расходимостей, должны быть приближенно вырожденными (указывая на приближённый характер SUSY) и не слишком превышать по массе  $v$  (или  $M_H$ ).

Таким образом, SUSY стабилизирует иерархию  $M_{H,W} \ll M_{Pl}$  в том смысле, что радиационные поправки не смещают  $M_{H,W}$  к большому  $\Lambda$ .

## 7.2. Теоретические основы SUSY

Как мы уже многократно подчёркивали, идея симметрий оказалась весьма плодотворной как в физике вообще, так и в физике элементарных частиц, в частности. Правоммерно задать вопрос: используются ли в современных квантовых теориях поля все симметрии, совместимые с лоренц-инвариантностью?

Обратимся к симметриям зарядов, известных в стандартной модели. Начнём с электрического заряда

$$Q = e \int d^3\vec{x} \Psi^+ \Psi \quad (7.22)$$

или  $SU(2)$ -заряда (изоспинового заряда)

$$\bar{T} = g \int d^3 \vec{x} \Psi^+ \left( \frac{\vec{\tau}}{2} \right) \Psi, \quad (7.23)$$

где в выражении (7.23)  $\Psi$  –  $SU(2)$  дублет. Как в (7.22), так и в (7.23)  $\Psi$  – фермионное поле.

Все эти операторы симметрии являются лоренцевскими скалярами (они не несут лоренцевских индексов, как вектора или спиноры). Если эти спиноры действуют на состояние с определённым спином, то они не могут изменить спин:

$$Q|I> = | \text{тот же } I, \text{ но другой член мультиплета} >. \quad (7.24)$$

Нам известен один “векторный” заряд – оператор 4-импульса, генерирующий пространство-временные смещения, чьи собственные значения – сохраняющиеся 4-импульсы. Операторы углового момента относятся к антисимметричным тензорам  $M_{\mu\nu}$ . Есть ли другие сохраняющиеся симметричные тензорные заряды  $Q_{\mu\nu}$ ?

Таких зарядов нет. В самом деле, выберем заряд, действующий на состояние частицы с 4-импульсом  $p$ :

$$Q_{\mu\nu} |p\rangle = (\alpha p_\mu p_\nu + \beta g_{\mu\nu}) |p\rangle, \quad (7.25)$$

где правая часть записана из соображений ковариантности (наиболее общее выражение из имеющихся в нашем распоряжении тензоров). Далее выберем двухчастичное состояние  $|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle$  и предположим, что  $Q_{\mu\nu}$  аддитивны, сохраняются и действуют в каждый момент времени лишь на одну частицу, как обычные заряды.

Тогда

$$Q_{\mu\nu} |p^{(1)}, p^{(2)}\rangle = (\alpha(p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)}) + 2\beta g_{\mu\nu}) |p^{(1)}, p^{(2)}\rangle. \quad (7.26)$$

При упругом рассеянии  $1+2 \rightarrow 3+4$  необходимо считать (из-за сохранения собственных значений)

$$p_\mu^{(1)} p_\nu^{(2)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)} = p_\mu^{(3)} p_\nu^{(3)} + p_\mu^{(4)} p_\nu^{(4)}. \quad (7.27)$$

В силу сохранения 4-импульса

$$p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)} + p_\mu^{(4)}. \quad (7.28)$$

Общее решение уравнений (7.27) и (7.28):

$$p_{\mu}^{(1)} = p_{\mu}^{(3)}, \quad p_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}^{(4)} \quad \text{или} \quad p_{\mu}^{(1)} = p_{\mu}^{(4)}, \quad p_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}^{(3)}. \quad (7.29)$$

Последние условия означают, что рассеяние происходит только вперёд или только назад. Очевидно, что такое ограничение слишком обременительно. Можно сделать вывод: не существует других сохраняющихся операторов (кроме  $P_{\mu}$  и  $M_{\mu\nu}$ ) с нетривиальными лоренцевскими трансформационными свойствами (т.е. не лоренцевских скаляров). Существование операторов  $P_{\mu}$  и  $M_{\mu\nu}$  допускает всевозможные процессы рассеяния. Допущение других законов сохранения жёстко ограничивает возможные конфигурации.

Эти рассуждения, однако, не исключают заряды, преобразующиеся при Лоренц-преобразованиях как спиноры, т.е. как фермионные поля. Можно обозначить такой заряд через  $Q_a$ , где индекс “ $a$ ” указывает на спинорную компоненту. Для такого заряда соотношение (7.24) уже не выполняется:

$$Q_a |I\rangle = |I \pm 1/2\rangle. \quad (7.30)$$

Такой оператор не даёт вклада в матричный элемент прогресса упругого рассеяния  $2 \rightarrow 2$ , поскольку спины частиц не меняются.

Возникает вопрос: можно ли включить такие спинорные операторы, наряду с  $P_{\mu}$  и  $M_{\mu\nu}$  в согласованную алгебраическую схему? Положительный ответ на этот вопрос был дан в рамках алгебры суперсимметрии Гельфандом и Лихтманом. Под алгеброй, как обычно, понимается набор коммутационных соотношений между “зарядами”, являющимися генераторами соответствующих преобразований симметрии. Однако заряды, имеющие спинорный характер, должны антикоммутировать между собой. Поэтому алгебра суперсимметрии содержит как коммутационные, так и антикоммутационные соотношения. Как выглядит эта алгебра? Поскольку спинорные заряды  $Q_a$  – операторы симметрии, они должны коммутировать с гамильтонианом системы:

$$[Q_a, H] = 0, \quad (7.31)$$

антикоммутатор двух зарядов тоже коммутирует с гамильтонианом:

$$[\{Q_a, Q_b\}, H] = 0. \quad (7.32)$$

Отметим, что спинорные  $Q_a$  имеют две компоненты, т.е. симметричный объект  $\{Q_a, Q_b\} = Q_a Q_b + Q_b Q_a$  имеет три независимые компоненты, и поэтому должны преобразовываться как объекты со спином 1 (точно так же, как симметричная комбинация двух волновых функций со спином 1/2). Но в релятивистской теории объект со спином 1 должен описываться 4-вектором, а не 3-вектором. Этот 4-вектор, согласно соотношению (7.32), сохраняется. Существует лишь один такой сохраняющийся оператор  $P_\mu$ . Поэтому  $Q_a$  должен удовлетворять алгебре, в которой

$$\{Q_a, Q_b\} \sim P_\mu. \quad (7.33)$$

Однако в выражении (7.33) нет баланса индексов справа и слева. Этот вопрос будет рассмотрен ниже, здесь же мы обсудим, в чём заключается основная идея суперсимметрии. Из соотношения (7.33) следует, что если провести два SUSY преобразования, генерируемых операторами  $Q_a$ , получим оператор энергии-импульса. Или, другими словами, получим оператор пространственно-временной трансляции или производную. Можно сказать, что спинорные операторы SUSY  $Q_a$  ведут себя как квадратные корни из 4-х импульсов или как квадратные корни из производных. Четырёхмерные производные жёстко связывают наши представления с четырёхмерным пространством-временем. Обсуждая сейчас возможности существования квадратных корней из этих производных, мы существенно расширяем концепцию пространства-времени. Наверное, здесь правомерна аналогия с введением квадратного корня из  $(-1)$  и расширением вещественной оси в комплексную плоскость. Таким образом, следует допустить, что пространственно-временные координаты значительно расширяются за счёт включения других степеней свободы, причём новые степени свободы связаны со стандартными степенями свободы преобразованиями, генерируемыми операторами  $Q_a$ . Эти новые степени свободы – фермионные. SUSY расширяет пространство-время до суперпространства, вводя “фермионные измерения”.

Часто говорят, что SUSY подразумевает (если это точная симметрия) вырожденность мультиплетов бозонов и фермионов.



### 7.3. Спиноры

Пусть лагранжиан теории содержит набор полей  $\Psi_r$  – они могут быть бозонами или фермионами. Считаем, что лагранжиан инвариантен относительно инфинитезимальных преобразований полей:

$$\delta_\varepsilon \Psi_r = -i\varepsilon \lambda_{rs} \Psi_s, \quad (7.34)$$

где по повторяющемуся индексу проводится суммирование,  $\lambda_{rs}$  – некоторые постоянные коэффициенты (например, элементы матриц Паули),  $\varepsilon$  – инфинитезимальный параметр.

Преобразование суперсимметрии выглядит похоже, только бозонные поля преобразуются в фермионные:

$$\delta_\varepsilon \phi \approx \zeta \Psi, \quad (7.35)$$

где  $\phi$  – бозонное (скажем, со спином 0),  $\Psi$  – фермионное поле (со спином 1/2),  $\zeta$  – инфинитезимальный параметр (он должен быть спинором). Заметим, что число степеней свободы (фермионных и бозонных) в обеих частях соотношения (7.35) должно быть одинаковым, точно так же, как число полей  $r = 1, 2, \dots, N$  в левой части (7.34) равно числу полей  $J = 1, 2, \dots$ , в правой части.

Простейший пример бозонного поля – нейтральное скалярное поле, имеющее только одну вещественную компоненту  $\phi = \phi^+$ . С другой стороны, нет фермионного поля только с одной компонентой. Спинор имеет, по крайней мере, две компоненты. Это означает, что следует рассматривать бозонное поле с двумя степенями свободы, и это будет комплексное (заряженное) скалярное поле.

Какого типа двухкомпонентное фермионное поле нужно подбирать в пару к комплексному скалярному полю?

В уравнение Дирака входит не двухкомпонентное, а четырёхкомпонентное поле. В простейшем варианте SUSY участвуют, однако, комплексное скалярное поле и двухкомпонентное фермионное поле. Дираковские поля на самом деле содержат два двухкомпонентных поля. Нужно “достроить” дираковское поле и понять природу двух различных двухкомпонентных полей. Дело в том, что две “половинки” 4-х компонентного дираковского поля по-разному ведут себя при преобразованиях Лоренца. Понимание этого аспекта очень важно с точки зрения записи SUSY преобразований, соответствующих преобразованиях Лоренца. Например, левая часть соот-

ношения (7.35) содержит комплексное скалярное поле (спин 0), причём его как вещественная, так и мнимая компоненты несут спин 0. Следовательно, они инвариантны относительно преобразований Лоренца. В правой же части (7.35) – двухкомпонентный спинор (спин 1/2)  $\Psi$ , который неинвариантен относительно преобразований Лоренца. Но параметр  $\zeta$  – тоже двухкомпонентный спинор, поэтому надо понять, как “совместить”  $\zeta$  и  $\Psi$ , чтобы в правой части (7.35) получить те же трансформационные свойства, что и в левой.

#### 7.4. Спиноры и преобразования Лоренца

Начнём обсуждение с уравнения Дирака в импульсном пространстве:

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)\Psi = E\Psi. \quad (7.36)$$

Если выбрать представление

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

то гамма-матрицы

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

Как обычно  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  – матрицы Паули. Представив поле (7.36) в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (7.39)$$

получим из уравнения Дирака

$$(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\psi = m\chi; \quad (7.40)$$

$$(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi = m\psi. \quad (7.41)$$

В пределе  $m \rightarrow 0$   $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \psi_0 = E \psi_0$  и  $E \rightarrow |\vec{p}|$ , т.е. в безмассовом пределе

$$\left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_0 = \psi_0. \quad (7.42)$$

Отсюда видно, что  $\psi_0$  – собственное состояние оператора спиральности  $\frac{\vec{\sigma} \times \vec{p}}{|\vec{p}|}$  с собственным значением (+1) – положительной спи-

ральностью. Соответственно, в безмассовом пределе, (7.41) характеризует состояние  $\chi_0$  с отрицательной спиральностью.

При  $m \neq 0$   $\psi$  и  $\chi$  не являются собственными состояниями спиральности – массовый член их смешивает. Как будет показано ниже, именно эти двухкомпонентные объекты  $\psi$  и  $\chi$  имеют вполне определённые лоренцевские трансформационные свойства, и именно их следует рассматривать при построении различных суперсимметричных моделей.

Поля  $\psi$  и  $\chi$ , не являясь собственными состояниями спиральности, будут собственными состояниями оператора  $\gamma_5$ . В самом деле:

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Эти два собственных  $\gamma_5$ -состояния можно построить из первоначального поля  $\Psi$ , используя проекционные операторы

$$P_R = \frac{(1 + \gamma_5)}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (7.44)$$

$$P_L = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

Тогда

$$P_R \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_L \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

Легко проверить, что  $P_R P_L = 0$ ,  $P_R^2 = P_L^2 = 1$ . Собственные состояния оператора  $\gamma_5$  называются киральностями:  $\psi$  имеет киральность (+1), а  $\chi$  – киральность (–1). По не совсем удачной терминологии, киральность (+) обозначается через R (правая киральность), а киральность (–) – L (левая), несмотря на то, что (как было указано выше)  $\psi$  и  $\chi$  при  $m \neq 0$  не являются собственными значениями спиральности. Часто 2-х компонентный спинор “ $\psi$ -типа” обозначается как  $\psi_R$ , а “ $\chi$ -типа” – как  $\chi_L$ . Далее будем опускать индексы R и L, имея в виду, что  $\psi$  находится в R-состоянии, а  $\chi$  – в L-состоянии.

Поля  $\psi$  и  $\chi$  обладают вполне определёнными лоренцевскими свойствами. Как известно, лоренцевские преобразования включают в себя два типа преобразований: вращения и сдвиги. Достаточно рассмотреть инфинитезимальные преобразования, которые можно определить по их действию на 4-вектор, например, на 4-вектор

энергии-импульса  $(E, \vec{p})$ . При инфинитезимальном 3-мерном вращении:

$$E \rightarrow E' = E; \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p}' = \vec{p} - \vec{\varepsilon} \times \vec{p}, \quad (7.47)$$

где  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  – три инфинитезимальных параметра, определяющие вращение.

При преобразованиях сдвига

$$E \rightarrow E' = E - \vec{\eta} \vec{p}, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p}' = \vec{p} - \vec{\eta} E, \quad (7.48)$$

где  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  – три инфинитезимальных скорости.

Таким образом,  $\psi$  и  $\chi$  при лоренцевских преобразованиях изменяются следующим образом:

$$\psi \rightarrow \psi' = \left( 1 + i \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2} \right) \psi; \quad (7.49)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = \left( 1 + i \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2} \right) \chi. \quad (7.50)$$

Уравнения (7.49), (7.50) очень важны, поскольку они дают “рецепт” построения спиноров  $\psi'$  и  $\chi'$  в повернутой и сдвинутой системе с помощью исходных спиноров  $\psi$  и  $\chi$ . Иначе говоря,  $\psi'$  и  $\chi'$  из соотношений (7.49), (7.50) удовлетворяют “штрихованному” аналогу уравнений (7.40) и (7.41):

$$(E' - \vec{\sigma} \vec{p}') \psi' = m \chi'; \quad (7.51)$$

$$(E' + \vec{\sigma} \vec{p}') \chi' = m \psi'. \quad (7.52)$$

Проверим это утверждение в частном случае – для преобразований сдвига. Определим  $V_{\vec{\eta}} = \left( 1 - \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2} \right)$ . Так как  $\vec{\eta}$  – инфинитезимальный,

то  $V_{\vec{\eta}}^{-1} = \left( 1 + \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2} \right)$ . Домножим (7.40) слева на  $V_{\vec{\eta}}^{-1}$  и вставим единичную матрицу  $V_{\vec{\eta}}^{-1} V_{\vec{\eta}}$ :

$$\left[ V_{\vec{\eta}}^{-1} (E - \vec{\sigma} \vec{p}) V_{\vec{\eta}}^{-1} \right] V_{\vec{\eta}} \psi = m V_{\vec{\eta}}^{-1} \chi. \quad (7.53)$$

Если выполняется соотношение (7.49), то  $\psi' = V_{\vec{\eta}} \psi$ . Аналогично, если выполняется (7.50), то  $\chi' = V_{\vec{\eta}}^{-1} \chi$  для чистых сдвигов. Поэтому

для установления полной согласованности соотношений (7.49), (7.50), (7.51) нужно показать, что

$$V_{\tilde{\eta}}^{-1} (E - \vec{\sigma} \vec{p}) V_{\tilde{\eta}}^{-1} = (E' - \vec{\sigma} \vec{p}'). \quad (7.54)$$

Это равенство следует из соотношения

$$\left(1 + \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2}\right) (E - \vec{\sigma} \vec{p}) \left(1 + \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2}\right) = (E - \vec{\eta} \vec{p}) - \vec{\sigma} (\vec{p} - E \vec{\eta}) \quad (7.55)$$

в первом порядке по  $\vec{\eta}$  правая часть (7.55) совпадает с  $(E' - \vec{\sigma} \vec{p}')$ .

Возвращаясь к соотношениям (7.49) и (7.50), заметим, что  $\psi$  и  $\chi$  ведут себя одинаково при вращениях (у них спин 1/2), но по-разному при сдвигах.

Интересно, что есть два типа двухкомпонентных спиноров, отличающихся характером преобразований при сдвигах. Оба типа используются при построении 4-х компонентного дираковского спинора. В SUSY обычно работают с двухкомпонентными спинорами  $\psi$  и  $\chi$  (с индексами R и L). Следует отметить ещё одну важную особенность соотношений (7.49) и (7.50). Пусть  $V$ -матрица преобразования в соотношении (7.49):

$$V = \left(1 + i \frac{\vec{\epsilon} \vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2}\right). \quad (7.56)$$

Тогда 
$$V^{-1} = \left(1 - i \frac{\vec{\epsilon} \vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2}\right). \quad (7.57)$$

Однако 
$$V^{+} = \left(1 - i \frac{\vec{\epsilon} \vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2}\right) \quad (7.58)$$

в силу эрмитовости матриц  $\vec{\sigma}$ .

Поэтому

$$(V^{+})^{-1} = (V^{-1})^{+} = \left(1 + i \frac{\vec{\epsilon} \vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{\eta} \vec{\sigma}}{2}\right), \quad (7.59)$$

а это есть матрица, входящая в соотношение (7.50). Тогда можно компактно записать

$$\psi' = V \psi, \quad \chi' = (V^{+})^{-1} \chi. \quad (7.60)$$

## 7.5. Построение инвариантов и 4-векторов из 2-компонентных спиноров

Напомним некоторые известные свойства уравнения Дирака. Из 4-компонентного дираковского спинора можно образовать лоренцевский инвариант

$$\bar{\Psi}\Psi = \Psi^+\beta\Psi \quad (7.61)$$

и 4-х вектор

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \Psi^+\beta(\beta, \beta\vec{\alpha})\Psi = \Psi^+(1, \vec{\alpha})\Psi. \quad (7.62)$$

В терминах 2-компонентных объектов  $\psi$  и  $\chi$  соотношение (7.61) выглядит следующим образом:

$$(\psi^+\chi^+)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \psi^+\chi + \chi^+\psi. \quad (7.63)$$

С помощью соотношения (7.60) легко проверить, что правая часть (7.63) – инвариант. В самом деле,

$$\psi^+\chi \rightarrow \psi^+\chi' = \psi^+V^+\left(V^+\right)^{-1}\chi = \psi^+\chi, \quad (7.64)$$

аналогично и для  $\chi^+\psi$ . Из (7.62) для 4-вектора имеем

$$\begin{aligned} (\psi^+\chi^+)\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \\ = (\psi^+\psi + \chi^+\chi, \psi^+\vec{\sigma}\psi - \chi^+\vec{\sigma}\chi) = \psi^+\sigma^\mu\psi + \chi^+\bar{\sigma}^\mu\chi, \end{aligned} \quad (7.65)$$

где введены обозначения

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}). \quad (7.66)$$

Комбинации  $\psi^+\sigma^\mu\psi$  и  $\chi^+\bar{\sigma}^\mu\chi$  при лоренц-преобразованиях ведут себя как 4-вектора. В обозначениях  $\sigma^\mu$  и  $\bar{\sigma}^\mu$  уравнения Дирака (7.40) и (7.41) имеют вид

$$\sigma^\mu p_\mu \psi = m\chi, \quad (7.67)$$

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \chi = m\psi. \quad (7.68)$$

Можно сказать, что  $\sigma^\mu p_\mu$  переводит объект  $\psi$ -типа в объект  $\chi$ -типа, а  $\bar{\sigma}^\mu p_\mu$  превращает  $\chi$  в  $\psi$ . Точнее, при лоренц-

преобразованиях  $\sigma^\mu p_\mu \psi$  изменяется как  $\chi$ , а  $\bar{\sigma}^\mu p_\mu \chi$  – как  $\psi$ . Перепишем дираковский лагранжиан в терминах полей  $\psi$  и  $\chi$ :

$$\begin{aligned} & \Psi(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = \\ & = \psi^\dagger i\sigma^\mu \partial_\mu \psi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m(\psi^\dagger \chi + \chi^\dagger \psi). \end{aligned} \quad (7.69)$$

До сих пор мы строили 4-вектора, используя либо только  $\psi$ , либо только  $\chi$ . Инварианты же  $(\psi^\dagger \chi$  и  $\chi^\dagger \psi)$  используют оба типа объектов. А можно ли построить инвариант только с помощью, например, спиноров  $\chi$ -типа? Иными словами, возможно ли построить спинор из компоненты, скажем  $\chi$ , который бы имел трансформационный характер  $\psi$ ? Ответ на этот вопрос положительный.

Выберем комплексно сопряжённое к  $\chi$  поле  $\chi^*$ . При лоренц-преобразованиях

$$\chi' = \left(1 + i\frac{\bar{\epsilon}\bar{\sigma}}{2} + \frac{\bar{\eta}\bar{\sigma}}{2}\right)\chi, \quad (7.70)$$

а для сопряжённого поля

$$\chi^{*'} = \left(1 - i\frac{\bar{\epsilon}\bar{\sigma}}{2} + \frac{\bar{\eta}\bar{\sigma}^*}{2}\right)\chi^*. \quad (7.71)$$

Заметим, что  $\sigma_1^* = \sigma_1$ ,  $\sigma_2^* = -\sigma_2$ ,  $\sigma_3^* = \sigma_3$ ,  $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1$  и  $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2$ .

Потому

$$\sigma_2 \chi' = \sigma_2 \left(1 - i\frac{\bar{\epsilon}(\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)}{2} + \frac{\bar{\eta}(\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)}{2}\right) = \left(1 + \frac{i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}}{2} - \frac{\bar{\eta}\bar{\sigma}}{2}\right)\sigma_2 \chi^* = V\sigma_2 \chi^*, \quad (7.72)$$

где использовано определение (7.56).

Суммируем полученные результаты:

$$\sigma_2 \chi^* \text{ преобразуется как } \psi. \quad (7.73)$$

Введём “ $\psi$ -подобный” объект, полученный из  $\chi$ :

$$\psi_\chi = i\sigma_2 \chi^*. \quad (7.74)$$

Тогда

$$\psi_{\chi^{(1)}}^+ = (i\sigma_2 \chi^{(1)*})^{*T} \chi^{(2)} = (i\sigma_2 \chi^{(1)})^T \chi^{(2)} = \chi^{(1)T} (-i\sigma_2) \chi^{(2)}, \quad (7.75)$$

где “ $T$ ” означает транспонирование, будет лоренц-инвариантной величиной для любых “ $\chi$ -подобных” объектов  $\chi^{(7.1)}$  и  $\chi^{(7.2)}$ , аналогично  $\psi^+ \chi$ . Соотношение (7.75) особенно важно, поскольку оно определяет, как построить лоренц-инвариантное преобразование для определения SUSY преобразований (7.35). В частности,  $\psi_{\chi}^+ \chi$  – лоренц-инвариант, если  $\chi$  одинаковые. Действительно

$$(i\sigma_2 \chi^*)^{*T} \chi = (i\sigma_2 \chi)^T \chi = \chi^T (-i\sigma_2) \chi. \quad (7.76)$$

Но  $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ , поэтому

$$i\sigma_2 \chi = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ -\chi_1 \end{pmatrix}, \quad (i\sigma_2 \chi)^T \chi = \chi_2 \chi_1 - \chi_1 \chi_2. \quad (7.77)$$

Но не равно ли нулю последнее соотношение? Да, если  $\chi_1$  и  $\chi_2$  – обычные функции, и нет, если они антикоммутирующие величины, как для квантованных фермионных полей!

Естественный вопрос: что происходит с  $\psi^*$ ? Действуя по аналогии с (7.71) и (7.72), получаем

$$\sigma_2 \psi^* \text{ преобразуется как } \chi. \quad (7.78)$$

Это опять позволяет ввести объект  $\chi$ -типа

$$\chi_{\psi} = i\sigma_2 \psi. \quad (7.79)$$

Тогда для любых двух  $\psi^{(7.1)}$  и  $\psi^{(7.2)}$  имеем:

$$(-i\sigma_2 \psi^{(1)*})^{*T} \psi^{(2)} = (-i\sigma_2 \psi^{(1)})^T \psi^{(2)} = \psi^{(1)T} i\sigma_2 \psi^{(2)}. \quad (7.80)$$

Эта величина инвариантна, как и  $(-i\sigma_2 \psi)^T \psi$ .

## 7.6. Майорановские фермионы

Согласно соотношению (7.79),  $\chi_{\psi} = i\sigma_2 \psi^*$  преобразуется как объект  $\chi$ -типа. Это объект согласуется с теорией Дирака, если объединить  $\psi$  и  $\chi_{\psi}$  в 4-компонентный объект



$$\Psi_M^\Psi = \begin{pmatrix} \Psi \\ -i\sigma_2 \Psi^* \end{pmatrix}. \quad (7.81)$$

Этот объект ведёт себя при лоренц-преобразованиях подобно “обычному” дираковскому спинору  $\Psi$ , построенному с помощью  $\psi$  и  $\chi$ . Но  $\Psi_M^\Psi$  в (7.81) имеет меньше степеней свободы, чем обычный дираковский 4-х компонентный спинор  $\Psi$ , так как  $\Psi_M^\Psi$  полностью определяется 2-компонентным спинором  $\psi$ . В дираковском спиноре содержится два 2-компонентных спинора, каждый из которых зависит от 4-вещественных величин (каждый имеет две комплексные компоненты), т.е. всего 8. В  $\Psi_M^\Psi$ , однако, содержится лишь 4 вещественных величины, входящих в спинор  $\psi$ . Что это означает физически, становится ясным при рассмотрении операции зарядового сопряжения. На дираковском 4-компонентном спиноре операция зарядового сопряжения определяется следующим образом:

$$\Psi_C = C_0 \Psi^*, \quad (7.82)$$

где

$$C_0 = -i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.83)$$

Тогда

$$\Psi_{M,C}^\Psi = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^* \\ -i\sigma_2 \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi \\ -i\sigma_2 \Psi^* \end{pmatrix} = \Psi_M^\Psi. \quad (7.84)$$

Таким образом,  $\Psi_M^\Psi$  описывает частицу со спином (1/2), состояние которой чётно при зарядовом сопряжении, т.е. эта частица совпадает со своей античастицей. Такую частицу называют майорановским фермионом. Это свойство зарядового (само)сопряжения и есть физическая причина отличия числа степеней свободы  $\Psi_M^\Psi$  по сравнению с  $\Psi$  в соотношении (7.36). В дираковском поле есть четыре физически различных моды, например,  $e_L^-, e_R^-, e_L^+, e_R^+$ . Майорановское же поле содержит только две моды, например,  $\nu_L, \nu_R$ , если нейтрино – майорановские частицы.

Можно определить

$$\Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (7.85)$$

при этом

$$\Psi_{M,C}^\chi = \Psi_M^\chi. \quad (7.86)$$

Очевидно, что формализм, использующий только  $\chi$ , эквивалентен использованию только  $\psi$ . Массовый член  $\bar{\Psi}\Psi$  при этом

$$\bar{\Psi}_M^\chi \Psi_M^\chi = \left( (i\sigma_2 \chi^*)^+ \chi^+ \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix} = \chi^+ (-i\sigma_2) \chi^*. \quad (7.87)$$

Первое слагаемое в этом выражении в точности совпадает с соотношением (7.76), а второе слагаемое – лоренц-инвариант, образованный из  $\chi$ .

Аналогично массовый член

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_M^\psi \Psi_M^\psi &= \left( \psi^+ (-i\sigma_2 \psi^*)^+ \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2 \psi^* \end{pmatrix} = \\ &= \psi^+ (-i\sigma_2) \psi^* + \psi^T (i\sigma_2) \psi. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Снова в этом выражении первое слагаемое – инвариант, построенный из  $\psi$ . Отметим, что все слагаемые в (7.87) и (7.88) должны обращаться в ноль, если компоненты полей не обладают антикоммутиационными свойствами.

Рассмотрим лоренц-инвариантное произведение двух различных майорановских спиноров

$$\bar{\Psi}_{1M} \Psi_{2M} = \Psi_{1M}^+ \beta \Psi_{2M} \quad (7.89)$$

Из (7.82) и (7.84) имеем

$$\Psi_{1M} = -i\gamma^2 \Psi_{1M}^*, \quad (7.90)$$

следовательно

$$\Psi_{1M}^+ = \Psi_{1M}^T (-i\gamma^2), \quad (7.91)$$

где использовано  $\gamma^{2+} = -\gamma^2$ .

Тогда получаем

$$\Psi_{1M}^+ \beta \Psi_{2M} = \Psi_{1M}^T (-i\gamma^2 \beta) \Psi_{2M}. \quad (7.92)$$

$$\text{Матрица} \quad -i\gamma^2\beta = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

действует как метрика в формировании произведения двух  $\Psi_M$ . Очевидно, что (7.92) сводится к (7.87) при  $\Psi_{1M} = \Psi_{2M} = \Psi_M^\chi$  и к (7.88), если  $\Psi_{1M} = \Psi_{2M} = \Psi_M^\psi$ .

Выше уже отмечалось, что простейший вариант SUSY включает комплексное скалярное поле и двухкомпонентное спинорное поле. Это прообраз минимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM).

Использование спиноров  $\chi$ -типа (или  $L$ -типа спиноров) не вызывает сомнений, поскольку  $(V-A)$ -структура электрослабого сектора стандартной модели выделяет именно  $L$ -компоненты. В контексте SUSY очень удобно использовать один тип спиноров. Для MSSM – это  $L$ -тип. Но как быть с  $R$ -частями полей стандартной модели? Рассмотрим, например, электронное поле, записанное в виде

$$\Psi^{(e^-)} = \begin{pmatrix} \Psi_R^{(e^-)} \\ \chi_L^{(e^-)} \end{pmatrix}. \quad (7.94)$$

Вместо использования правого электронного поля, можно выбрать зарядово-сопряжённое левое позитронное поле, т.е. вместо (7.94) записать

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \chi_L^{(e^+)*} \\ \chi^{(e^-)} \end{pmatrix}. \quad (7.95)$$

В обычных обозначениях

$$\chi_L^{(e^+)*} = i\sigma_2 \chi_L^{(e^+)*}, \quad (7.96)$$

или, в более компактной форме, –  $e_L^{+C}$ . Наш предыдущий опыт гарантирует, что (7.95) имеет правильные лоренцевские трансформационные свойства. В терминах (7.95) массовый член (не майорановского!) дираковского фермиона (опуская индекс “ $L$ ” для  $\chi$ ):

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}^{(e)}\Psi^{(e)} &= \Psi^{(e)+}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Psi^{(e)} = \\ &= \left( \left( i\sigma_2\chi^{(e^+)} \right)^T \chi^{(e^-)+} \right) \begin{pmatrix} \chi^{(e^-)} \\ i\sigma_2\chi^{(e^+)*} \end{pmatrix} = \chi^{(e^+)}\chi^{(e^-)} + \chi^{(e^-)+}i\sigma_2\chi^{(e^+)*}.\end{aligned}\quad (7.97)$$

Таким образом, дираковский массовый член записан целиком в терминах двух спиноров  $L$ -типа: один ассоциирован с  $e^-$ -модой, а другой – с  $e^+$ -модой.

## 7.7. Простейший суперсимметричный лагранжиан

Построим простейшую суперсимметричную теорию, включающую только два свободных поля: комплексное (со спином 0) поле  $\phi$  и  $L$ -типа спинорное поле  $\chi$ , оба безмассовые. Плотность лагранжиана этой теории:

$$L = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi + \chi^+ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi. \quad (7.98)$$

Часть лагранжиана, связанная с  $\phi$ , хорошо известна из стандартных курсов квантовой теории поля, часть с  $\chi$  – из дираковского лагранжиана (7.69).

Уравнение движения для поля  $\phi$ , конечно,  $\square\phi = 0$ , для  $\chi$ :  $i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = 0$ .

Нам хотелось бы найти преобразование которое изменяло бы  $\phi$  пропорционально  $\chi$  (как в (7.35)), а  $\chi$  – пропорционально  $\phi$ , оставляя при этом лагранжиан  $L$  инвариантным. Сначала разберёмся с размерностями. Действие – интеграл от плотности лагранжиана по 4-х мерному пространству. Действие в единицах  $\hbar = c = 1$  безразмерно. В теории остаётся лишь один параметр с размерностью массы (энергии)  $M$ . Длина имеет размерность времени ( $c = 1$ ), т.е. размерность  $M^{-1}$ . Плотность лагранжиана имеет размерность  $M^4$ . Поскольку производные имеют размерность  $M$ , то размерности  $\phi$  и  $\chi$ :

$$[\phi] = M; \quad [\chi] = M^{3/2}. \quad (7.99)$$

Какое SUSY преобразование связывает  $\phi$  и  $\chi$ ? Некоторые соображения, хотя и не дающие прямого ответа, весьма полезны. Рассмотрим изменение  $\delta_\zeta \phi$ , где  $\zeta$  – построенный (не зависящий от  $x$ ) параметр. Это изменение (как и в (7.35)), можно записать в виде:

$$\text{изменение } \phi = \text{параметр } \zeta \times \text{поле } \chi. \quad (7.100)$$

В левой части (7.100) содержится поле спина 0, инвариантное относительно преобразований Лоренца. Поэтому надо построить инвариант из  $\chi$  и параметра  $\zeta$ . Повторим, что  $\zeta$  – спинор. Он не зависит от пространственно-временной точки  $x$  и инвариантен относительно преобразований Лоренца: он преобразуется как спинор  $\chi$ -типа, т.е. с помощью  $V^{-1+}$ . Он имеет две компоненты, каждая из которых комплексна, т.е. зависит от 4-х вещественных чисел. Хотя  $\zeta$  не зависит от  $x$ , и в этом смысле не является полевым оператором, будем предполагать, что его компоненты антикоммутируют с компонентами спинорных полей. Из размерных соображений в (7.100), получаем размерность

$$[\zeta] = M^{-1/2}. \quad (7.101)$$

Для построения инварианта из  $\chi$  и  $\zeta$  проще всего считать, что  $\zeta$  – тоже спинор  $\chi$  (или  $L$ -типа) и воспользоваться инвариантным произведением (7.75).

$$\text{Тогда} \quad \delta_\zeta \phi = \zeta^T (-i\sigma_2) \chi. \quad (7.102)$$

Что касается  $\delta_\zeta \chi$ , то это изменение должно иметь структуру

$$\delta_\zeta \chi \sim \text{произведение } \zeta \text{ и } \phi. \quad (7.103)$$

Левая часть этого выражения имеет размерность  $M^{3/2}$ , в то время как правая часть – размерность  $M^{-1/2+1} = M^{1/2}$ . Надо ввести в правую часть объект с размерностью  $M^1$ . В безмассовой теории есть только один размерный параметр – оператор импульса  $i\partial_\mu$ . Но в этом случае надо “поглотить” индекс  $\mu$  в правой части (7.103). Для этого выберем  $\delta_\zeta \chi$  в виде

$$\delta_\zeta \chi = (i\sigma^\mu \partial_\mu \phi) \zeta, \quad (7.104)$$

где  $\sigma^\mu$  задаются выражением (7.66). Отметим, что матрицы  $2 \times 2$   $\sigma^\mu$  действуют на двухкомпонентный столбец, т.е. слева в (7.104) должен быть двухкомпонентный столбец. Хотя и правая, и левая части (7.104) – двухкомпонентные вектора, правая часть не преобразуется как спинор  $\chi$ -типа. Если обратиться к соотношениям (7.67) и (7.68), то можно заметить, что комбинация  $\sigma^\mu \partial_\mu$ , действуя на  $\psi$ , создаёт объект, преобразующийся как  $\chi$ . Таким образом, следует допустить, что  $\sigma^\mu \partial_\mu$  действует не на  $\zeta$ , а на  $\psi$ -подобный объект. В результате получается объект, преобразующийся как  $\chi$ . Но мы знаем, как создать  $\psi$ -подобный объект без использования  $\zeta$ . Согласно (7.76), нужно взять  $i\sigma_2 \chi^*$ . Поэтому окончательно получаем

$$\delta_\zeta \chi_q = A \left[ i\sigma^\mu \left( i\sigma_2 \zeta^* \right) \right]_q \partial_\mu \phi, \quad (7.105)$$

где  $A$  – некоторая константа, которая определяется из условия инвариантности плотности лагранжиана относительно преобразований (7.100) и (7.105). Выражение (7.105) содержит в обеих частях  $\chi$ -типа спинорный индекс. Соотношения (7.100) и (7.105) задают SUSY преобразования полей  $\phi$  и  $\chi$ , но, поскольку они комплексные поля, нужно выяснить, как преобразуются эрмитово-сопряжённые поля  $\phi^+$  и  $\chi^+$ . Напомним, что  $\phi$  и  $\chi$  – квантованные поля (хотя мы не пишем над ними традиционные шляпки), а  $\zeta$  – не поле (не зависит от  $x$ ). При обсуждении выше лоренц-преобразований спиноров, для обозначения комплексного сопряжения использовался индекс “\*”, при этом предполагалось, что мы имеем дело с волновыми функциями, а не с полевыми операторами. Рассмотрим разложение квантованного поля

$$\phi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left[ a(k) e^{-ikx} + b^+(k) e^{ikx} \right]. \quad (7.106)$$

Оператор  $a(k)$  уничтожает частицу с импульсом  $k$ , а  $b^+(k)$  рождает античастицу с 4-импульсом  $k$ . Для соотношения (7.106) операция комплексного сопряжения не подходит, так как оператор  $a^*(k)$ . Поэтому вместо “\*” мы имеем дело с  $\phi^+$ , который определяется с помощью (7.106) и необходим для выполнения двух условий:

- а) выбора комплексно-сопряжённых волновых функций ( $e^{\pm ikx}$ );  
 б) выбора “крестованных” операторов  $a(k)$  и  $b(k)$ . Таким образом,

$$\phi^+ = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left[ a^+(k) e^{ikx} + b(k) e^{-ikx} \right]. \quad (7.107)$$

Для спинорных полей, например,  $\chi$ -типа, ситуация несколько сложнее, так как в аналоге соотношения (7.106) скалярные (спин 0) волновые функции нужно заменить на 2-компонентные спиноры.

Символически, первая (верхняя) компонента квантованного поля  $\chi$  будет иметь следующую форму:

$$\chi_1 \sim (\text{модовый оператор}) \times \\ \times (\text{первая компонента спинора } \chi\text{-типа}). \quad (7.108)$$

Аналогично для  $\chi_1^+$ :

$$\chi_1^+ \sim (\text{модовый оператор})^+ \times \\ \times (\text{первая компонента спинора свободной частицы})^*. \quad (7.109)$$

Имея это в виду, найдём эрмитово сопряжение от (7.102), т.е.  $\delta_\zeta \phi^+$ .

Для этого перепишем (7.102) по компонентам

$$\delta_\zeta \phi = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = -\zeta_1 \chi_2 + \zeta_2 \chi_1. \quad (7.110)$$

Мы хотели бы провести операцию эрмитового сопряжения (“крестования”) соотношения (7.110), но как провести эту операцию над произведением антикоммутирующих компонент, подобных  $\zeta_1 \chi_2$ ? В случае двух матриц известно, что  $(AB)^+ = B^+ A^+$ . Аналогично, определим операцию “крестования”, обращая порядок спиноров

$$\delta_\zeta \phi^+ = -\chi_2^+ \zeta_1^* + \chi_1^+ \zeta_2^*. \quad (7.111)$$

Так как  $\zeta$  – не квантовое поле, то с операцией “\*” всё в порядке. Выражение (7.111) можно записать и в более компактной форме

$$\delta_\zeta \phi^+ = \chi_1^+ \zeta_2^* - \chi_2^+ \zeta_1^* = \begin{pmatrix} \chi_1^+ & \chi_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix} = \chi^+ (i\sigma_2) \zeta^*, \quad (7.112)$$

где символ “+” в последнем равенстве применён к двухкомпонентному спинору, понимаемому в матричном смысле:

$$\chi^+ = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}^+ = (\chi_1^+ \quad \chi_2^+). \quad (7.113)$$

Аналогично получаем “крестованный” аналог выражения (7.105):

$$\delta_\zeta \chi^+ = A \partial_\mu \phi^+ \zeta^T i \sigma_2 i \sigma^\mu, \quad (7.114)$$

где для удобства последующего использования  $\partial_\mu \phi^+$  перемещён в начало выражения. Теперь всё готово для выбора величины  $A$ , обеспечивающей инвариантность лагранжиана  $L$  при преобразованиях (7.100), (7.105), (7.112) и (7.114). Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta L = & \partial_\mu (\delta_\zeta \phi^+) \partial_\mu \phi + \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu (\delta_\zeta \phi) + (\delta_\zeta \chi^+) i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \\ & + \chi^+ i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\zeta \chi) = \partial_\mu (\chi^+ i \sigma_2 \zeta^*) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu (\zeta^T (-i \sigma_2) \chi) + \\ & + A (\partial_\mu \phi^+ \zeta^T i \sigma_2 i \sigma^\mu) i \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi + A \chi^+ i \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu (i \sigma^\mu i \sigma_2 \zeta^*) \partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (7.115)$$

В этом выражении содержатся два типа членов: с параметром  $\zeta^*$  и с параметром  $\zeta^T$ .

Рассмотрим член, включающий  $A \zeta^*$ . Он появляется в комбинации с

$$\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \partial^\mu \partial_\mu = (\partial_0 + \vec{\sigma} \vec{\nabla})(\partial_0 - \vec{\sigma} \vec{\nabla}) = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \partial^\mu \partial_\mu. \quad (7.116)$$

Поэтому можно объединить этот и другой член в (7.115):

$$\delta L|_{\zeta^*} = \partial_\mu \chi^+ i \sigma_2 \zeta^* \partial^\mu \phi - i A \chi^+ \partial_\mu \partial^\mu \sigma_2 \zeta^* \phi. \quad (7.117)$$

Это выражение определяет изменение  $L$  при SUSY преобразованиях. Кажется, что мы не обнаружили инвариантности, так как нет оснований надеяться, что это изменение сокращается с членом, содержащим  $\zeta^T$ . Напомним, однако, что действие – интеграл по пространству-времени от  $L$ . Действие будет инвариантным, если изменение  $L$  можно представить в виде полной производной

$$\delta_\zeta L|_{\zeta^*} = \partial_\mu (\chi^+ i \sigma_2 \zeta^* \partial^\mu \phi), \quad (7.118)$$

если  $A = -1$ .

Аналогично, если  $A = -1$ , то член, содержащий  $\zeta^T$ , имеет вид

$$\delta_\zeta L|_{\zeta^T} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu (\zeta^T (-i \sigma_2) \chi) + \partial_\mu \phi^+ \zeta^T i \sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi. \quad (7.119)$$



Второе слагаемое в (7.119) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \phi^+ \zeta^T i \sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^+ \zeta^+ (-i \sigma_2) \sigma^\mu \sigma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \chi = \\ = \partial_\mu \left( \phi^+ \zeta^T i \sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^+ \zeta^T (-i \sigma_2) \partial_\mu \partial^\mu \chi. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Второе слагаемое в (7.120) и первое слагаемое в (7.119) объединяются в полную производную

$$\partial_\mu \left( \phi^+ \zeta^T (-i \sigma_2) \partial^\mu \chi \right), \quad (7.121)$$

поэтому окончательно имеем

$$\delta L|_{\zeta^T} = \partial_\mu \left( \phi^+ \zeta^T (-i \sigma_2) \partial^\mu \chi \right) + \partial_\mu \left( \phi^+ \zeta^T i \sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right), \quad (7.122)$$

и это полная производная.

Итак, мы показали, что преобразования (7.105), (7.112) и (7.114) с  $A = -1$  изменяют  $L$  на полную производную, т.е. не меняют действия. Пара  $(\phi, \text{спин } 0)$  и  $(\chi, L\text{-типа, спин } 1/2)$  составляют киральный супермультиплет.

## 7.8. Минимальная суперсимметричная стандартная модель

Обсудим, какое отношение может иметь идея суперсимметрии к физике частиц. Что мы имели до сих пор? Одно комплексное скалярное поле и одно фермионное поле  $L$ -типа, которые между собой не взаимодействуют. Подчеркнём, что SUSY преобразования не действуют на  $SU(3)_c$ ,  $SU(2)_L$  или  $U(1)_{em}$  степени свободы. Рассмотрим, например, электронное поле  $e_L$ . Электрон  $e_L$  входит в  $SU(2)_L$ -дублет, его партнёр  $\nu_{eL}$ :

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (7.123)$$

Этот дублет требует в SUSY-партнёры бозоны со спином 0, образующих другой  $SU(2)_L$  дублет

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (7.124)$$

или его зарядово-сопряжённый дублет

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}^0 \\ \Phi^- \end{pmatrix}. \quad (7.125)$$

Но эти хиггсовские дублеты не несут лептонного числа (которое будем предполагать сохраняющимся). Нельзя допустить, чтобы некоторые из частиц SUSY мультиплета несли сохраняющееся квантовое число, а другие – нет. Поэтому нужны новые частицы – партнёры к дублету (7.123):

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \text{ партнёр } \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{eL} \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}, \quad (7.126)$$

где  $\tilde{\nu}$  – скалярный партнёр нейтрино (снейтрино) и  $\tilde{e}$  – скалярный партнёр электрона (сэлектрон). Аналогично, должны быть смюон, стаулептон и их снейтрино. Все они находятся в киральных супермультиплетах и  $SU(2)_L$ -дублетах.

Как насчёт кварков? Они образуют триплет  $SU(3)_c$  цветовой калибровочной группы, в стандартной модели нет других цветовых триплетов. Поэтому нужны новые скалярные партнёры кварков (скварки), являющиеся цветовыми триплетами и входящие в киральный супермультиплет. Электрослабые взаимодействия лептонов и кварков – киральные. Это означает, что  $L$  и  $R$ -части полей взаимодействуют по-разному:  $L$ -части относятся к  $SU(2)_L$ -дублетам, а  $R$ -части – к  $SU(2)_L$ -синглетам. Поэтому нужны скалярные партнёры для  $L$  и  $R$ -частей. Например,  $(e_R, \tilde{e}_R)$ ,  $(u_R, \tilde{u}_R)$ ,  $(d_R, \tilde{d}_R)$  и т.д., а также

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, \dots \quad (7.127)$$

Мы пока ничего не говорили о SUSY поле со спином 1. Это поле принадлежит к векторному (или калибровочному) супермультиплету, ассоциированному с безмассовым векторным полем с двумя степенями свободы), которое называется калибрино. У калибрино квантовые числа относительно калибровочной группы такие же, как для калибровочных бозонов, т.е. для получения суперсимметричной КХД нужно ввести октет глюино, плюс  $SU(2)_L$ -триплет (вино и зино), а также фотино. После нарушения  $SU(2)_L$ -симметрии

(a la Higgs), получаем три фермионных партнёра для  $W$ ,  $Z_0$  – соответственно  $\tilde{W}$ ,  $\tilde{Z}$  и фотино  $\tilde{\gamma}$ .

Наконец, хиггсовский сектор. Мы не можем найти хиггсовскому дублету известного фермионного партнёра, т.е. нужно ввести хиггсино – фермионный аналог, входящий в киральный супермультиплет. Важный момент при построении суперсимметричной стандартной модели – нужно вводить два отдельных хиггсовских дублета

$$H_u : \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}; \quad (7.128)$$

$$H_d : \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}. \quad (7.129)$$

Киральный и калибровочный супермультиплеты, введённые выше, характеризуют минимальное расширение стандартной модели. Полная теория, включающая суперсимметричные взаимодействия, называется минимальной суперсимметричной стандартной моделью (MSSM).

Важно отметить, что до сих пор ни один из суперпартнёров не найден, т.е. суперпартнёры не имеют той же массы, что и их партнёры из стандартной модели.

## 7.9. Супергравитация

### 7.9.1. Велбейны и спинорные связности

Гравитация определяется метрикой  $g_{\mu\nu}$ , которая, в свою очередь – символами Кристофеля  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu(g)$ , представляющими собой калибровочное поле гравитации с римановым тензором  $R_{\nu\rho\sigma}^\mu(\Gamma)$ , играющим роль напряжённости поля.

Существует и другая формулировка, в которой аналогия с калибровочной теорией проявляется наиболее полно. Она основана на формализме велбейна  $e_\mu^a$  и спинорных связностей  $\omega_\mu^{ab}$ . Термин “велбейн” происходит от немецких слов viel  $\equiv$  много и Bein  $\equiv$  нога.

В 4-х измерениях говорят о “вербейне”, поскольку vier  $\equiv$  четыре. В других измерениях используют термины einbein, zweibein, dreibein (1, 2, 3 = ein, zwei, drei), в общем же случае говорят о велбейне (vielbein). Любое искривлённое пространство оказывается локально плоским, если его рассматривать на масштабах, гораздо меньших масштаба кривизны. Это означает, что локально имеет место лоренц-инвариантность специальной теории относительности. Велбейн является объектом, в свойствах которого проявляется локальная лоренц-инвариантность. Можно сказать, что велбейн – своего рода корень квадратный из метрики, т.е.

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a(x) e_{\nu}^b(x) \eta_{ab}. \quad (7.130)$$

В  $e_{\mu}^a(x)$   $\mu$  – “искривлённый” индекс, на который действует общее координатное преобразование (так что  $e_{\mu}^a$  – ковариантный вектор относительно общих координатных преобразований, подобный калибровочному полю); индекс же “ $a$ ” – “плоский” индекс, связанный с локальной лоренц-инвариантностью. Иначе говоря, в каждой пространственно-временной точке определяется малая плоская окрестность (“касательное пространство”), индекс  $a$  – тензорный индекс, относящийся к локальному пространству Минковского, на который действуют преобразования Лоренца.

Можно проверить, что инфинитезимальное общее координатное преобразование)  $\delta x^{\mu} = \zeta^{\mu}$ , действующее на матрицу, даёт

$$\delta_{\zeta} g_{\mu\nu}(x) = (\zeta^{\rho} \partial_{\rho}) g_{\mu\nu} + (\partial_{\mu} \zeta^{\rho}) g_{\rho\sigma} + (\partial_{\nu} \zeta^{\rho}) g_{\rho\sigma}, \quad (7.131)$$

где первый член соответствует трансляции, но есть и дополнительные слагаемые. Таким образом, общие координатные преобразования оказываются аналогом трансляций в специальной теории относительности.

Действие инфинитезимального координатного преобразования на велбейн  $e_{\mu}^a$  даёт

$$\delta_{\zeta} e_{\mu}^a(x) = (\zeta^{\rho} \partial_{\rho}) e_{\mu}^a + (\partial_{\mu} \zeta^{\rho}) e_{\rho}^a, \quad (7.132)$$

т.е. оно действует только на “искривлённый” индекс  $\mu$ . С другой стороны, локальное лоренц-преобразование

$$\delta_L e_\mu^a(x) = \lambda_b^a(x) e_\mu^b(x) \quad (7.133)$$

выглядит, как обычно.

Таким образом, велбейн является своего рода калибровочным полем с одним ковариантным векторным индексом и калибровочным групповым индексом. Однако есть ещё одно “калибровочное поле”  $\omega_\mu^{ab}$ -спиновая связность, которое определяется как “связность” ( $\equiv$  калибровочное поле) при действии группы Лоренца на спиноры. Действительно, ковариантная производная в искривлённом пространстве действует на спиноры аналогично ковариантной производной, содержащей калибровочное поле:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \Gamma^{ab} \psi. \quad (7.134)$$

Это определение означает, что  $D_\mu \psi$  является объектом, преобразующимся при общих координатных преобразованиях как тензор. Таким образом,  $\omega_\mu^{ab}$  действует как калибровочное поле на любой локальный лоренцевский индекс  $a$ .

Если нет динамических фермионов (т.е. фермионов, не имеющих кинетического члена в действии), то  $\omega_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}(e)$  – фиксированная функция, определяемая “постулатом велбейна”:

$$T_{[\mu\nu]}^a = D_{[\mu e_\nu^a]} = \partial_{[\mu} e_{\nu]}^a + \omega_{[\mu}^{ab} e_{\nu]}^b = 0. \quad (7.135)$$

Заметим, что можно стартовать с соотношения

$$D_\mu e_\nu^a \equiv \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^{ab} e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a = 0 \quad (7.136)$$

и его антисимметризовать, поскольку  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  – симметричен. Соотношение (7.136) тоже иногда называют “постулатом велбейна”.

В выражении (7.135)  $T^a$  – так называется кручение, и его можно рассматривать как полевую напряжённость  $e_\mu^a$ . Постулат же велбейна означает, что кручение (полевая напряжённость велбейна) равно нулю.

Можно построить объект, который будет представлять собой полевую напряжённость связности  $\omega_\mu^{ab}$ :

$$R_{\mu\nu}^{ab}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ab} \omega_\nu^{bc} - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{cb}. \quad (7.137)$$

Это определение совпадает с определением напряжённости калибровочного поля для группы Лоренца  $SO(1, d-1)$ . Кривизна оказывается аналогом Риманова тензора:

$$R_{\rho\sigma}^{ab}(\omega(e)) = e_\mu^a e^{-1, \nu b} R_{\nu\rho\sigma}^\mu(\Gamma(e)). \quad (7.138)$$

Действие же – Эйнштейна-Гильберта

$$S_{\mathcal{E}\Gamma} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x (\det e) R_{\mu\nu}^{ab}(\omega(e)) e_a^{-1, \mu} e_b^{-1, \nu}, \quad (7.139)$$

поскольку  $\sqrt{\det g} = \det e$ .

Приведённая формулировка гравитации в терминах  $e_\mu^a$  и  $\omega_\mu^{ab}$  называется “формулировкой второго рода”, поскольку  $\omega_\mu^{ab}$  не является независимой величиной, она зависит от  $e_\mu^a$ .

Заметим, однако, что если считать  $\omega$  независимой переменной в действии (7.139), то уравнения движения для  $\omega$  дают  $T_{\mu\nu}^a = 0$ , т.е. “постулат велбейна”. Таким образом,  $\omega$  можно считать независимой переменной без изменения классической теории. Это так называемая “формулировка первого рода” гравитации в терминах независимых  $(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab})$ . Супергравитацию можно определить двумя независимыми способами, приводящими к одному результату. Это суперсимметричная теория гравитации, а также локально суперсимметричная теория. Иначе говоря, можно действовать двумя способами: а) суперсимметризовать Эйнштейновскую теорию гравитации б) выбрать суперсимметричную модель и сделать её локальной. На практике используется комбинация этих двух подходов.

Если мы хотим сделать глобальную симметрию локальной, то следует ввести калибровочное поле, соответствующее этой симметрии. Таким калибровочным полем могло бы быть  $A_\mu^\alpha$  ( $SUSY$  действует на индекс  $\alpha$ ). Его обычно обозначают через  $\psi_{\mu\alpha}$  и называют гравитино;  $\mu$  – “искривлённый” индекс,  $\alpha$  – “плоский” локальный лоренцевский индекс. В плоском пространстве объект

$\Psi_{\mu\alpha}$  имел бы одинакового типа индексы (“искривлённые” = “плоские”). Можно показать, что  $\mu^\alpha$  форма соответствует полю спина 3/2, поэтому это же утверждение справедливо для искривлённого пространства. Если мы имеем дело с суперсимметричной теорией гравитации, то это означает, что гравитино под действием преобразования суперсимметрии переходит в другое состояние:  $\Psi_{\mu\alpha} = Q_\alpha$  (гравитация). Индексная же структура свидетельствует о том, что в это преобразование входит не метрика, а “нечто” с только одним “искривлённым” индексом, а именно, велбейн. Таким образом, супергравитация требует “велбейн – спиновой связности” формулировки гравитации. Для записи SUSY преобразований начнём с обсуждения, касающегося изменения велбейна. По аналогии с моделью Весса-Зумино, где  $\delta\phi = \bar{\epsilon}\phi$  или векторным мультиплетом, в котором вариация векторного поля  $\delta A_\mu^a = \bar{\epsilon}\gamma_\mu \psi^a$ , изменение велбейна можно записать в виде:

$$\delta e_\mu^a = \frac{G}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \quad (7.140)$$

где  $G$  – ньютоновская константа, появляющаяся из размерных соображений. Поскольку  $\psi$  подобна калибровочному полю локальной суперсимметрии, можно ожидать изменения типа  $\delta A_\mu = D_\mu \epsilon$ . Поэтому имеем

$$\delta \psi_\mu = \frac{1}{G} D_\mu \epsilon; \quad D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} \epsilon. \quad (7.141)$$

Действие для свободной частицы со спином 3/2 в плоском пространстве называется действием Рариты-Швингера

$$S_{RS} = -\frac{i}{2} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma = -\frac{1}{2} \int d^4 x \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho, \quad (7.142)$$

где первая запись соответствует 4-м измерениям, а вторая – произвольному числу измерений ( $i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu = \gamma^{\mu\rho\sigma}$  в 4-х измерениях,  $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ). В искривлённом пространстве действие (7.142) имеет вид

$$S_{RS} = -\frac{i}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma = -\frac{1}{2} \int d^d x (\det e) \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho. \quad (7.143)$$

Теперь всё готово для построения  $N = 1$  (на массовой поверхности) супергравитации в 4-х измерениях. Её действие есть сумма действий Эйнштейна-Гильберта и Рариты-Швингера

$$S_{N=1} = S_{\mathcal{E}\Gamma}(\omega, e) + S_{RS}(\psi_\mu). \quad (7.144)$$

При этом суперсимметричные преобразования определяются следующим образом:

$$\delta e_\mu^a = \frac{G}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu; \quad \delta \psi_\mu = \frac{1}{G} D_\mu \epsilon. \quad (7.145)$$

Однако этого недостаточно для определения теории. Следует определить формализм и различные величины:

а) формализм второго порядка. Независимыми полями являются  $e_\mu^a$ ,  $\psi_\mu$ ,  $\omega$  не является независимым полем. В этом случае имеется динамический фермион ( $\psi_\mu$ ), поэтому кручение  $T_{\mu\nu}^a$  уже отлично от нуля, т.е.  $\omega \neq \omega(e)$ .

Действительно,

$$\omega_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}(e, \psi) = \omega_\mu^{ab}(e) + \psi \psi \text{-член} \quad (7.146)$$

находим путём вариации действия по  $\omega$ , как и в  $\psi = 0$  случае:

$$\frac{\delta S_{N=1}}{\delta \omega_\mu^{ab}} = 0 \Rightarrow \omega_\mu^{ab}(e, \psi) \quad (7.147)$$

б) формализм первого рода. Все поля:  $\psi$ ,  $e$ ,  $\omega$  – независимые. Но в этом случае следует снабдить действие законом преобразования  $\omega$ . Этот закон имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta \omega_\mu^{ab} (\text{первый порядок}) &= \\ &= -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_\mu \tilde{\psi}^{ab} + \frac{1}{8} \bar{\epsilon} \gamma_5 (\gamma^\lambda \tilde{\psi}_\lambda^b e_\mu^b - \gamma^\lambda \tilde{\psi}_\lambda^a e_\mu^a); \quad (7.148) \\ \tilde{\psi}^{ab} &= \epsilon^{abcd} \psi_{cd}; \quad \psi_{ab} = e_a^{-1\mu} e_b^{-1\nu} (D_\mu \psi_\nu - D_\nu \psi_\mu). \end{aligned}$$



### 7.9.2. Общие свойства теорий супергравитации в 4-х измерениях

$N = 1$  мультиплет супергравитации состоит из  $(e_\mu^a, \psi_{\mu\alpha})$  и имеет спины  $(2, 3/3)$ . Этот мультиплет может быть связан с другими  $N = 1$  супермультиплетами с меньшими спинами: киральным мультиплетом со спинами  $(1/2, 0)$  и калибровочным мультиплетом  $(1, 1/2)$ , а также с мультиплетом гравитино, состоящим из гравитино и вектора со спинами  $(3/2, 1)$ . Добавляя соответствующее число таких мультиплетов, получаем  $N = 2, 3, 4, 8$  мультиплеты супергравитации. Число  $N$  равно числу генераторов суперсимметрии.  $N = 8$  супергравитация имеет максимальный суперсимметричный мультиплет со спинами 2. Связь с супергравитацией суперсимметричным мультиплетом является обобщением связи с гравитацией. Это осуществляется путём рассмотрения полей в искривлённом пространстве.

Мультиплеты супергравитации состоят из следующих полей:

1)  $N = 3$  супергравитация включает мультиплет  $(2, 3/2) + 2$  мультиплета гравитино  $(3/2, 1) +$  один векторный мультиплет  $(1, 1/2)$ . Поля  $\{e_\mu^a, \psi_\mu^i, A_\mu^i, \lambda\}$   $i = 1, 2, 3$ .

2)  $N = 4$  супергравитация. Мультиплет  $(2, 3/2) + 3$  гравитинных мультиплета  $(3/2, 1) + 3$  векторных мультиплета  $+ 1$  киральный мультиплет  $(1/2, 0)$ . Поля  $\{e_\mu^a, \psi_\mu^i, A_\mu^k, B_\mu^k, \lambda^i, \phi, B\}$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $A_\mu^k$  – вектор,  $B_\mu^k$  – аксиальный вектор,  $\phi$  – скаляр,  $B$  – псевдоскаляр.

3)  $N = 8$  супергравитация. Мультиплет  $(2, 3/2) + 7$  гравитинных мультиплета  $(3/2, 1) + 21$  векторный мультиплет  $(1, 1/2) + 35$  киральных мультиплетов  $(1/2, 0)$ . Поля  $\{e_\mu^a, \psi_\mu^i, A_\mu^{IJ}, \chi_{ijk}, v\}$  – один гравитон, 8 гравитино  $\psi_\mu^i$ , 28 фотонов  $A_\mu^{IJ}$ , 56 фермионов  $\chi_{ijk}$  со спином  $1/2$  и 70 скаляров в матрице  $v$ .

В этих моделях фотоны не связаны с фермионами, такие модели называют “некалиброванными” моделями. Однако эти модели об-

ладают глобальными симметриями, например,  $N=8$  имеет  $SO(8)$  глобальную симметрию.

Можно, однако, добиться связи калибровочных полей с фермионами, локализуя некоторые глобальные симметрии (ту же  $SO(8)$ ). Таким образом, абелевы поля становятся неабелевыми (полями Янга-Миллса), т.е. возникает самовзаимодействие. Другой способ получения “калибровочных” моделей – путём добавления космологической константы и требования инвариантности

$$\delta\psi_\mu^i = D_\mu (\omega(e, \psi)) \varepsilon^i + g\gamma_\mu \varepsilon^i + gA_\mu \varepsilon^i, \quad (7.149)$$

где  $g$  связана с космологической константой  $\Lambda \sim g$ . Из-за наличия космологической константы, калибровочные теории супергравитации рассматриваются на анти-де-ситтеровском фоне.

При числе измерений  $d > 4$  появляются антисимметричные тензорные поля  $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ , которые являются обобщением абелевых векторных полей с напряжённостями

$$F_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{n+1}]} \quad (7.150)$$

и действием

$$\int d^d x (\det e) F_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}^2. \quad (7.151)$$

Максимально возможная модель, имеющая смысл как 4-мерная теория, –  $N=1$  супергравитация в 11-ти измерениях, включающая гравитон  $e_\mu^a$ , гравитино  $\psi_{\mu\alpha}$  и антисимметричный тензор  $A_{\mu\nu\rho}$ . Какой смысл придавать многомерной теории? В духе Калуцы-Клейна, следует считать, что  $(d-4)$  измерения компактифицируются (например, в сферу или тор). В этом случае метрика

$$g_{\Lambda\Sigma} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^0(x) & 0 \\ 0 & g_{mn}^{(0)}(y) \end{pmatrix}, \quad (7.152)$$

где  $g_{\mu\nu}^0(x)$  – метрика 4-мерного пространства,  $g_{mn}^{(0)}$  – метрика пространства дополнительных измерений. Далее следует разложить поля многомерной теории вблизи (7.152) по сферическим гармоникам. Например,  $g_{\mu\nu}(x, y) = g_{\mu\nu}^0(x) + \sum_n g_{\mu\nu}^{(n)}(x) Y_n(y)$ , где  $Y_n$  – сферические гармоники (аналогично для фурье-мод). Наконец, раз-

мерная редукция означает отбрасывание высших мод и учёт лишь низшей фурье-моды, т.е.

$$g_{\Lambda\Sigma} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}(x) & h_{\mu m}(x) \\ h_{m\nu}(x) & g_{mn}^{(0)} + h_{mn}(x) \end{pmatrix}. \quad (7.153)$$

В заключение этой главы следует отметить, что SUSY – партнеры известных частиц пока не обнаружены, т.е. суперсимметрия оказывается нарушенной. Мы не рассматриваем механизмов нарушения SUSY (это могло бы составить предмет изучения отдельной книги), хотя и коснемся этой проблемы в следующей главе. Необходимо отметить, если масштаб нарушения SUSY составляет ТэВ’ы, то SUSY-партнеры способны обнаружить себя на LHC.

## Глава 8

# СИММЕТРИИ БОЛЬШОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

---

### 8.1. Группа $SU(5)$

Основная идея Большого объединения на некотором масштабе  $M_x$  сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий – найти группу симметрии  $G$ , которая проявляла бы себя на масштабах  $M_x$ . На масштабе  $M_x$  эта симметрия должна нарушаться, приводя при меньших масштабах энергии к группе симметрии стандартной модели  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Если измерить калибровочные константы при малых энергиях и экстраполировать их на большие масштабы, то они должны объединиться на масштабе  $M_x$ . Если не рассматривать объединения с гравитацией, то следует считать, что  $M_x \ll M_{Pl}$  – планковская масса ( $\sim 10^{19}$  ГэВ). Помимо объединения калибровочных взаимодействий, следует ожидать объединения кварков и лептонов в мультиплеты группы  $G$ . Это объединение способно объяснить квантование электрического заряда и нейтральность атомов – факты, принимаемые, но не объясняемые стандартной моделью. При таком объединении возникают взаимодействия между кварками и лептонами, приводящие к распаду протона.

Простейший пример объединения – модель Джорджи-Глешоу, основанная на калибровочной группе  $SU(5)$ . Группа  $SU(5)$  на масштабе  $M_x$  нарушается до группы  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , а на масштабе  $M_z$  – до группы  $SU(3)_c \times U(1)_{EM}$ .

В группе  $SU(5)$  фермионы включают три поколения, причём каждое поколение содержит 15 фермионных состояний.

Так, например первое поколение состоит из трёх дублетов левых кварков и шести синглетов правых кварков:

$$\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L, u_{iR}, d_{iR}, \quad (8.1)$$

а также левого лептонного дублета и правого лептонного синглета:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \bar{e}_R. \quad (8.2)$$

Здесь индекс  $i$  относится к цвету.

Второе поколение включает  $c, s, \nu_\mu, \mu$ . Третье –  $t, b, \nu_\tau, \tau$ .

Спинор с 15-ю компонентами, вообще говоря, соответствует группе  $SU(15)$  с 224-мя векторными бозонами. В группе  $SU(5)$  15 левых частиц распределяются по двум мультиплетам:

$$15 = \bar{5} + 10. \quad (8.3)$$

В первом поколении квинтет например выбирают следующим образом:

$$\tilde{Q}_L^a = (\tilde{d}_r, \tilde{d}_y, \tilde{d}_b, e^-, \nu_e)_L \quad (8.4)$$

или

$$Q_{aR} = (d_r, d_y, d_b, e^+, \bar{\nu}_e)_R, \quad (8.5)$$

$a = 1, 2, \dots, 5$  и  $r, y, b$  – цветовые индексы.

Декуплет соответствует антисимметризованному произведению

$$D_{ab} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_a Q_b - Q_b Q_a). \quad (8.6)$$

Действительно, для группы  $SU(3)$ , например, произведение  $3 \times 3 = 6 + \bar{3}$ , для группы  $SU(5)$   $5 \times 5 = 10 + 15$ .

Декуплет описывается антисимметричной матрицей

$$D_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{u}^b & -\tilde{u}^y & -u_r & -d_r \\ -\tilde{u}^b & 0 & \tilde{u}^r & -u_y & -d_y \\ \tilde{u}^y & -\tilde{u}^r & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_y & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_y & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Иногда говорят, что каждая из частиц декуплета построена из двух правых квинтетных частиц – квинтонов и гравитино – безмассовой нейтральной частицы со спином  $3/2$ . Такие частицы предсказываются моделями супергравитации. Фермионы группы  $SU(5)$  объединены в два различных мультиплета, и объяснение этому даёт группа  $SU(10)$ .

Вернёмся к группе  $SU(5)$ . Эта группа имеет 24 генератора. Если рассматривать теорию, в которой  $SU(5)$ -симметрия локальная, то каждому генератору соответствует векторный бозон. Генератором группы будет, например, электрический заряд. Поскольку след генератора равен нулю, то сумма зарядов частиц в  $SU(5)$ -мультиплете будет равняться нулю. Поэтому

$$Q_{d_r} + Q_{d_y} + Q_{d_b} = Q_e, \quad (8.8)$$

И при точной цветовой симметрии  $Q_d = -\frac{1}{3}$ , т.е.  $SU(5)$ -симметрия объясняет дробность зарядов кварков.

Что касается 24 векторных бозонов, то при точной  $SU(5)$ -симметрии все они безмассовые. Восемь бозонов, осуществляющих переходы между тремя цветными кварками – глюоны, они относятся к подгруппе  $SU(3)_c$ . Три бозона “ответственные” за переходы в лептонном секторе квинтета, –  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $W^0$ , связаны с группой  $SU(2)_L$ . Кроме того, имеется двенадцатый бозон  $B^0$ , источником которого являются гиперзаряды частиц, он соответствует группе  $U(1)$ . Как и в стандартной модели, фотон и  $Z$ -бозон являются ортогональными суперпозициями полей  $W^0$  и  $B^0$ . При этом бозоны взаимодействуют как с левыми токами  $\bar{d}_{L_i} \gamma_\mu d_L^k$ , так и с правыми токами  $\bar{d}_{R_i} \gamma_\mu d_R^k$ .  $W$ -бозоны взаимодействуют и с лептонами, и с кварками.

Двенадцать других векторных бозонов представляют собой два заряженных цветовых триплета:

$$X_{+4/3}^i, \tilde{X}_{-4/3}^i, Y_{+1/3}^i, \tilde{Y}_{-1/3}^i, \quad (8.9)$$

где  $i$  – цветовые индексы, а нижние индексы соответствуют электрическим зарядам. Бозоны  $X$  и  $\tilde{X}$  осуществляют переходы  $\tilde{d} \leftrightarrow e^-$ , а  $Y$  и  $\tilde{Y}$  – переходы  $\tilde{d} \leftrightarrow \nu$ . Если рассматривать переходы в декуплете, обмен  $X$  и  $Y$ -бозонами связан с нестабильностью протона. Чтобы обеспечить наблюдаемое ограничение на время жизни протона ( $\tau_p \geq 10^{32}$  лет), массы  $X$  и  $\tilde{X}$ -бозонов должны быть очень большими ( $\geq 10^{14}$  ГэВ). Очевидно, что  $SU(5)$ , если она и существовала, очень сильно нарушена, однако некоторые черты симметрии

могли сохраниться. В  $SU(5)$ -модели с минимальным набором частиц время жизни протона  $\tau_p \simeq 10^{29}$  лет. Как можно ожидать, при энергиях  $\sim M_x$ , кварки способны преобразовываться в лептоны путём обмена  $X$  и  $Y$ -бозонами. Однако и при имеющихся в настоящее время энергиях возможен обмен виртуальными  $X$  и  $Y$ -бозонами. Очевидно, что такие обмены подавлены за счёт больших масс в пропагаторах  $X$  и  $Y$ -бозонов. Диаграммы, приводящие к распаду протона в объединённой  $SU(5)$  теории, представлены на рис. 8.1.

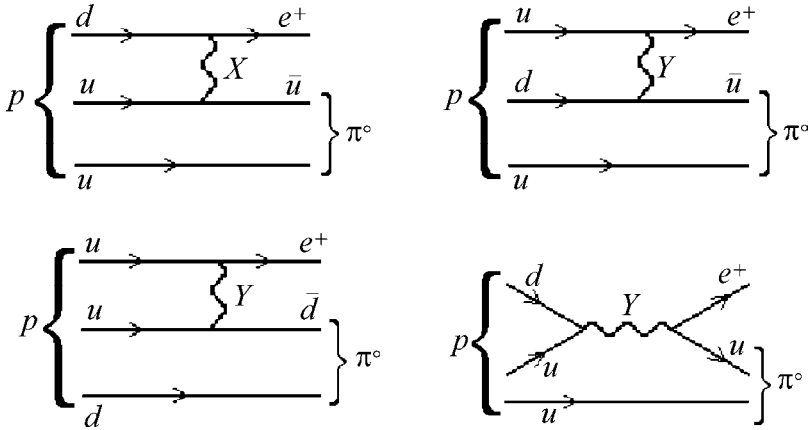


Рис. 8.1

Аналогично распаду мюона ( $\mu \rightarrow e \nu_e \nu_\mu$ ), можно ожидать для времени жизни протона

$$\tau_p \rightarrow e^+ \pi^0 = \frac{A M_x^4}{\alpha_{GUT}^2 M_p^5}. \quad (8.10)$$

В этом выражении безразмерная величина  $A \sim 1$  характеризует вероятность нахождения двух кварков в начале координат. Только тогда очень короткодействующий  $X$ -бозон способен осуществить переход  $u_d \rightarrow e^+ \bar{u}$ . Фактор  $M_x^4$  возникает за счёт пропагатора  $X$ -бозона, а фактор  $1/M_p^2$  обеспечивает правильную размерность

времени жизни. Если  $M_x = 3 \cdot 10^{14}$  ГэВ,  $\alpha_{GUT} \sim \frac{1}{100}$ ,  $A \approx 1$ , то  $\tau_p \approx 4 \cdot 10^{29}$  лет.

Интересно отметить, что в процессе распада протона  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  не сохраняется ни барионное число  $B$ , ни лептонное число  $L$ , однако разность  $B-L$  сохраняется.

Современные экспериментальные данные (с установки Super Kamiokande) дают ограничение на время жизни протона  $\tau_p > 10^{34}$  лет, и это исключает простейшую версию  $SU(5)$  как группы Большого объединения. Необходимо, однако, отметить, что в  $SU(5)$ -модели с дополнительными хиггсовскими бозонами время жизни протона  $\tau_p > 10^{34}$  лет.

## 8.2. Масштаб объединения

Поскольку в  $SU(5)$ -модели кварки и лептоны находятся в одних мультиплетах, можно оценить слабый угол смешивания. Действительно, константы  $g$  и  $g'$ , определяющие  $\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$  должны быть



Рис. 8.2

связаны на масштабах Большого объединения коэффициентами Клебша-Гордона. Рассмотрим диаграмму (рис. 8.2), характеризующую смешивание  $Z_0$  и  $\gamma$  через фермионную петлю (аналогично  $K^0 - \bar{K}^0$  смешиванию).

Поскольку  $Z_0$  и  $\gamma$  являются ортогональными состояниями  $\langle Z_0 | \gamma \rangle = 0$ , то после суммирования по всем фермионам в петле (лептонам и кваркам), полная константа связи в переходе  $Z_0 \rightarrow \gamma$  должна равняться нулю. Константа связи фермионов с  $Z_0$  пропорциональна  $(I_3 - Q \sin^2 \theta_W)$ , а константа связи с фотоном  $\sim Q$ . Для квинтета частиц в  $SU(5)$  квантовые числа (табл. 8.1).



Таблица 8.1

	$I_3$	$Q$
$\nu_e$	1/2	0
$e^-$	-1/2	-1
$\tilde{d}_R$	0	1/3
$\tilde{d}_B$	0	1/3
$\tilde{d}_G$	0	1/3

Так как полная константа связи, просуммированная по всем фермионам в петле, должна обращаться в ноль, то

$$\sum Q(I_3 - Q \sin^2 \theta_W) = 0. \quad (8.11)$$

Отсюда

$$\sin^2 \theta_W = \frac{\sum Q I_3}{\sum Q^2} = \frac{3}{8}. \quad (8.12)$$

Тот же результат получается, если суммирование провести по частицам из  $SU(5)$ -дублета. Поэтому на масштабах объединения

$$e^2 = g^2 \sin \theta_W = \frac{3}{8} g^2. \quad (8.13)$$

Заметим, что величина  $\sin^2 \theta_W$  в выражении (8.12) гораздо больше, чем наблюдаемое сейчас значение  $\sin^2 \theta_W$ , однако противоречия нет, поскольку (8.12) относится к величине  $g'/g$  в точке объединения  $M_x \sim 10^{15}$  ГэВ. Если обозначить через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  константы связи групп  $U(1), SU(2)$  и  $SU(3)$ , то на масштабах  $M_x$ :

$$\alpha_1(M_x) = \alpha_2(M_x) = \alpha_3(M_x) = \alpha_{GUT}. \quad (8.14)$$

В приближении лидирующих логарифмов константы связи ведут себя следующим образом:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + R\alpha(\mu^2) \ln(q^2 / \mu^2)}, \quad (8.15)$$

где  $R = -\beta_0 = 11n_b - 4n_f / (12\pi)$ ,  $n_b = 0, 2$  и  $3$  для групп  $U(1)$ ,  $SU(2)$  и  $SU(3)$ , число фермионных поколений  $n_f = 3$ . Когда в 70-х годах прошлого века впервые экстраполировали примерные величины  $\alpha_s$ ,  $\alpha_{em}$  и  $\sin^2 \theta_W$  на большие энергии, то оказалось, что  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  пересекаются в одной точке  $M_x \approx 3 \cdot 10^{14}$  ГэВ и  $\alpha_{GUT} \approx \frac{1}{43}$ .

Этот результат казался очень красивым и в значительной степени стимулировал эксперименты по поиску распада протона. Однако более поздние и более точные измерения  $\sin^2 \theta_W$  и  $\alpha_s$  на масштабах  $\mu = M_z$  показали, что функции  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  не пересекаются в 1 точке (рис. 8.3)

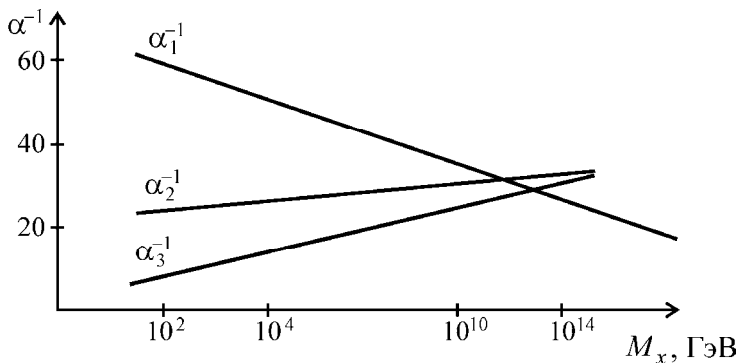


Рис. 8.3

Если масштаб объединения определяется пересечением  $\alpha_1^{-1}$  и  $\alpha_3^{-1}$ , то, экстраполируя  $\sin^2 \theta_W$  к имеющимся энергиям, получаем  $\sin^2 \theta_W = 0.214 \pm 0.004$ , что значительно меньше измеренного значения  $\sin^2 \theta_W = 0.2313 \pm 0.003$ .

Интересная возможность Большого объединения имеется в суперсимметричной версии  $SU(5)$  – модели. Включение новых степеней свободы изменяет коэффициент при  $\ln q^2 / \mu^2$ , т.е. в этом случае

$$R = R_{SUSY} = \frac{9n_b - 6n_f}{12\pi}. \quad (8.16)$$

В результате масштаб объединения возрастает и, что замечательно, функции  $\alpha_1^{-1}$ ,  $\alpha_2^{-1}$  и  $\alpha_3^{-1}$  пересекаются в одной точке при  $M_{GUT} = 3 \cdot 10^{16}$  ГэВ и  $\alpha_{GUT} \approx \frac{1}{24}$ , как показано на рис. 8.4

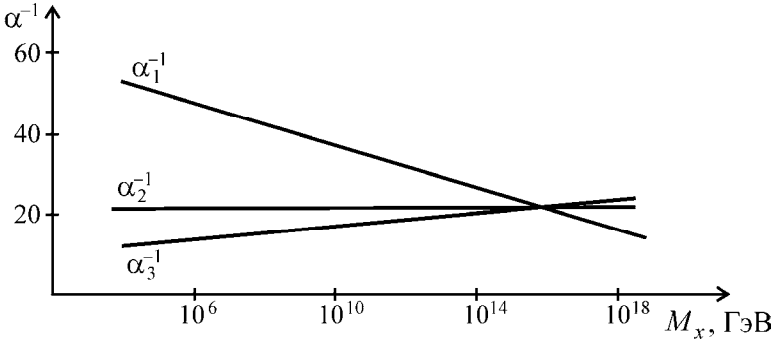


Рис. 8.4

Подводя итоги рассмотрения группы  $SU(5)$  как кандидата на группу Большого объединения, можно отметить следующие её достоинства:

А. Кварки несут дробный электрический заряд, поскольку в одном мультиплете с лептонами они имеют три цветовых заряда, а электрон – бесцветен, и для частиц мультиплета  $\sum_i Q_i = 0$ ; элек-

трический заряд – изначально генератор группы  $U(1)$  становится генератором неабелевой группы  $SU(5)$ .

Коммутационные соотношения среди генераторов группы  $SU(5)$  допускают лишь дискретные значения электрического заряда, т.е. квантование электрического заряда есть следствие Большого объединения.

Б. Подобие между лептонными и кварковыми дублетами, проявляется в слабых взаимодействиях, например,  $(\nu_l, l)_L$  и  $(u, d_c)_L$ , и соотношение  $Q(\nu) - Q(l) = Q(u) - Q(d)$  является естественным следствием лептон-кварковой симметрии.

Однако, как уже отмечалось выше,  $SU(5)$  в её простейшем варианте предсказывает “слишком малые” времена жизни протона, уже отвергнутые современным экспериментом. Поэтому вполне правомерен поиск других групп симметрии Большого объединения.

Группа  $SO(10)$  – группа ортогональных вращений в 10-мерном пространстве. В этой группе векторные частицы принадлежат 45-плету, а фермионы относятся к спинорному представлению.  $SO(10)$  – спинор имеет 16 компонент. Помимо 15 фермионов  $SU(5)$ -модели, имеется 16-й фермион – левое антинейтрино. Очевидно, что группа  $SU(5)$  является подгруппой группы  $SO(10)$ , а 16-плет фермионов состоит из трёх  $SU(5)$ -мультиплетов:  $16 = 10 + \bar{5} + 1$ .

Группа  $SO(10)$  нарушена, и цепочка спонтанных нарушений выглядит следующим образом:

$$SO(10) \rightarrow SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1). \quad (8.17)$$

Возможна и другая последовательность нарушений. Как и в случае  $SU(5)$ ,  $SO(10)$  модель в своём простейшем варианте предсказывает для времени жизни протона  $\tau_p \approx 10^{29}$  лет, и, следовательно, противоречит эксперименту. Интересно, что кроме распада протона,  $SO(10)$ -модель даёт предсказания для другого процесса с несохранением барионного числа ( $\Delta B \neq 0$ ). Это вакуумный переход нейтрона в антинейтрон, аналогичный осцилляциям  $K^0 - \bar{K}^0$ , но гораздо более медленный. Кроме того, в  $SO(10)$ -модели возникает отличная от нуля масса нейтрино. Действительно, фермионный 16-плет содержит как правые, так и левые нейтринные состояния.

Как известно, существуют четыре серии регулярных групп Ли и соответствующих им алгебр:

$$A_l = SU(l+1), \quad B_l = SO(2l+1), \quad C_l = Sp(8.2l), \quad D_l = SO(2l), \quad (8.18)$$

где  $l$  – ранг группы. Однако имеется ещё пять исключительных групп, ранг которых фиксирован:  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  (нижний индекс соответствует рангу). Среди кандидатов на группу Большого объединения рассматриваются группы  $E_6, E_7, E_8$ .

Группа  $E_6$  содержит  $SO(10)$  как подгруппу. Группа  $E_6$  имеет 78 калибровочных бозонов, а фермионы образуют 27-плет. Следует отметить две альтернативных  $E_6$ -модели. В первой  $E_6$ -модели име-

ется несколько фермионных 27-плетов, каждый из которых имеет следующий  $SO(10)$  состав:  $27=16+10+1$ . Поэтому, кроме 16-ти известных фермионных состояний, каждое поколение имеет ещё 11 состояний: синглетный кварк с  $Q=-1/3$ , синглетный майорановский лептон  $N^0$  и дублет лептонов  $L^+, L^0$ . Предполагается, что все они сверхтяжёлые. В другой версии  $E_6$ -модели все известные фермионы, плюс несколько дополнительных частиц, входят в 27-плет, который содержит 2 кварка с  $Q=2/3(u, c)$ , 4 кварка с  $Q=(-1/3)(d, s, b, h)$ , 4 лептона с  $Q=-1(e, \mu, \tau, \lambda)$  и 5 лептонов с  $Q=0(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \nu_\lambda, \nu_\rho)$ . Таким образом,  $E_6$ -модель предсказывает существование четырёх до сих пор необнаруженных частиц. Однако среди них нет  $t$ -кварка. Кроме того, в этой модели имеются нейтральные токи, изменяющие аромат кварков. В модели основанной на группе  $E_7$ , содержится 133 векторных бозона, фермионы относятся к 56-плету, включающему 6 цветных кварков, 6 цветных антикварков, 10 лептонов (8.4 заряженных и 6 нейтральных) и 10 антилептонов. К сожалению, в этой модели  $\sin^2\theta_W$  оказывается вдвое больше измеряемой величины.

Модель, основанная на группе  $E_8$  – слишком широкая, в ней 248 фермионов и 248 калибровочных бозонов, а число скалярных частиц превышает тысячу.

## 8.3. Суперсимметричное Большое объединение

### 8.3.1. Введение

Одной из фундаментальных симметрий природы, широко обсуждаемой в течение последних 30–40 лет, является симметрия между бозонами и фермионами – суперсимметрия (см. главу 7). Помимо объединения различных форм материи, идея суперсимметрии позволяет разрешить две концептуальные проблемы стандартной модели – происхождение электрослабого масштаба и его стабильности относительно квантовых поправок. По-видимому, теория частиц и их взаимодействий, так или иначе, должна включать суперсимметрию.

Поскольку суперсимметрия преобразует бозон в фермион и наоборот, неприводимое представление суперсимметрии будет со-

держат как фермионы, так и бозоны. В SUSY-теории все известные частицы сопровождаются суперпартнерами. например, электронный ( $e$ ) супермультиплет будет содержать суперпартнера  $\tilde{e}$  (сэлектрон), имеющего спин ноль. Преобразования суперсимметрии не коммутируют с лоренц-преобразованиями, однако коммутируют со всеми внутренними симметриями. Таким образом, все не лоренц-инвариантные квантовые числа, как для бозона, так и фермиона в одном и том же супермультиплете должны быть одинаковыми. Как и в случае всех симметрий, реализованных в вигнер-вейлевской моде, в пределе точной суперсимметрии все частицы супермультиплета должны иметь одинаковые массы. Поскольку это утверждение противоречит экспериментальным данным, суперсимметрия должна быть нарушенной. Интересная особенность суперсимметричных теорий состоит в том, что нарушающие суперсимметрию члены фиксируются требованием того, чтобы структура расходимостей теории оставалась неизменной.

### 8.3.2. Суперсимметричные теории поля

Чтобы определить действие суперсимметричной теории поля, рассмотрим теорию, содержащую киральные поля, обозначаемые  $\Phi(x, \theta)$ , с компонентами  $(\phi, \psi)$  и калибровочные поля  $V(x, \theta, \bar{\theta})$  с компонентами – калибровочными и калибринными полями  $(A^\mu, \lambda)$ . Действие теории в суперполевых обозначениях имеет вид

$$S = \int d^4x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^V \Phi + \int d^4x \int d^2\theta (W(\Phi) + W_\lambda(V) W_\lambda(V) + \text{э.с.}) \quad (8.19)$$

В этом выражении первый член – калибровочно-инвариантная кинетическая энергия полей материи  $\Phi$ ;  $W(\Phi)$  – голоморфная функция  $\Phi$ , называемая суперпотенциалом.  $W(\Phi)$  приводит к хиггсовскому потенциалу для обычных калибровочных теорий поля. Функция  $W_\lambda(V) \equiv D^2 \bar{D} V$ , где  $D = \partial_\theta - i\sigma \cdot \partial_x$ . Член, включающий  $W_\lambda(V)$ , приводит как к калибровочно-инвариантной энергии для калибровочных полей, так и полей калибрино.

В терминах компонент полей, лагранжиан теории записывается в виде

$$L = L_g + L_{\text{материя}} + L_Y - V(\varphi), \quad (8.20)$$

где

$$\begin{aligned} L_g &= \frac{1}{4} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \gamma^\mu i D_\mu \lambda; \\ L_{\text{материя}} &= |D_\mu \varphi|^2 + \bar{\Psi} \gamma^\mu i D_\mu \Psi; \\ L_Y &= \sqrt{2} g \bar{\lambda} \psi \varphi^+ + \psi_a \psi_b W_{ab}; \\ V(\varphi) &= |W_a|^2 + \frac{1}{2} D_\alpha D_\alpha, \end{aligned} \quad (8.21)$$

здесь  $D_\mu$  обозначает ковариантную производную по отношению к калибровочной группе;  $D_\alpha$  – так называемый  $D$ -член, задаваемый соотношением  $D_\alpha = g \varphi^+ T_\alpha \varphi$  ( $g$  – калибровочная константа,  $T_\alpha$  – генераторы калибровочной группы);  $W_a$  и  $W_{ab}$  – первая и вторая производные суперпотенциала по полю  $\Phi_a$ , индекс « $a$ » соответствует различным полям материи модели.

Очень важным свойством суперсимметричных теорий поля является их ультрафиолетовое поведение: в пределе точной суперсимметрии параметры суперпотенциала  $W(\Phi)$  не получают каких-либо (конечных или бесконечных) поправок за счет фейнмановских диаграмм, содержащих петли. Другими словами, если величина параметра суперпотенциала фиксирована на классическом уровне, это значение остается неизменным во всех порядках теории возмущений. Это утверждение известно как теорема о неперенормируемости. Указанное свойство является ключевым при решении проблемы хиггсовской массы в стандартной модели: радиационные поправки к массе хиггс-бозона в стандартной модели квадратично расходятся, и планковская масса служит естественным масштабом обрезания, если до этого масштаба не проявляются эффекты новой физики! Поскольку хиггсовская масса прямо пропорциональна массе  $W$ -бозона, то петлевые поправки способны «увести» массу  $W$ -бозона к планковской массе, дестабилизируя тем самым стандартную модель. В суперсимметричной версии стандартной моде-

ли (MSSM) в пределе точной суперсимметрии радиационные поправки к любому массовому параметру отсутствуют, поэтому значение массы хиггсовского бозона совпадает с его значением на древесном уровне. Таким образом, если бы суперсимметрия существовала во всем интервале энергий, проблема стабильности электрослабого масштаба была бы решена. Однако, поскольку SUSY должна быть нарушенной симметрией (мы пока не наблюдаем суперсимметричных партнеров известных частиц), то следует считать, что члены в гамильтониане теории, которые нарушают SUSY, не нарушают теорему о неперенормируемости таким образом, что в поправках к хиггсовской массе возникают бесконечности.

Это действительно происходит, если SUSY «мягко» нарушается членами вида:

- 1)  $m_a^2 \phi_a^+ \phi_a$ , где  $\phi$  – бозонная компонента кирального суперполя  $\Phi_a$ ;
- 2)  $m \int d^2\theta \theta^2 (AW^{(3)}(\Phi) + BW^{(2)}(\Phi))$ , где  $W^{(3)}(\Phi)$  и  $W^{(2)}(\Phi)$  – полиномы второго и третьего порядка в суперпотенциале;
- 3)  $\frac{1}{2} m_\lambda \lambda^T C^{-1} \lambda$ , где  $\lambda$  – поле калибрина.

Мягко нарушающие члены вносят лишь конечные петлевые поправки в параметры суперпотенциала. Так как все мягко нарушающие SUSY-члены имеют связи с положительными размерностями массы, петлевые поправки к хиггсовской массе будут зависеть от этих масс, и мы должны удерживать их на масштабе, меньшем ТэВ. Таким образом, электрослабый масштаб остается стабильным. Суперпартнеры известных частиц оказываются доступными для поиска на ILC и LHC.

Размерности масс, ассоциированные с мягко нарушающими членами, зависят от способа нарушения SUSY. Обычно предполагается, что SUSY нарушена в секторе, содержащем поля, которые не имеют каких-либо квантовых чисел стандартной модели. Это так называемый скрытый сектор. Нарушенная суперсимметрия трансформируется в видимый сектор или посредством гравитационных взаимодействий, калибровочных взаимодействий стандартной модели или посредством аномального  $U(1)$   $D$ -члена.



### 8.3.3. Минимальная суперсимметричная стандартная модель (MSSM) II

Рассмотрим суперсимметричное расширение стандартной модели, имеющее целью стабилизацию массы хиггсовского бозона. Суперполя и их представления содержатся в табл. 8.2. Для полей материи и хиггса показаны только лево-киральные поля. Поля правой киральности имеют сопряженные представления относительно калибровочной группы

Таблица 8.2

Суперполе	Калибровочное преобразование
кварки $Q$	$(3, 2, 1/3)$
антикварки $u^c$	$(3^*, 1, -4/3)$
антикварки $d^c$	$(3^*, 1, 2/3)$
лептоны $L$	$(1, 1, -1)$
антилептоны $l^c$	$(1, 1, +2)$
хиггс-бозон $\vec{H}_u$	$(1, 2, +1)$
хиггс-бозон $\vec{H}_d$	$(1, 2, -1)$
цветные калибровочные поля $G_a$	$(8, 1, 0)$
слабые калибровочные поля $W^\pm, Z, \gamma$	$(1, 3+1, 0)$

Прежде всего, важное отличие между стандартной моделью и её суперсимметричной версией, помимо наличия суперпартнеров, состоит в наличии второго хиггсовского дублета. Это необходимо с точки зрения придания масс кваркам и лептонам, а также для того, чтобы теория была свободной от аномалий. В базисе слабых собственных состояний лагранжиан слабого взаимодействия для кварков и лептонов точно такой же, как и в стандартной модели. Что касается слабых взаимодействий скварков и слептонов, углы смешивания поколений оказываются совсем другими, чем в соответствующем фермионном секторе. Причина заключается в нарушении суперсимметрии. Это обстоятельство имеет важные феноменологические следствия, поскольку калибрино-фермион-сфермионное

взаимодействие меняет поколения, приводя к потенциально большим эффектам нейтральных токов с изменениями аромата (FCNC), таким как  $K^0 - \bar{K}^0$ -смешивание,  $\mu \rightarrow e\gamma$  и т.д., если массы сфермионов различных поколений оказываются близкими.

Обратимся снова к обсуждению суперпотенциала MSSM. Он состоит из двух частей:

$$W = W_1 + W_2, \quad (8.22)$$

$$\text{где} \quad W_1 = h_l^{ij} l_i^c L_j \bar{H}_d + h_d^{ij} Q_i d_j^c \bar{H}_d + h_u^{ij} Q_i u_j^c \bar{H}_u + \mu \bar{H}_u \cdot \bar{H}_d. \quad (8.23)$$

$$W_2 = \lambda_{ijk} L_i L_j l_k^c + \lambda'_{ijk} L_i Q_j d_k^c + \lambda''_{ijk} u_i^c d_j^c d_k^c, \quad (8.24)$$

где  $i, j, k$  – индексы поколений.

Заметим, что члены в  $W_1$  сохраняют барионное и лептонное числа, а в  $W_2$  – не сохраняют.  $W_2$  называют членом, нарушающим  $R$ -четность, которая определяется следующим образом

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}, \quad (8.25)$$

где  $B$  и  $L$  – барионное и лептонное число,  $S$  – спин частицы. Определение (8.25) для частиц стандартной модели дает  $R = +1$ , а для их суперпартнеров  $R = -1$ . Таким образом, для сохраняющих  $R$ -четность теорий суперпартнеры частиц стандартной модели всегда рождаются парами, а легчайший суперпартнер должен быть стабильной частицей (LSP). Если LSP окажется нейтральной частицей, то она может рассматриваться как кандидат на темную материю Вселенной.

Предположим, что некоторый механизм нарушения суперсимметрии обеспечивает расщепление скварков, слептонов от кварков и лептонов. Обычно SUSY-нарушение вводится тройными взаимодействиями среди сфермионов:

$$\begin{aligned} L^{SB} = m_{3/2} & \left[ A_{l,ab} \tilde{l}_a^c \tilde{L}_b \bar{H}_d + A_{d,ab} \tilde{Q}_a \bar{H}_d \tilde{d}_b^c + \right. \\ & \left. + A_{u,ab} \tilde{Q}_a \bar{H}_u \tilde{U}_b^c \right] + \\ & + B\mu m_{3/2} \bar{H}_u \bar{H}_d + \sum_{i=\text{скаляры}} \mu_i^2 \phi_i^+ \phi_i + \sum_a \frac{M_a}{2} \lambda^T C^{-1} \lambda_a. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Как уже отмечалось, MSSM разрешает проблему массы хиггс-бозона. Если её древесное значение выбрано порядка электросла-

бого масштаба, то любые радиационные поправки  $\sim \frac{f^2}{16\pi^2} M_{\text{SUSY}}^2$ .

Выбирая масштаб нарушения SUSY в районе ТэВ'а, получаем, что во всех порядках теории возмущений масса бозона Хиггса остается стабильной.

Ограничения на масштаб нарушения SUSY дают возможность различить суперсимметричные и несуперсимметричные модели. Речь идет о массе легчайшего хиггс-бозона. Квадрат массы легчайшего хиггс-бозона  $\sim g^2 v_{\text{weak}}^2$ . Если вакуумные средние двух хиггсовских дублетов  $\langle H_u^0 \rangle = v_u$  и  $\langle H_d^0 \rangle = v_d$ , то

$$m_h^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} (v_d^2 - v_u^2). \quad (8.27)$$

Если ввести отношение  $\frac{v_u}{v_d} = \tan(\beta)$ , то выражение (8.27) перепишется в виде

$$m_h^2 = M_Z^2 \cos(2\beta), \quad (8.28)$$

т.е. на древесном уровне масса легчайшего хиггс-бозона меньше массы  $Z$ -бозона. Однако, с учетом радиационных поправок,  $m_h$  превышает  $M_Z$ . В большом классе SUSY-моделей (не слишком отличающихся от MSSM) масса легчайшего хиггс-бозона меньше 150 ГэВ.

Другое интересное свойство MSSM состоит в том, что электрослабая симметрия может нарушаться радиационными поправками. Во всех схемах мягкого нарушения SUSY посредством скрытого сектора, все скалярные поля получают вклады на масштабе нарушения SUSY, пропорциональные квадрату массы. Чтобы получить теорию на электрослабом масштабе, нужно с помощью ренормгруппы экстраполировать эти параметры. Характер экстраполяции зависит от интенсивности калибровочных и юкавских связей различных полей.

В частности,  $m_{H_u}^2 \sim \frac{h_f^2}{16\pi^2}$ , поскольку  $H_u$  связан с  $t$ -кварком. Так как  $h_f \approx 1$ , то возможно  $m_{H_u}^2(M_Z) < 0$ , т.е. спон-

танное нарушение электрослабой симметрии. Приближенное решение уравнений ренорм-группы дает

$$m_{H_u}^2(M_Z) = m_{H_u}^2(\Lambda_{\text{SUSY}}) - \frac{3h_t^2 m_t^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda_{\text{SUSY}}^2}{M_Z^2}\right). \quad (8.29)$$

Это очень привлекательное свойство суперсимметричных теорий.

#### 8.3.4. Надо ли выходить за рамки MSSM?

Несмотря на то, что MSSM решает две основополагающие проблемы стандартной модели (стабилизация массы хиггсовского бозона и нарушение электрослабой симметрии), она содержит ряд нежелательных следствий:

1. присутствие произвольных связей  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , нарушающих барионное и лептонное число. Действительно, комбинация  $\lambda'$  и  $\lambda''$  приводит к распаду протона. Современные ограничения на время жизни протона подразумевают, что  $\lambda'\lambda'' \leq 10 \div 25$  для массы скварка в районе ТэВа. Напомним, что очень привлекательной особенностью стандартной модели является сохранение барионных и лептонных чисел.

2. Различные матрицы смешивания в кварковом и скварковом секторах приводят к произвольной величине нарушения аромата, которое способно проявляться в разностях масс  $K_L - K_S$  и т.д. Экспериментальная информация на эту тему показывает, что стандартная модель описывает эти процессы, а это означает наличие

сильных ограничений на расщепление масс скварков:  $\frac{\Delta m_{\tilde{q}}^2}{m_{\tilde{q}}^2} \leq 10^{-3}$ .

Присутствие новых связей, включающих суперпартнеров, допускает существование дополнительных  $CP$ -фаз. В частности, присутствие фазы в массе глюино порождает большой электрический дипольный момент нейтрона, если только эта фаза не подавлена на  $2 \div 3$  порядка величины. В литературе это обстоятельство известно как SUSY  $CP$ -проблема. Чтобы разрешить эти проблемы, а также установить природу мягко нарушающих SUSY-членов, следует рассмотреть физику вне MSSM. Ниже будут рассмотрены два на-

правления новой физики: одно из них объясняет возникновение мягко нарушающих SUSY-членов, а второе автоматически приводит к сохранению  $B$  и  $L$ , а также решает SUSY-проблему  $CP$ .

### 8.3.5. Суперсимметричные лево-правые модели

Одной из привлекательных особенностей суперсимметричных моделей является их способность представить кандидатов на холодную скрытую массу Вселенной. Это утверждение есть следствие сохранения  $R$ -четности. Частицы стандартной модели имеют положительную  $R$ -четность, а их суперпартнеры – отрицательную. Поэтому легчайший суперпартнер абсолютно стабилен и может рассматриваться как кандидат на темную материю. В MSSM  $R$ -симметрия – неавтоматическая, она возникает в предположении о глобальном сохранении барионного и лептонного числа. Напомним, что в несуперсимметричной стандартной модели сохранение  $B$  и  $L$  возникает как следствие калибровочной симметрии и полевого содержания модели. Кроме того, замечено, что в присутствии непертурбативных гравитационных эффектов (таких? как черные и белые дыры) любая глобальная симметрия нарушается операторами, подавленными массой Планка. В этом случае эффекты нарушения  $R$ -четности становятся достаточно сильными, чтобы вызвать быстрый распад  $R$ -нечетного нейтрино. Таким образом, кандидатов на темную материю в минимальной суперсимметричной стандартной модели нет. Поэтому желательно поискать суперсимметричные теории, в которых, подобно стандартной модели,  $R$ -четность сохраняется (следовательно, сохраняются барионное и лептонное число), т.е. гарантируется полевым содержанием и калибровочной симметрией теории.

Такой теорией является суперсимметричная версия лево-правой модели, учитывающая «see-saw» механизм для массы нейтрино.

Калибровочная группа этой модели  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \times SU(3)_c$ . Киральные суперполя и левые и правые кварковые суперполя обозначаются как  $Q \equiv (u, d)$  и  $Q_c \equiv (dc, -uc)$ . Аналогично лептонные суперполя  $L \equiv (v, e)$  и  $L_c \equiv (e^c, -v^c)$ .  $Q$  и  $L$  преобразуются как левые дублеты с определенными значениями  $(B-L)$ , а  $Q^c$  и  $L^c$  – как правые дублеты с противоположными значениями  $(B-$

$L$ ). Симметрия нарушается за счет следующего набора хиггсовских суперполей:  $\phi_a (2, 2, 0, 1)$  ( $a = 1, 2$ );  $\Delta (3, 1, +2, 1)$ ;  $\bar{\Delta} (3, 1, -2, 1)$ ;  $\Delta c (-1, 3, -2, 1)$  и  $\tilde{\Delta}^c (1, 3, +2, 1)$ .

Существуют и альтернативные хиггсовские мультиплеты, призванные нарушать правую  $SU(2)$ , причем этот способ нарушения  $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  симметрии автоматически приводит к see-saw механизму генерации массы нейтрино.

Суперпотенциал этой теории содержит всего лишь несколько членов

$$W = Y_q^{(i)} Q^T \tau_2 \Phi_i \tau_2 Q^c + Y_l^{(i)} L^T \tau_2 \Phi_i \tau_2 L^c + \\ + i \left( f L^T \tau_2 \Delta L + f^c L^{CT} \tau_2 \Delta^c L^c \right) + \mu_\Delta \text{tr}(\Delta \bar{\Delta}) + \mu_{\Delta^c} \text{tr}(\Delta^c \bar{\Delta}^c) + \quad (8.30) \\ + \mu_{ij} \text{tr}(\tau_2 \Phi_i^T \tau_2 \Phi_j) + W_{NR},$$

где опущен индекс поколений;  $W_{NR}$  — обозначают неперенормируемые члены, возникающие за счет физики на больших энергетических масштабах (единых теорий или планковских эффектов). На этом этапе все связи  $Y_{q,l}^{(i)}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\mu_\Delta$ ,  $\mu_{\Delta^c}$ ,  $f$ ,  $f_c$  — комплексны;  $\mu_{ij}$ ,  $f$ ,  $f_c$  — симметричные матрицы.

Тогда часть суперсимметричного действия, возникающая из (8.30)

$$S_W = \int d^4x \int d^2\theta W + \int d^4x \int d^2\bar{\theta} W^+. \quad (8.31)$$

Очевидно, что эта теория не содержит нарушающих  $B$  и  $L$  членов. Из-за сохранения  $B$  и  $L$ , сохраняется и  $R$ -четность. В результате эта SUSY  $LR$  модель допускает существование частиц темной материи, если вакуумное состояние обладает определенной  $R$ -четностью. Желаемое вакуумное состояние теории, которое нарушает четность, но сохраняет  $R$ -четность, соответствует  $\langle \Delta^c \rangle = v_R \neq 0$ ;  $\langle \bar{\Delta}^c \rangle \neq 0$  и  $\langle \tilde{v}^c \rangle = 0$ . Тогда получаем калибровочную симметрию стандартной модели, которая нарушается посредством ненулевых вакуумных средних полей  $\phi$ . При этом масса нейтрино, вследствие

see-saw механизма,  $m_\nu \sim \frac{m_f^2}{f v_R}$ . Таким образом, подавление

$(V+A)$ -токов при низких энергиях и малость нейтринных масс оказывается взаимосвязанными. Оказывается, что лево-правая симметрия подразумевает довольно широкие ограничения на основное состояние модели. В минимальной модели лево-правые симметрии в основном состоянии и калибровочная симметрия оказываются ненарушенными. Чтобы нарушить калибровочную симметрию, в теорию нужно ввести синглеты. Однако, если  $R$ -четность спонтанно не нарушена, то в основном состоянии нарушается электрический заряд. Более того,  $R$ -четность может быть спонтанно нарушена, если  $M_{W_R} \leq$  нескольких ТэВ. Таким образом, перенормируемая версия SUSY  $LR$ -модели с синглетами,  $B-L=\pm 2$  триплетом и бидублетом может иметь сохраняющий электрический заряд только в том случае, когда масса  $W_R$  находится в районе ТэВ'а, а  $R$ -четность спонтанно нарушена. Это утверждение, однако, можно обойти в минимальном расширении модели, содержащем дополнительные суперполя  $\delta(3, 1, 1, 0, 1)$ ,  $\bar{\delta}(1, 3, 1, 0, 1)$ , или содержащем неперенормируемые члены. Такие дополнительные поля часто возникают в моделях, содержащихся в теориях Большого объединения.

Чтобы получить вакуум, сохраняющий  $R$ -четность (это необходимо, если мы хотим, чтобы LSP играла роль скрытой массы) без введения дополнительных полей, следует добавить неперенормируемые члены. В этом случае дважды заряженные хиггсовские бозоны и хиггсино становятся очень легкими, если масса  $W_R$  превышает значения  $10^{10}$  ГэВ. Это означает, что масса нейтрино должна быть порядка нескольких электронвольт. Именно такие массы нейтрино достаточны для того, чтобы они играли роль горячей темной материи. Таким образом, в SUSY  $LR$ -модели возникает интересная взаимосвязь между холодной и горячей скрытой массой.

Эта модель решает две другие проблемы MSSM: 1) SUSY  $CP$ -нарушения, 2) сильного  $CP$ -нарушения, если масштаб  $W_R$  невелик. Чтобы увидеть, как это происходит, определим изменения полей при преобразованиях лево-правой симметрии

$$\begin{aligned} Q &\leftrightarrow Q^{*c}; L \leftrightarrow L^{c*}; \Phi_i \leftrightarrow \Phi_i^+; \\ \Delta &\leftrightarrow \Delta^{c+}; \bar{\Delta} \leftrightarrow \bar{\Delta}^{c+}; \theta \leftrightarrow \bar{\theta}; \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\tilde{W}_{SU(2)_L} \leftrightarrow \tilde{W}_{SU(2)_R}^*; \quad \tilde{W}_{B-L, SU(3)_c} \leftrightarrow \tilde{W}_{B-L, SU(3)_c}^*.$$

Заметим, что эти преобразования соответствуют  $Q_L \leftrightarrow Q_R$  и т.д. Чтобы исследовать, как преобразования (8.32) влияют на параметры теории, запишем наиболее общие «мягкие» суперсимметричные члены, допускаемые симметрией модели

$$\begin{aligned} L_{soft} = & \int d^4\theta \sum_i m_i^2 \Phi_i^+ \Phi_i + \int d^2\theta \theta^2 \sum_i A_i W_i + \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 \sum_i A_i^* W_i^* + \\ & + \int d^2\theta \theta^2 \sum_\rho m_{\lambda_\rho} \tilde{W}_\rho \tilde{W}_\rho + \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 \sum_\rho m_{\lambda_\rho}^* \tilde{W}_\rho^* \tilde{W}_\rho^*. \end{aligned} \quad (8.33)$$

В этом выражении  $\tilde{W}_\rho$  обозначает калибровочно-ковариантное киральное суперполе, которое содержит  $F_{\mu\nu}$  члены с индексами, относящимися к калибровочной группе теории.  $W_i$  обозначает различные члены в суперпотенциале, причем все суперполя заменены их скалярными компонентами и матрицами связей, которые не идентичны входящим в  $\mathcal{W}$ . Соотношение (8.33) – наиболее общий вид мягко нарушающих SUSY-членов этой модели.

С определением (8.32)  $LR$ -симметрии

$$\begin{aligned} Y_{q,l}^{(i)} &= Y_{q,l}^{(i)+}; \mu_{ij} = \mu_{ij}^*; \mu_\Delta = \mu_{\Delta^c}^*; \quad f = f_c^*; \quad m_{\lambda_{SU(2)_L}} = m_{\lambda_{SU(2)_R}}^*; \\ m_{\lambda_{B-L, SU(3)_c}} &= m_{\lambda_{B-L, SU(3)_c}}^*; \quad A_i = A_i^+. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Заметим, что фаза массового члена глюино равна нулю вследствие ограничения четности. В результате однопетлевой вклад в электрический дипольный момент нейтрона от этого источника в низшем порядке обращается в ноль. Петлевые же поправки, возникающие после нарушения лево-правой симметрии, оказываются малыми, разрешая тем самым SUSY  $CP$  проблему. Более того, ограничения лево-правой симметрии подразумевают, что юкавские матрицы связей эрмитовы, поэтому если вакуумные средние  $\langle \phi \rangle$  полей вещественны, то  $\theta$ -параметр КХД на древесном уровне обращается в ноль, обеспечивая тем самым разрешение проблемы сильного



*CP*-нарушения. При этом для того, чтобы  $\theta$  был порядка  $10^{-9}$ , масса  $W_R$  должна быть порядка ТэВ. Такого типа модели предсказывают электрический дипольный момент нейтрона на уровне  $10^{-26}$  е. см. Этот уровень может быть достигнут в следующих поколениях измерений.

### 8.3.6. Объединение констант связи

Вскоре после открытия стандартной модели стало очевидным, что включение этой модели в более общие локальные симметрии ведет к двум очевидным преимуществам: а) высшие симметрии способны обеспечить кварк-лептонное объединение; б) эти симметрии ведут к описанию различных сил в терминах одной калибровочной константы. Насколько важно объединение калибровочных констант, было показано в работе Georgi, Quinn, Weinberg. Они использовали известный факт: константы связи теории зависят от массового масштаба. Ими было показано, что калибровочные константы могут объединяться на масштабе  $\sim 10^{15}$  ГэВ. Хотя этот масштаб и находится слишком далеко от возможностей современных ускорителей, объединение способно проявлять себя в барионной нестабильности (распад протона). Это наблюдение стимулировало целое поколение экспериментов по поиску распада протона. В минимальной модели большого объединения, основанной на группе  $SU(5)$ , время жизни протона теоретически предсказывалось в интервале  $2.5 \cdot 10^{28} \text{ лет} < \tau_p < 1.6 \cdot 10^{30} \text{ лет}$ . Экспериментальные данные исключили этот интервал  $\tau_p$ , исключив тем самым минимальную несуперсимметричную  $SU(5)$  модель. Кроме того, минимальная несуперсимметричная  $SU(5)$  модель предсказывает гораздо меньшее значение  $\sin^2 \theta_W$ , чем наблюдается экспериментально. Возрождение интереса к идее большого объединения возникло в середине 1980-х годов, когда идеи SUSY стали частью феноменологии элементарных частиц. Прежде всего, было осознано, что большая иерархия между электрослабым масштабом и масштабом большого объединения возможна только в суперсимметричной схеме. Во-вторых, чтобы совместить измеряемое значение  $\sin^2 \theta_W$

со значениями  $\alpha_s$  и  $\alpha$ , в эволюции констант, следует учесть суперпартнеров.

Нужно иметь в виду, что суперсимметрия – не единственная физическая теория вне стандартной модели, которая приводит к объединению констант и согласуется с измеряемым значением  $\sin^2 \theta_W$ . Если нейтрино имеют массы в диапазоне микро и миллиэлектрон-вольт, то see-saw механизм дает

$$m_{\nu_i} \approx \frac{m_{ui}^2}{M_{B-L}} \quad (8.35)$$

и подразумевает, что  $M_{B-L}$  масштаб составляет порядка  $10^{11}$  ГэВ. Еще в начале 1980-х годов было показано, что объединение констант возможно и в отсутствии суперсимметрии, если предположить, что на масштабах, больших  $M_{B-L}$ , группа калибровочной симметрии  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \times SU(3)_c$  или  $SU(2)_L \times \times SU(2)_R \times SU(4)_c$ .

### 8.3.7. Объединение калибровочных констант

При описании объединения калибровочных констант используют метод ренорм-группы. Предположим, что мы хотим описать эволюцию констант связи между масштабом  $M_1$  и  $M_2$  (т.е.  $M_1 < \mu < M_2$ ), соответствующим двум масштабам физики. Уравнение ренорм-группы зависит от вида калибровочной симметрии и полевого содержания теории при  $\mu = M_1$ . Однопетлевые уравнения эволюции для калибровочных констант (определим  $\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi}$ ) выглядят следующим образом

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} b_i \alpha_i^2, \quad (8.36)$$

где  $t = \ln(\mu)$ . Коэффициент  $b_i$  содержит вклады от калибровочной части и полей материи, содержащих хиггсовский вклад.

В общем случае

$$b_i = -3C_2(R) + T(R_1)d(R_2), \quad (8.37)$$

где  $C_2(R) = \sum_a R_a R_a$  и  $T(R)\delta^{ab} = \text{tr}(R_a R_b)$ ,  $R_a$  – генераторы рассматриваемой калибровочной группы. Следующее групповое соотношение весьма полезно для практических вычислений

$$C_2(R)d(R) = T(R)r, \quad (8.38)$$

где  $d(R)$  – размерность неприводимого представления,  $r$  – ранг группы (число диагональных генераторов). Важно отметить, что на масштабе Большого объединения (GUT) калибровочная группа входит в состав GUT, т.е. генераторы должны быть нормированы одинаково. Это означает, что если  $\Theta_a$ -генераторы группы при низких энергиях, то они должны удовлетворять условию  $\text{tr}(\Theta_a \Theta_b) = 2\delta_{ab}$ . Если мы суммируем по фермионам одного поколения, то обнаруживаем, что это условие удовлетворяется для  $SU(2)_L$  и  $SU(3)_c$  групп. С другой стороны, для оператора гиперзаряда следует записать  $\Theta_Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Y}{2}$ , чтобы удовлетворить условию

нормировки. Это обстоятельство следует учесть при вычислении коэффициента  $b_1$ .

Для MSSM коэффициенты  $b_i$  равны  $b_3 = -3$ ,  $b_2 = +1$  и  $b_1 = 33/5$ , где индекс  $i$  обозначает группу  $SU(i)$  ( $i > 1$ ) и при этом предполагается наличие трех поколений фермионов. Уравнения эволюции для калибровочных констант записываются в виде

$$2\pi \frac{d}{dt} \alpha_1^{-1} = -\frac{33}{5}; \quad 2\pi \frac{d}{dt} \alpha_2^{-1} = -1; \quad 2\pi \frac{d}{dt} \alpha_3^{-1} = 3. \quad (8.39)$$

Решениями этих уравнений являются

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1}(M_Z) &= \alpha_U^{-1} + \frac{33}{10\pi} \ln \frac{M_U}{M_Z}; \\ \alpha_2^{-1}(M_Z) &= \alpha_U^{-1} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_U}{M_Z}; \\ \alpha_3^{-1}(M_Z) &= \alpha_U^{-1} - \frac{3}{2\pi} \ln \frac{M_U}{M_Z}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Если эти три уравнения с двумя свободными параметрами совместны, то происходит объединение констант связи. Эти уравнения приводят к самосогласованному уравнению

$$\Delta\alpha \equiv 5\alpha_1^{-1}(M_Z) - 12\alpha_1^{-1}(M_Z) + 7\alpha_1^{-1}(M_Z) = 0. \quad (8.41)$$

Используя значения трех калибровочных констант на масштабе  $M_Z$

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) = 58.97 \pm 0.05; \quad \alpha_2^{-1}(M_Z) = 29.61 \pm 0.05; \quad (8.42)$$

$$\alpha_3^{-1}(M_Z) = 8.47 \pm 0.22,$$

получим  $\Delta\alpha = -1 \pm 2$ . Таким образом, на однопетлевом уровне объединение констант действительно происходит. Рассматривая любые два из уравнений эволюции (8.40), находим масштаб большого объединения  $M_U \sim 10^{16}$  ГэВ и  $\alpha_U^{-1} \approx 24$ .

Сравним «степень» объединения в суперсимметричной и стандартной модели. Величины  $b_i$  в стандартной модели  $b_1 = 41/10$ ,  $b_2 = -19/6$  и  $b_3 = -7$ . Объединение калибровочных констант в этом случае требует, чтобы

$$\Delta\alpha_{SM} = \frac{6}{23}\alpha_s^{-1}(M_Z) - \frac{309}{2507}\alpha_2^{-1}(M_Z) + \frac{15}{104}\alpha_1^{-1}(M_Z) = 0. \quad (8.43)$$

С помощью экспериментальных значений получаем  $\Delta\alpha_{SM} = 6.5 \pm 0.2$ , что отлично от нуля на много «сигм».

### **8.3.8. Объединение калибровочных констант на масштабе, меньшем масштаба Большого объединения**

Важным аспектом Большого Объединения является возможность существования промежуточных симметрий для реализации симметрии Большого объединения. Например, существование калибровочной группы  $SU(2)_L \times SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L} \times SU(3)_c$  до того, как калибровочная группа становится группой  $SO(10)$ . Обсудим, как эволюционные уравнения модифицируются в этом случае. Предположим, что на масштабе  $M_1$  происходит расширение калибровочной симметрии. Чтобы учесть это обстоятельство, необходимо совершить следующую последовательность действий: 1) если

«меньшая» группа  $G_1$  входит в «большую» группу  $G_2$  на масштабе  $M_1$ , то на однопетлевом уровне используется условие

$$g_1(M_1) = g_2(M_1), \quad (8.44)$$

2) если генераторы симметрии на низком масштабе возникают как линейные комбинации генераторов группы симметрии на высоком масштабе, то

$$\lambda_1 = \sum_b p_b \theta_b, \quad (8.45)$$

и условие совпадения (8.44) констант дает

$$\frac{1}{g_1^2(M_1)} = \sum_b \frac{p_b^2}{g_b^2(M_1)}. \quad (8.46)$$

Покажем, что это действительно так. Для простоты рассмотрим случай, когда  $G_2 = \prod_b U(1)_b$ , которая на масштабе  $M_1$  нарушается

до одной  $U(1)$ . Пусть это нарушение происходит посредством вакуумного среднего единственного хиггсовского поля  $\phi$  с зарядами  $(q_1, q_2, \dots)$  относительно  $U(1)$ . Ненарушенный генератор задается с помощью соотношения

$$Q = \sum_a p_a Q_a, \quad (8.47)$$

причем  $\sum_c p_c q_c = 0$ .

Массовая матрица калибровочного поля после действия механизма Хигса записывается в виде

$$M_{ab}^2 = q_a q_b q_a q_b \langle \phi \rangle^2. \quad (8.48)$$

Эта матрица имеет безмассовое собственное состояние, которое можно идентифицировать с ненарушенным  $U(1)$  калибровочным полем

$$A_\mu = \frac{1}{\left( \sum_b \frac{p_b^2}{g_b^2(M_1)} \right)^{1/2}} \sum_b \frac{p_b}{g_b} A_{\mu,b} = N \sum_b \frac{p_b^2}{g_b^2} A_{\mu,b}. \quad (8.49)$$

Для нахождения эффективной калибровочной константы запишем

$$L \sim \sum_b g_b Q_b A_{\mu,b} = \sum_b g_b (p_b Q + \dots) N \left( \frac{p_b}{g_b} A_{\mu} + \dots \right). \quad (8.50)$$

Собирая коэффициенты при  $A_{\mu}$  и используя условие нормировки  $\sum p_b^2 = 1$ , получаем соотношение (8.46).

Применим этот результат к ситуации, когда  $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  нарушена до  $U(1)_Y$ . Тогда

$$\frac{Y}{2} = I_{3,R} + \frac{B-L}{2}. \quad (8.51)$$

Нормированные генераторы

$$I_Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Y}{2}; \quad I_{B-L} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{B-L}{2}. \quad (8.52)$$

С их помощью находим

$$I_Y = \sqrt{\frac{3}{5}} I_{3R} + \sqrt{\frac{2}{5}} I_{B-L}. \quad (8.53)$$

Это означает, что на масштабе, при котором начинает проявлять себя лево-правая симметрия, константа связи  $\alpha_{2R}$  удовлетворяет соотношению

$$\alpha_Y^{-1} = \frac{3}{5} \alpha_{2R}^{-1} + \frac{2}{5} \alpha_{B-L}^{-1}. \quad (8.54)$$

Рассмотрим теперь приложение этой техники к  $SO(10)$  GUT и найдем условие, которому должна удовлетворять масса  $W_R$ , чтобы имело место объединение констант. Сначала найдем уравнения эволюции для констант связи  $SO(10)$  модели с промежуточным  $W_R$  масштабом. Для  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  эволюционные уравнения

$$\alpha_i^{-1}(M_Z) = \alpha_U^{-1} - \frac{b_i}{2\pi} \ln \frac{M_R}{M_Z} - \frac{b'_i}{2\pi} \ln \frac{M_U}{M_R}, \quad (8.55)$$

где  $i = 2, 3$ ;  $b'_i$  содержит вклады от всех частиц на масштабах, меньших  $M_R$ . Будем предполагать, что между  $M_R$  и  $M_U$  нет других частиц, кроме тех, которые включены в  $b_i$ . Что касается  $\alpha_1$ , воспользуемся соотношениями (8.22)

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) = \alpha_1^{-1}(M_R) - \frac{b_1}{2\pi} \ln \frac{M_R}{M_Z}. \quad (8.56)$$

С помощью (8.54), «эволюционируя» константу  $\alpha_{2R,B-L}$  между  $M_R$  и  $M_U$ , находим

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) = \alpha_U^{-1} - \frac{b_1}{2\pi} \ln \frac{M_R}{M_Z} - \left( \frac{3}{5} \frac{b'_{2R}}{2\pi} - \frac{2}{5} \frac{b'_{BL}}{2\pi} \right) \ln \frac{M_U}{M_R}. \quad (8.57)$$

Обозначим для удобства  $b'_1 = \frac{3}{5} b'_{2R} + \frac{2}{5} b'_{BL}$ . Тогда достаточное условие для существования промежуточной шкалы

$$\Delta\alpha_{\text{SUSY}} \equiv 5b'_1 - 12b'_{BL} + 7b'_3 = 0. \quad (8.58)$$

Если это условие удовлетворяется, то массы  $W_R$  должны находиться в ТэВ-ной области. В качестве примера такой теории рассмотрим следующий спектр частиц на масштабах, больших  $M_R$ : цветовой октет, пару  $SU(2)_R$  триплетов с  $(B-L) = \pm 2$ , два бидублета  $(2, 2, 0)$  и левый триплет. Соответствующие коэффициенты на масштабах больших  $M_R$

$$b'_3 = 0; \quad b'_{2L} = 4; \quad b'_{2R} = 6; \quad b'_{BL} = 15. \quad (8.59)$$

Эта модель удовлетворяет условию  $\Delta\alpha_{\text{SUSY}} = 0$ .

### 8.3.9. Объединение юкавских констант

Очевидным расширением идеи объединения калибровочных связей является объединение юкавских связей. Однако объединение юкавских связей – гораздо более модельно зависимое явление, чем объединение калибровочных констант. Конечно, можно потребовать частичного объединения юкавских связей вместо полного объединения всех трех поколений. Большинство моделей Большого объединения подразумевают частичное объединение юкавских связей типа

$$h_b(M_U) = h_\tau(M_U). \quad (8.60)$$

Для обсуждения следствий этой гипотезы необходимо проследить ренорм-групповую эволюцию этих связей до электрослабого масштаба. Ренорм-групповые уравнения для этих моделей

$$\begin{aligned}
2\pi \frac{d}{dt} \ln Y_b &= 6Y_b + Y_t - \frac{7}{15}\alpha_1 - \frac{16}{3}\alpha_3 - 3\alpha_2; \\
2\pi \frac{d}{dt} \ln Y_\tau &= 4Y_\tau - \frac{9}{5}\alpha_1 - 3\alpha_2; \\
2\pi \frac{d}{dt} \ln Y_t &= 6Y_t + Y_b - \frac{13}{15}\alpha_1 - \frac{16}{3}\alpha_3 - 3\alpha_2,
\end{aligned} \tag{8.61}$$

где введены определения  $Y_i \equiv \frac{h_i^2}{4\pi}$ . Вычитая из первого уравнения (8.61) второе и определяя  $R_{b/\tau} = \frac{Y_b}{Y_\tau}$ , получаем

$$2\pi \frac{d}{dt} (R_{b/\tau}) \approx \left( Y_t - \frac{16}{3}\alpha_3 \right). \tag{8.62}$$

Решая это уравнение совместно с условием объединения юкавских связей, находим

$$\frac{m_b}{m_\tau}(M_Z) = (R_{b/\tau}(M_Z))^{1/2} = A_t^{-1/2} \left( \frac{\alpha_3(M_Z)}{\alpha_3(M_U)} \right)^{8/9}, \tag{8.63}$$

где  $A_t = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_{M_t}^{M_U} Y_t dt \right)$ . Используя значение  $\alpha_U$  для MSSM большого объединения, получаем

$$\frac{m_b}{m_\tau}(M_Z) \approx 2.5 A_t^{-1/2}. \tag{8.64}$$

Наблюдаемое значение  $\frac{m_b}{m_\tau}(M_Z) \approx 1.62$ . Таким образом, очевидна значимость вклада от «бегущей» юкавской связи. Один из способов оценки  $A_t$  состоит в предположении, что  $h_t(M_U) = 3$ , тогда  $A^{-1/2} \approx 0.85$ , и отношение  $\frac{m_b}{m_\tau}$  близко к экспериментально наблюдаемому.



### 8.3.10. Юкавская связь $t$ -кварка и её инфракрасная фиксированная точка

Оказывается, что для больших значений юкавских связей  $t$ -кварка, независимо от того, насколько велико её асимптотическое значение, определяемое уравнениями ренорм-группы, имеется фиксированное значение и оно может быть использовано для предсказания массы  $t$ -кварка. Чтобы пояснить это утверждение, определим параметр  $\rho_t = \frac{Y_t}{Y_3}$ . Используя ренорм-групповые уравнения для

$Y_t$  и  $Y_3$ , можем записать

$$\alpha_3 \frac{d}{dt} \rho_t = -2\rho_t \left( \rho_t - \frac{7}{18} \right). \quad (8.65)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\rho_t(\alpha_3) = \frac{7/8}{1 - \left( 1 - \frac{7}{18\rho_{t0}} \right) \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_{30}} \right)^{-7/9}}, \quad (8.66)$$

где  $\rho_{t0} = \rho_t(\Lambda)$  и  $\alpha_{30} = \alpha_3(\Lambda)$ . При малых  $\mu$  в (8.65)  $\alpha_3$  возрастает, а при  $\alpha_3 \rightarrow \infty$   $\rho_t = 7/18$ . Это дает  $m_t \approx 129 \sin \beta$  ГэВ, что гораздо меньше наблюдаемого значения. Означает ли это, что эта идея не проходит? Ответ отрицательный. Действительно, при  $m_t(m_t)$   $\alpha_3$  далека от бесконечности. Более резонно использовать ренорм-групповые уравнения для  $Y_t$  и предположить, что при  $\Lambda \gg M_Z$   $Y_t \gg \alpha_3$ . Поэтому для очень больших  $\mu$

$$\frac{dY_t}{dt} \approx \frac{3Y_t^3}{\pi}. \quad (8.67)$$

В результате, если мы движемся вниз от  $\Lambda$ , сначала  $Y_t$  будет уменьшаться до тех пор, пока не станет сравнимой с  $\alpha_3$ , после чего достигнув значения  $6 Y_t \approx \left( \frac{16}{3} \right) \alpha_3$  перестает изменяться. Это ведет к предсказанию массы  $t$ -кварка  $m_t \approx 196 \sin \beta$  ГэВ, которая уже согласуется с экспериментальными данными. Если применить те же аргументы, то можно получить  $m_t \approx 278$  ГэВ. Означает ли это,

что суперсимметрия – правильный подход к изучению массы  $t$ -кварка?

### 8.3.11. Суперсимметричная $SU(5)$

Простейшая суперсимметричная модель Большого Объединения основана на группе  $SU(5)$ . Предполагается, что на масштабе Большого объединения  $M_U$   $SU(5)$  калибровочная симметрия нарушается до MSSM:

$$SU(5) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (8.68)$$

Идеи объединения, рассмотренные выше, дают основания надеяться, что на масштабе GUT единственная константа «распадается» на три константы связи стандартной модели.

В этой модели поля материи относятся к 5-мерным ( $\bar{5} = \bar{F}$ ) и 10-мерным представлениям, хиггсовские же поля относятся к  $\Phi \equiv 45$ ,  $H \equiv 5$  и  $\bar{H} = \bar{5}$  представлениям. Поля материи

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} d_1^C \\ d_2^C \\ d_3^C \\ e^- \\ \nu \end{pmatrix}; \quad T\{10\} = \begin{pmatrix} 0 & u_3^C & -u_2^C & u_1 & d_1 \\ -u_3^C & 0 & u_1^C & u_2 & d_2 \\ u_2^C & -u_1^C & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.69)$$

В дальнейшем для  $SU(5)$  групповые индексы обозначим через  $\alpha, \beta$  (например  $H_\alpha, \bar{H}^\alpha, F_\alpha T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha}$ );  $i, j, k$  – индексы  $SU(3)_C$ , а также индексы  $p, q$  для  $SU(2)_L$ .

Для обсуждения нарушения симметрии и других динамических аспектов модели выберем суперпотенциал

$$W = W_Y + W_G + W_h + W', \quad (8.70)$$

где

$$W_Y = h_u^{ab} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\sigma} T_a^\alpha \beta T_b^{\gamma\delta} H^\sigma + h_d^a b T^{\alpha\beta} \bar{F}_\alpha \bar{H}_\beta, \quad (8.71)$$

причем  $a, b$  – индексы поколений. Эта часть суперпотенциала «ответственна» за придание массы фермионам. Другое слагаемое в суперпотенциале

$$W_G = z \cdot \text{tr} \phi + x \cdot \text{tr} \phi^2 + y \cdot \text{tr} \phi^3 + \lambda_1 (H \phi \bar{H} + M H \bar{H}). \quad (8.72)$$

Эта часть суперпотенциала «ответственна» за нарушение симметрии и формирование легких хиггсовских дублетов на масштабах, ниже  $M_U$ . Заметим, что, несмотря на то, что  $\text{tr} \phi = 0$ ,  $z$ -член добавлен как множитель Лагранжа для усиления этого ограничения при минимизации потенциала. Оставшаяся часть суперпотенциала  $W_h$  представляет собой скрытый сектор, «ответственный» за нарушение суперсимметрии;  $W'$  — обозначает члены, нарушающие  $R$ -четность, которые мы обсудим ниже. Мы рассматриваем следующую цепочку нарушения симметрии

$$SU(5) \times \text{SUSY} \rightarrow \langle \Phi \rangle \neq 0 \rightarrow G_{SM} \times \text{SUSY}. \quad (8.73)$$

Для исследования нарушения симметрии используем  $W_G$  и вычисляем соответствующие  $F$ -члены. Положив эти члены равными нулю, получим условие наличия SUSY до электрослабого масштаба

$$F_{\phi, \beta}^{\alpha} = z \delta_{\beta}^{\alpha} + 2x \phi_{\beta}^{\alpha} + 3y \phi_{\gamma}^{\alpha} \phi_{\beta}^{\gamma} = 0. \quad (8.74)$$

Условие  $\langle \text{tr} \Phi \rangle = 0$  подразумевает, что  $z = -\frac{3}{5} y \langle \text{tr} \phi^{\alpha} \rangle$ . Если считать, что  $\text{diag} \langle \Phi \rangle = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ , то получим уравнения

$$\sum_i a_i = 0; \quad z + 2x a_i + 3y a_i^2 = 0, \quad (8.75)$$

где  $i = 1, \dots, 5$ . Таким образом, имеется пять уравнений и два параметра. Поэтому возможны три различных выбора величин  $a_i$ , которые удовлетворяют соотношениям (8.75):

$$1) \quad \langle \Phi \rangle = 0. \quad (8.76)$$

В этом случае  $SU(5)$  симметрия остается ненарушенной

$$2) \quad \text{diag} \langle \Phi \rangle = (a, a, a, a, -4a). \quad (8.77)$$

Тогда  $SU(5)$  нарушена до  $SU(4) \times U(1)$  и  $a = \frac{2x}{9y}$ ;

$$3) \quad \text{diag} \langle \Phi \rangle = (a, a, a, -3/2 b, -3/2 b). \quad (8.78)$$

Это желаемый вакуум, поскольку  $SU(5)$  нарушается до  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  калибровочной группы стандартной модели.

В этом случае  $b = \frac{4x}{3y}$ , и можно выбрать параметр  $x$  порядка  $M_U$ .

В суперсимметричном пределе все вакуумы вырождены.

### Низкоэнергетический спектр и дублетно-триплетное расщепление

Обсудим теперь, возникает ли в этой модели MSSM на масштабах ниже GUT. Поля материи входят в  $\bar{F}$  и  $T$  мультиплеты. Единственный вопрос: как возникают два хиггсовских суперполя  $H_u$  и  $H_d$  MSSM? Они должны входить в  $H$  и  $\bar{H}$  мультиплеты. Записываем  $H \equiv \begin{pmatrix} \xi_u \\ H_u \end{pmatrix}$  и  $\bar{H} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\xi}_d \\ H_d \end{pmatrix}$ . После подстановки  $\langle \Phi \rangle$  в  $W_G$  для случая (8.72) получим

$$W_{eff} = \lambda(b + M)\xi_u \bar{\xi}_d + \lambda\left(-\frac{3}{2b} + M\right)H_u H_d. \quad (8.79)$$

Если выбрать  $\frac{3}{2b} = M$ , то возникают безмассовые дублеты стандартной модели, а все другие частицы  $SU(5)$  получают большие массы. Непривлекательный аспект этой процедуры состоит в том, что параметры вводятся «руками», а не возникают естественным образом. Эта процедура расщепления цветных триплетов  $\xi_{u,d}$  от  $SU(2)_L$  дублетов  $H_{u,d}$  называется дублет-триплетным расщеплением и оказывается общим свойством GUT моделей. Преимущество SUSY GUT моделей состоит в том, что если «тонкая настройка» проведена на древесном уровне, то в силу теоремы о неперенормируемости, она сохраняется во всех порядках теории возмущений. В несуперсимметричной GUT сокращение между  $b$  и  $M$  должно быть проведено в каждом порядке теории возмущений.

### Массы фермионов и распад протона

Эффективный суперпотенциал полей материи при низких энергиях выглядит следующим образом

$$W_{matter} = h_u Q H_u u^c + h_d Q H_d d^c + h_l L H_d l^c + \mu H_u H_d. \quad (8.80)$$

Отметим, что  $h_d$  и  $h_l$  возникают из-за  $TF\bar{H}$  связи и поэтому удовлетворяют условию  $h_d = h_l$ . Аналогично,  $h_u$  возникает вследствие  $T\bar{H}$  связи и поэтому удовлетворяет условию  $h_u = h_u^T$ . Эти ограничения присутствуют и в MSSM. Соотношения между юкавскими связями справедливы для каждого поколения, но на этом пути возникают нежелательные соотношения между массами фермионов, например,  $\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_e}{m_\mu}$ . Это соотношение не зависит от мас-

совой шкалы, т.е. справедливо на электрослабом масштабе. Однако оно отличается от экспериментально наблюдаемого соотношения примерно в 15 раз. В этом состоит основная трудность минимальной  $SU(5)$  модели. Эта проблема не является фундаментальной для идеи Большого объединения, она связана лишь с конкретной реализацией этой модели. Действительно, включая дополнительные мультиплеты, например, 45-плет, можно избежать этой проблемы. Другой способ – добавить в теорию операторы высших размерностей, типа  $\frac{TF\phi\bar{H}}{M_{pl}}$ , которые могут быть порядка 0.1 ГэВ и которые

могли бы фиксировать предсказание массы мюона в  $SU(5)$ .

Присутствие, как кварков, так и лептонов в одном мультиплете  $SU(5)$  приводит к распаду протона. В несуперсимметричной  $SU(5)$  существуют два класса фейнмановских диаграмм, соответствующих распаду протона:

а) путем обмена калибровочными бозонами не-SUSY  $SU(5)$ , в которых генерируются операторы вида:  $e^+ udc^+ u$ ;

в) путем обмена хиггсовскими полями.

В суперсимметричной теории есть дополнительный источник распада протона путем обмена хиггсино, когда операторы  $QQH$  и  $QL\bar{H}$  посредством  $H\bar{H}$  смешивания генерируют эффективный оператор  $QQQL/MH$ .

Диаграмма с обменом калибровочным бозоном приводит к распаду  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  с амплитудой  $M_{p \rightarrow e^+ \pi^0} = \frac{4\pi\alpha_U}{M_U^2}$ . Это дает оценку

времени жизни протона

$$\tau_p \approx 4.5 \cdot 10^{29 \pm 0.7} \left( \frac{M_U}{2.1 \cdot 10^{14} \text{ ГэВ}} \right)^4. \quad (8.81)$$

Для  $M_U = 2.1 \cdot 10^{16}$  ГэВ получаем  $\tau_p = 4.5 \cdot 10^{37 \pm 0.7}$  лет. В настоящее время достигнут экспериментальный предел в  $10^{34}$  лет.

Обращаясь к диаграммам с обменом хиггсино, получаем амплитуду

$$M \approx \frac{h_u h_d}{M_H} \frac{m_{\text{калиб.}} q^2}{16\pi^2 M_Q^2}. \quad (8.82)$$

В этой формуле содержится подавление одной тяжелой массой. Есть и другие факторы подавления, но они не столь эффективны, как в случае обмена калибровочным бозоном. Другой аспект этого процесса состоит в том, что конечным состоянием оказывается  $\nu K^+$ , а не  $e^+ \pi^0$ . Это становится очевидным, если рассмотреть эффективный оператор, который возникает вследствие обмена цветовыми триплетными полями в  $5 + \bar{5}$ :  $Q\bar{Q}B=1 = Q\bar{Q}QL$ , где  $Q$  и  $L$  – суперполя, т.е. бозонные операторы. В терминах изоспиновых и цветных компонент они выглядят как  $\epsilon^{ijk} u_i u_j d_k e^-$  или  $\epsilon^{ijk} u_i d_j d_k \nu$ . Очевидно, если два  $u$  и  $d$  в этих выражениях относятся к различным поколениям, то эти операторы, в силу цветовой антисимметрии, обращаются в ноль.

Имеется несколько весьма привлекательных черт группы  $SU(5)$  как группы Большого объединения. Эта модель имеет очень мало параметров, т.е. она весьма предсказательна. Действительно, она выгодно отличается от MSSM, у которой более сотни параметров. SUSY  $SU(5)$  содержит пять параметров:  $A$ ,  $B$ ,  $m_{3/2}$  – характеризуют эффекты супергравитации; параметр  $\mu$  связан с  $H_u H_d$  смешиванием в суперпотенциале и  $m_{3/2}$  – универсальная масса калибрино. Это уменьшение числа параметров имеет следующие применения:

1. Объединение калибрино.

На масштабе GUT три калибрино имеют одинаковые массы ( $m_{\lambda_1} = m_{\lambda_2} = m_{\lambda_3}$ ). Их массы на электрослабом масштабе можно получить, используя соотношение ренорм-группы

$$\frac{d}{dt} m_{\lambda_i} = \frac{b_i}{2\pi} \alpha_i m_{\lambda_i}. \quad (8.83)$$

Решая эти уравнения, находим на электрослабом масштабе

$$m_{\lambda_1} : m_{\lambda_2} : m_{\lambda_3} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3. \quad (8.84)$$

Таким образом, возможное открытие калибрино может служить проверкой этой формулы, а также  $SU(5)$  Большого объединения.

## 2. Предсказание масс скварков и слептонов.

На масштабе нарушения SUSY все скалярные массы в схеме супергравитации одинаковы. Как и ранее, их значения на электрослабом масштабе определяются ренорм-групповым анализом:

$$m_Q^2 = m_{3/2}^2 + m_Q^2 + \frac{\alpha_U}{4\pi} \left( \frac{8}{3} f_3 + \frac{3}{2} f_2 + \frac{f_1}{30} \right) m_{\lambda_v}^2 + Q_Q^Z M_Z^2 \cos^2 2\beta, \quad (8.85)$$

где  $Q_u^Z = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$  и  $Q_d^Z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W$ ,  $f_k = \frac{t(2 - b_k t)^3}{1 - b_k t^2}$ ,  $b_k$  –

коэффициенты, возникающие в ренорм-групповом подходе. Соотношение (8.85) приближенно дает  $m_Q^2 = m_{3/2}^2 + m_{\lambda_v}^2 + 4m_{\lambda_v}^2$ . Это соотношение служит независимым тестом SUSY  $SU(5)$ .

## Проблемы и направления развития SUSY $SU(5)$

Как уже отмечалось выше, SUSY  $SU(5)$  весьма привлекательна с точки зрения простоты, однако она содержит целый ряд серьезных проблем:

### А. нарушение $R$ -четности.

В суперпотенциале содержатся перенормируемые члены, нарушающие барионное и лептонное число:

$$W' = \lambda_{abc} T_a \bar{F}_b \bar{F}_c. \quad (8.86)$$

Если записать это слагаемое через компоненты полей, то возникнут члены, нарушающие  $R$ -четность MSSM. Это члены типа  $L_a L_b e_c^c$ ,  $Q L d^c$ , а также  $u^c d^c d^c$  и т.д. Новая особенность, возникающая в схеме Большого объединения, состоит в том, что существует только один параметр связи, описывающий все три типа членов, т.е. константа связи  $\lambda$  удовлетворяет условию антисимметрии по индексам двух поколений  $b, c$ . Таким образом, полное число па-

параметров, нарушающих  $R$ -четность, равно 9 вместо 45 в MSSM. SUSY  $SU(5)$  не приводит к существованию легчайшей суперсимметричной частицы, которая оказывается стабильной и могла бы рассматриваться в качестве кандидата на холодную скрытую массу. Как мы увидим ниже,  $SO(10)$  модель дает решение этой проблемы.

Б. Проблема дублетно-триплетного расщепления.

Как мы видели выше, для генерации легких дублетов MSSM необходима «точная подгонка» двух параметров  $3/2\lambda b$  и  $M$  в суперпотенциале. Однако, если нарушение SUSY осуществляется посредством введения скрытого сектора, то SUSY-нарушающий лагранжиан имеет вид

$$L_{SB} = A\lambda\bar{H}\Phi H + B M\bar{H}H + h.c., \quad (8.87)$$

где символы соответствуют скалярным компонентам суперполей. В сценарии супергравитации  $A \neq B$ . В результате, если массы хиггсина удерживаются на электрослабом масштабе, то эта настройка не оставляет скалярные дублеты на электрослабом масштабе.

Известны два способа устранения этой проблемы.

1) Использование синглетного поля  $S$  и выбор суперпотенциал в виде

$$W_{\Delta T} = 2\bar{H}\Phi H + S\bar{H}H. \quad (8.88)$$

Суперсимметричный минимум теории соответствует

$$F_H = H_u (-3b + \langle S \rangle) = 0. \quad (8.89)$$

Условие  $\langle S \rangle = 3b$  отвечает легким дублетам, т.е. дублеты естественным образом остаются на электрослабом масштабе, и нет необходимости в «точной настройке». В этом случае нарушение суперсимметрии на древесном уровне проявляется в безмассовости MSSM дублетов как для фермионных, так и для бозонных компонент.

2) Механизм, который действует эффективнее, чем первый, называют механизмом «исчезнувшего» партнера. Можно выбрать в качестве нарушающего GUT симметрию мультиплет, имеющий такую связь с  $H$  и  $\bar{H}$  другими мультиплетами, что при нарушении  $SU(5)$  симметрии, только дублеты оказываются легкими.

3) Проблема бариогенезиса.

Есть и другие проблемы, связанные с SUSY  $SU(5)$  моделью. Одна из них – проблема барионной асимметрии Вселенной. Если ба-



рионная асимметрия модели генерируется на масштабе GUT, то должна генерироваться и лептонная асимметрия, чтобы сохранялась разность  $B-L$ . В результате оказывается возможным записать  $n_B = \frac{1}{2}n_{B-L} + \frac{1}{2}n_{B+L} = \frac{1}{2}n_{B+L}$ . Проблема в том, что сфалеронные взаимодействия, находящиеся в равновесии для  $102 \text{ ГэВ} < T < 10^{12} \text{ ГэВ}$ , будут «корректировать»  $n_{B+L}$ , поскольку они нарушают  $(B+L)$ -число. Таким образом, барионная асимметрия на масштабе GUT не «выживает» на электрослабом масштабе. Наконец, в  $SU(5)$  модели отсутствует естественный механизм генерации масс нейтрино, хотя и существуют модели, использующие нарушающие  $R$ -четность взаимодействия.

### 8.3.12. Суперсимметричная $SO(10)$

Эта модель Большого Объединения имеет целый ряд преимуществ по сравнению с  $SU(5)$ . Например, все фермионы попадают в одно спинорное представление  $SO(10)$ ; спинор  $SO(10)$ , является 16-мерным, содержит правые нейтрино, а именно это необходимо для генерации масс нейтрино. Калибровочная группа  $SO(10)$  – лево-право-симметричная, т.е. в её рамках разрешается проблема  $CP$ -нарушения SUSY-моделях. Остановимся более подробно на свойствах группы  $SO(10)$ .

Группа  $SO(2N)$  определяется алгеброй Клиффорда из  $2N$  элементов  $\Gamma^a$ , которые удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям

$$[\Gamma_a, \Gamma_b]_+ = 2\delta_{ab}, \quad (8.90)$$

где  $a, b$  изменяются от 1 до  $2N$ . Генераторы группы  $SO(2N)$  задаются следующим образом:

$$\Sigma_{ab} = [\Gamma_a, \Gamma_b]_- . \quad (8.91)$$

Изучение спинорных представлений  $SO(2N)$  значительно упрощается, если использовать  $SU(N)$  базис  $SO(2N)$ .

Для обсуждения  $SU(N)$  базиса введем  $N$  антикоммутирующих операторов  $\chi_i$  и  $\chi_i^+$ , удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям

$$[\chi_i, \chi_i^+]_+ = \delta_{ij}. \quad (8.92)$$

Тогда оказывается возможным выразить элементы алгебры Клиффорда  $\Gamma^a$  в терминах фермионных операторов

$$\Gamma_{2i-1} = \frac{\chi_i - \chi_i^+}{2i}; \quad \Gamma_{2i} = \frac{\chi_i + \chi_i^+}{2i}. \quad (8.93)$$

Спинорные представления группы  $SO(10)$  возникают следующим образом:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_j^+ |0\rangle \\ \chi_j^+ \chi_k^+ \chi_l^+ |0\rangle \\ \chi_j^+ \chi_i^+ \chi_l^+ \chi_m^+ \chi_n^+ |0\rangle \end{pmatrix}. \quad (8.94)$$

Очевидно, что это и есть 16-мерное представление. Состояния 16-мерного спинора имеют правильные квантовые числа, чтобы включать в себя фермионы одного поколения. Различные состояния частиц идентифицируются следующим образом

$$\begin{aligned} e^- &= \chi_4^+ |0\rangle; \quad d_i^c = \chi_i^+ |0\rangle; \\ u_i &= \chi_2^+ \chi_3^+ \chi_5 |0\rangle; \quad e^+ = \chi_1^+ \chi_2^+ \chi_3^+ |0\rangle \end{aligned} \quad \text{и т.д.} \quad (8.95)$$

Другие представления, такие, как 10, задаются с помощью  $\Gamma_a$ , а 45-плет –  $[\Gamma_a, \Gamma_b]$  и т.д. Иначе говоря, они обозначаются векторами с полностью антисимметричными индексами.

Тензорные представления, необходимые для нашего обсуждения:  $10 \equiv H_a$ ;  $45 \equiv A_{ab}$ ;  $120 \equiv \Lambda_{abc}$ ;  $210 \equiv \Sigma_{abcd}$ ;  $126 \equiv \Delta_{abcde}$  (все индексы полностью антисимметричны). Нам понадобится для записи юкавских связей типа  $\psi\psi H$  ( $H \equiv 10$ ) оператор зарядового сопряжения. Он задается в виде  $C = \prod_i \Gamma_{2i-1}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Генераторы груп-

пы  $SU(n')$  и  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  можно записать в терминах  $\chi$ . Поскольку группа  $SU(4)$  изоморфна  $SO(6)$ , то генераторы  $SU(4)$  будут включать только и их эрмитово сопряженные для  $i = 1, 2, 3$ , в то время как  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  содержит только  $\chi_p$  (и их эрмитово сопряженные) для  $p = 4, 5$ .  $SU(2)_L$  генераторы:  $I_L^+ = \chi_4^+ \chi_5$ , а  $I_L^-$  и  $I_{3,L}$  можно найти с помощью  $I_L^+$ . Аналогично,  $I_R^+ = \chi_5^+ \chi_4^+$ , а другие ге-

нераторы определяются с помощью  $I_R^+$ . Например,  $I_{3,R} = \frac{1}{2}[I_{+R} - I_{-R}]$ . Кроме того, операторы

$$B - L = -\frac{1}{3} \sum_i \chi_i^+ \chi_i + \sum_p \chi_p^+ \chi_p; \quad Q = \frac{1}{3} \sum_i \chi_i^+ \chi_i - \chi_4^+ \chi_4. \quad (8.96)$$

Заметим, что это лишь один из способов представления свойств группы  $SO(2N)$ . Преимущество спинорного базиса состоит в том, что вычисления требуют лишь манипуляций с антикоммутирующими соотношениями для  $\chi_i$ . Например, пусть нам нужно оценить массы up и down-кварков, индуцируемые на электрослабом масштабе взаимодействием с 10-плетом хиггсов. Иначе говоря, необходимо оценить оператор  $\psi C \Gamma_a \psi H_a$ . Чтобы обнаружить, какие компоненты  $H$  соответствуют электрослабым дублетам, заметим, что  $SO(10) \rightarrow SO(6) \times SO(4)$ . Обозначим через  $a = 1, \dots, 6$   $SO(6)$  индексы, а через  $p = 7, \dots, 10$  – индексы  $SO(4)$ . Группа  $SO(6)$  изоморфна группе  $SU(4)$ , а  $SO(4)$  – изоморфна группе  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ . Чтобы оценить матричный элемент приведенного выше оператора, необходимо придать ненулевые вакуумные средние  $H_{9,10}$ , поскольку все другие элементы имеют электрический заряд. Действительно, это можно увидеть в  $SU(5)$  базисе, где  $\chi_5$  соответствует нейтрино с нулевым зарядом, а все другие  $\chi$  имеют ненулевой электрический заряд. Таким образом, нужно оценить матричный элемент типа  $\langle 0 | \chi_1 \Gamma_g C \chi_2^+ \chi_3^+ \chi_4^+ | 0 \rangle$ . В этом матричном элементе только члены  $\chi_5$ , содержащиеся в  $\Gamma_g$ , а также  $\chi_2 \chi_3 \chi_4$  и  $\chi_1^+ \chi_5^+$ , определяют его величину.

Обсудим теперь нарушение  $SO(10)$  до группы симметрии стандартной модели.  $SO(10)$  содержит максимальные подгруппы  $SU(5) \times U(1)$  и  $SU(4)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times Z_2$ , где  $Z_2$  – группа, соответствующая зарядовому сопряжению. Группа же  $SU(4)_c$  содержит подгруппу  $SU(3)_c \times U(1)_{B-L}$ .

Прежде чем обращаться к нарушению симметрии, обсудим  $Z_2$  подгруппу и её приложения.

Дискретную подгруппу  $Z_2$  часто называют в литературе  $D$ -четностью. Относительно преобразований  $D$ -четности,  $u \rightarrow u^c$ ,  $e \rightarrow e^c$  и т.д. Вообще говоря, симметрия  $D$ -четности и  $SU(2)_R$  симметрии могут быть нарушены отдельно друг от друга. Это имеет несколько интересных физических приложений. Например, если  $D$ -четность нарушается на масштабе  $(M_P)$ , большем, чем  $(M_R)$   $SU(2)_R$ , то спектр хиггсовского бозона получается асимметричным, и две калибровочных константы эволюционируют по-разному. На масштабе  $M_R$   $g_L \neq g_R$ .  $SO(10)$  оператор, который включает операцию  $D$ -четности, имеет вид  $D \equiv \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_6 \Gamma_7$ . Присутствие группы  $D$ -четности на масштабах, ниже масштаба GUT, может привести к образованию доменных стенок, ограниченных струнами. Это утверждение имеет катастрофические космологические последствия, если  $M_P = M_R$ . Однако эту проблему удастся избежать, если  $M_P > M_R$ .

Таким образом, существует много способов нарушения  $SO(10)$  до группы симметрии стандартной модели. Ниже рассмотрим несколько интересных цепочек нарушения, а также  $SO(10)$  мультиплеты, чьи вакуумные средние приводят к нарушению.

А)  $SO(10) \rightarrow SU(5) \rightarrow G_{\text{Стандартной Модели}}$

Хиггсовский мультиплет, «ответственный» за нарушение на первом шаге – 16-мерный мультиплет (обозначим его через  $\psi_H$ ), который содержит поле с квантовым числом  $v^c$ , является  $SU(5)$  синглетом, но с ненулевым значением  $B-L$ . Второй шаг нарушения осуществляется за счет

$$16_H \rightarrow 1_{-5} + 10_{-1} + \bar{5}_{+3}. \quad (8.97)$$

Нарушение  $SU(5)$  до группы симметрии стандартной модели осуществляется за счет 45-мерного мультиплета, содержащего 24-мерное представление  $SU(5)$ . Это представление содержит синглет группы симметрии стандартной модели. В матричном обозначении, можно записать нарушение за счет 45-плета в виде  $\langle A \rangle = i\tau_2 \text{diag}(a, a, a, b, b)$ , где  $a \neq 0$ ,  $b$  – может быть как отличным от нуля, так и равным нулю.

Вторая физически интересная цепочка нарушений:

В)  $SO(10) \rightarrow G_{2 \times 4D} \rightarrow G_{\text{Стандартной Модели}}$

В этой цепочке обозначено  $G_{224D} = SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(4)_c \times Z_2$ .  
Нарушение происходит за счет хиггсовского мультиплета

$$54 = (1,1,1) + (3,3,1) + (1,1,20') + (2,2,6). \quad (8.98)$$

Вторая стадия нарушения  $G_{224D}$  до  $G_{\text{Стандартной Модели}}$  осуществляется двумя способами, приводящими к совершенно разной физике:  
1)  $16 + \overline{16}$ , 2)  $126 + \overline{126}$ .

Приведем разложение  $G_{224D}$  на 16 и  $\overline{126}$ :

$$\begin{aligned} 16 &= (2,1,4) + (1,2,\overline{4}); \\ 126 &= (3,1,10) + (1,3,\overline{10}) + (2,2,15) + (1,1,6). \end{aligned} \quad (8.99)$$

В матричном обозначении

$$\langle 54 \rangle = \text{diag}(2a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, -3a, -3a, -3a, -3a). \quad (8.100)$$

Для мультиплета 126 возникает компонента с ненулевым вакуумным средним.

Важно отметить, что если суперсимметрия проявляет себя до электрослабого масштаба, то следует рассматривать хиггсовские бозоны, которые парами (например,  $16 + \overline{16}$ ) уменьшают ранг группы.

C)  $SO(10) \rightarrow G_{2231} \rightarrow G_{\text{Стандартной Модели}}$ .

Это нарушение происходит за счет комбинации 54 и 45 – мерных хиггсовских представлений. Отметим отсутствие  $Z_2$  симметрии после первого нарушения симметрии. Действительно,  $(1, 1, 15)$  (относительно  $G_{224D}$ ) мультиплет, нарушающий  $SO(10)$  симметрию, нечетен относительно преобразований  $D$  – четности. Второй этап нарушения – точно такой же, как в случае (B).

D)  $SO(10) \rightarrow G_{224} \rightarrow G_{\text{Стандартной Модели}}$ .

На втором этапе нарушения отсутствует  $D$  – четность. Действительно, хиггсовский мультиплет 210 разлагается относительно  $G_{224}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} 210 &= (1,1,15) + (1,1,1) + (2,2,10) + \\ &+ (2,2,\overline{10}) + (1,3,15) + (3,1,15) + (2,2,6). \end{aligned} \quad (8.101)$$

Компонента, которая приобретает ненулевое вакуумное среднее –  $\sum 78910$ .

Обратимся теперь к обсуждению масс фермионов. Как обычно, в калибровочных теориях, они возникают из юкавских связей после спонтанного нарушения симметрии. Чтобы определить юкавские связи, заметим, что имеет место разложение  $16 \times 16 = 10 + 120 + 126$ . Поэтому калибровочно-инвариантные связи имеют вид:

$$\begin{aligned} 16.16.10 &\equiv \Psi^T C^{-1} \Gamma_a \Psi H_a; \quad 16.16.120 \equiv \Psi \Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c \Psi \Lambda_{abc} \\ &\text{и} \quad 16.16.126 \equiv \Psi \Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c \Gamma_d \Gamma_e \Psi \Delta_{abcde}. \end{aligned} \quad (8.102)$$

В этих выражениях опущены индексы поколений. Тракуя юкавские связи как матрицы в пространстве поколений, получаем следующие их симметричные свойства:  $h_{10} = h_{10}^T$ ,  $h_{120} = -h_{120}^T$  и  $h_{126} = h_{126}^T$ , где индексы обозначают юкавские связи спиноров с соответствующими хиггсовскими полями.

Чтобы после электрослабого нарушения симметрии фермионы приобрели массы, нужно придать ненулевые вакуумные средние компонентам полей в различных случаях:  $\langle H_{9,10} \rangle \neq 0$ ,  $\Lambda_{789,7810} \neq 0$  или  $\Lambda_{129} = \Lambda_{349} = \Lambda_{569} \neq 0$ . Аналогично  $\Delta_{12789} = \Delta_{34789} = \Delta_{56789} \neq 0$  и т.д.

$SO(10)$  модель подразумевает несколько важных ограничений на фермионные массы:

а) если имеется только один хиггсовский 10-плет, «ответственный» за формирование масс, то только при  $\langle H_{10} \neq 0 \rangle$  имеет место соотношение  $M_u = M_d = M_e = M_{\nu D}$ , где  $M_F$  ( $F = u, d, \dots$ ) обозначает массовую матрицу фермиона  $F$  – типа.

б) если имеются два 10-плета, то  $M_d = M_e$  и  $M_u = M_{\nu D}$ .

в) если фермионные массы формируются 126-плетом, то имеет место массовое соотношение, следующее из  $SU(4)$  –симметрии:  $3M_d = -M_e$  и  $3M_u = -M_{\nu D}$ .

Очевидно, если имеется только 10-плет, генерирующий массы фермионов, то возникают плохие массовые соотношения для первых двух поколений. С другой стороны, получается достаточно хорошее соотношение между массами  $b$  и  $\tau$ . Один из путей улучшения ситуации – учесть вклады от 126-плета, который осуществляет

расщепление кварковых и лептонных масс, поскольку «на языке»  $G_{224}$ , он содержит (2,2,15) компоненту, определяющую массовое соотношение  $m_e = -3m_d$ . В сочетании с вкладом 10-плета, это дает феноменологически приемлемые фермионные массы. Georgi и Jarlskog предложили следующий вид  $M_d$  и  $M_e$ :

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}; \quad M_e = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & -3f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}; \quad (8.103)$$

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

Эти массовые матрицы приводят к  $m_b = m_\tau$  на масштабе GUT и  $\frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{9} \frac{m_d}{m_s}$ , что неплохо согласуется с наблюдаемыми значениями.

Одной из притягательных черт  $SO(10)$  модели является содержащаяся в ней лево-правая симметрия. Следствие этого – полная кварк-лептонная симметрия спектра. Это означает существование правого нейтрино, которое необходимо для понимания малости масс нейтрино посредством see-saw механизма. See-saw механизм в стандартной модели можно реализовать введением в теорию правого нейтрино, являющегося синглетом по группе симметрии стандартной модели. Легко видеть, если в теории есть правые нейтрино  $\nu^C$ , то в суперпотенциале MSSM появляются дополнительные члены вида:  $h_\nu LH_u \nu^C + M \nu^C \nu^C$ . После нарушения электрослабой симметрии возникает  $2 \times 2$  массовая матрица для  $(\nu, \nu^C)$  вида

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & h_u \nu_u \\ h_u^T \nu_u & M \end{pmatrix}. \quad (8.104)$$

Эта матрица может быть диагонализирована, и при  $M \gg h_u \nu_u$  имеет «легкое» собственное значение  $m_\nu = \frac{(h_u \nu_u)^2}{M}$  и «тяжелое» собственное значение  $\approx M$ .

Легкое собственное значение можно рассматривать как слабо-взаимодействующее нейтрино, а тяжелое – как суперслабовзаимодействующее правое нейтрино. Таким образом, без всяких подгонок (используя только тот факт, что  $m_f = (h_u v_u)$ ) получаем

$$m_\nu = m_f^2 / M \ll m_f.$$

Заметим, что  $h_u v_u$  для трех поколений является матрицей – дираковской массой нейтрино. Левые, как и правые нейтрино, в этом случае оказываются майорановскими нейтрино.

Хотя в контексте стандартной модели естественно ожидать  $M \gg v_u$ , ничего неизвестно о величине  $M$ . Кроме того, соотношение  $h_u v_u = m_f$  следует рассматривать как предположение. Однако  $SO(10)$  модель допускает количественную трактовку обоих аспектов see – saw механизма.

Для исследования приложений включения see-saw матрицы в  $SO(10)$  модель, прежде всего, заметим следующее: если единственным источником масс кварков и заряженных лептонов является 10-мерное представление  $SO(10)$ , то имеет место, следующее соотношение между дираковской массой нейтрино и  $U$ -кварка:  $M_U = M_{\nu_D}$ . Кроме того,  $\nu^C \nu^C$  массовый член  $M$  возникает за счет вакуумного среднего  $\nu^C \nu^C$  компоненты  $\overline{126}$ -плета, т. е. соответствует масштабу нарушения калибровочной симметрии. Таким образом, за исключением матрицы  $f$  связи  $\overline{126}$ -плета, все может быть определено. Это обстоятельство обеспечивает предсказательность  $SO(10)$  модели в нейтринном секторе. Например, если выбрать типичные связи для  $f$  порядка единицы и пренебречь смешиванием поколений, то получим

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &\approx m_u^2 / 10 f v_{B-L}; & m_{\nu_\mu} &\approx m_c^2 / 10 f v_{B-L}; \\ m_{\nu_\tau} &\approx m_t^2 / 10 f v_{B-L}. \end{aligned} \quad (8.105)$$

Если выбрать  $v_{B-L} \approx 10^{12}$  ГэВ, то  $m_{\nu_e} \approx 10^{-8}$  эВ;  $m_{\nu_\mu} \approx 10^{-4}$  эВ;  $m_{\nu_\tau} \approx 1$  эВ. Эти значения масс нейтрино весьма привлекательны с точки зрения проблемы солнечных нейтрино и темной материи.



Интересно рассмотреть вопрос о величине  $v_{B-L}$  в  $SO(10)$  модели. Если спектр частиц до масштаба GUT такой же, как MSSM, то  $M_U$  и  $v_{B-L}$  одинаковы и порядка  $2 \cdot 10^{16}$  ГэВ. С другой стороны, если на масштабах, выше  $v_{B-L}$ , симметрия  $G_{2213}$  и спектр включает бидублеты SUSY  $LR$  теории,  $B-L = \pm 2$  триплеты как левой, так и правой групп, а также цветовой октет, то в однопетлевом приближении  $v_{B-L} \approx 10^{13}$  ГэВ. В рамках же подхода, описанного выше,  $v_{B-L}$  уменьшается до нескольких ТэВ. Таким образом, масштаб  $v_{B-L}$  оказывается модельно зависимым.

В  $SO(10)$  модели  $(B-L)$  симметрию можно нарушить, используя пару  $116 + \overline{16}$ . В этом случае для придания массы  $\nu^C$  можно использовать оператор  $16_m 16_m \overline{16}_H \overline{16}_H / M_{Pl}$ , который после нарушения  $(B-L)$  придает  $\nu^C$  массу  $\sim v_{B-L}^2 / M_{Pl}$ . Для  $v_{B-L} \approx M_u$  это дает  $M_{\nu^C} \approx 10^{13}$  ГэВ.

Другой способ получения малых масс нейтрино в  $SO(10)$  моделях – использовать 16-плеты вместо 126-плетов и не прибегать к «услугам» операторов высших размерностей, переходя при этом к  $3 \times 3$  see-saw механизму (вместо  $2 \times 2$ , обсуждавшегося выше). Для введения  $3 \times 3$  see-saw механизма нужен дополнительный синглетный фермион. Суперпотенциал модели

$$W_{33} = h\psi H\psi + f\psi\bar{\psi}_H S + \mu S^2. \quad (8.106)$$

После нарушения симметрии возникает следующая массовая матрица

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & hv_u & 0 \\ hv_u & 0 & f\bar{\nu}_R \\ 0 & f\bar{\nu}_R & \mu \end{pmatrix}, \quad (8.107)$$

где  $\bar{\nu}_R$  – вакуумное среднее  $\overline{16}_H$ . Диагонализуя эту матрицу в предположении  $v_u \approx \mu \approx v_R$ , получаем массу легчайшего нейтрино:

но:  $m_\nu = \frac{\mu h^2 v_u^2}{f v_R}$ , а также два других массовых соотношения  $\sim f v_R$ .

Очевидным преимуществом 126-плета перед 16-плетами является его способность автоматически сохранять  $R$ -четность даже после  $(B-L)$  нарушения. Действительно, поскольку  $R = (-1)^{3(B-L)+2S}$  и 126-плет нарушает  $(B-L)$  симметрию посредством  $v^C v^C$  компоненты, то он удовлетворяет правилу  $B-L=2$ . Подставляя это значение в формулу для  $R$ , обнаруживаем, что  $R$ -четность сохраняется даже после нарушения симметрии. С другой стороны, при использовании 16-плета,  $(B-L)$  нарушается  $v^C$  компонентой, т.е.  $B-L=1$ . В результате  $R$ -четность оказывается нарушенной после нарушения симметрии.

$SO(10)$  модель имеет очевидные преимущества перед  $SU(5)$ : возможность автоматического сохранения  $R$ -четности, малые ненулевые нейтринные массы, интересные фермионные массовые соотношения и т.д. Притягательна она и с точки зрения космологии: в её рамках на масштабе  $10^{11}$  ГэВ оказывается возможным генерировать лептонную асимметрию. Эта лептонная асимметрия в присутствии сфалеронных процессов способна конвертироваться в барионную асимметрию и объяснять наблюдаемое соотношение  $\frac{n_b}{n_\gamma}$ .

### 8.3.13. Большое объединение, основанное на группе $E_6$

Впервые эта группа рассматривалась в 1970-е годы. В 1980-е было показано, что компактификация Калаби-Яу суперструнных моделей приводит к группе  $E_6$  в видимом секторе и предсказывает представления для полей материи и хиггсовские мультиплеты, которые можно использовать для построения реалистических моделей.

Группа  $E_6$  содержит следующие подгруппы: 1)  $SU(10) \times U(1)$ ; 2)  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times SU(3)_C$ ; 3)  $SU(6) \times SU(2)$ . Наличие  $[SU(3)]^3$  подгруппы показывает, что  $E_6$  – объединение лево-право симметрично. Базисное представление группы  $E_6$  – 27-мерно. С целью построения реалистических моделей полезно представить разложение по первым двум подгруппам

$$SO(10) \times U(1) : 27 = 16_1 + 10_{-2} + 1; \quad (8.108)$$

$$[SU(3)]^3 : 27 = (3, 1, 3) + (1, \bar{3}, \bar{3}) + (\bar{3}, 3, 1).$$

Фермионное заполнение в базисе  $[SU(3)]^C$  выглядит следующим образом

$$(3, 1, 3) = \begin{pmatrix} u \\ d \\ D \end{pmatrix}; \quad (1, \bar{3}, \bar{3}) = \begin{pmatrix} u^c \\ d^c \\ D^c \end{pmatrix} \quad (8.109)$$

$$(\bar{3}, \bar{3}, 1) = \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ & e^+ \\ H_1^{-1} & H_2^0 & \nu^c \\ e^- & \nu & n_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, по сравнению с  $SO(10)$  появляется одиннадцать дополнительных фермионных полей, т.е. модель неминимальна в секторе полей материи. Важно отметить, что все новые фермионы – векторо-подобные. Это важно для низких энергий, так как электрослабые данные ограничивают число дополнительных фермионов, если они не являются вектороподобными. Кроме того, векторо-подобная природа новых фермионов важна с точки зрения сокращения аномалий стандартной модели.

Обратимся к нарушению симметрии и рассмотрим две цепочки. Хотя  $E_6$  – группа 6 ранга, существует много способов достижения группы симметрии стандартной модели (ранг 4). Одна из цепочек выглядит так:

$$E_6 \rightarrow [SU(3)]^3 \rightarrow G_{2213} \rightarrow G_{\text{Стандартной Модели}}.$$

Первый переход осуществляется за счет хиггсовского поля размерности 650, которое содержит синглет относительно  $[SU(3)]^3$ . В струнных моделях первый переход связан с вильсоновскими петлями, содержащими калибровочные поля вдоль компактифицированного направления. Второй переход в цепочке происходит посредством  $n_0$  поля 27-мерного хиггсовского бозона. Наконец, последний переход может происходить двумя способами в зависимости от того, хотим мы или нет сохранить  $R$ -четность после нарушения симметрии. Если не заботится о сохранении  $R$ -четности, то достаточно воспользоваться полем  $\nu^c$  27-плета хиггсовских бозо-

нов. С другой стороны, если необходимо сохранить  $R$ -четность, то хиггсовское поле минимальной размерности должно принадлежать 351-плету. Тогда можно получить группу симметрии стандартной модели.

Другая важная цепочка нарушений симметрии:

$$E_6 \rightarrow SO(10) \times U(1) \rightarrow G_{2213} \rightarrow G_{\text{Стандартной Модели}}.$$

Первый этап нарушения осуществляется за счет 78-мерного представления, а остальные – за счет 27-плета хиггсовских бозонов.

Массы фермионов в этой модели возникают за счет 27-плета хиггсов, поскольку  $27_m 27_m 27_H - E_6$  инвариантны и содержат дублеты MSSM. Взаимодействие  $[27]^3$  в терминах компонент можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} [27]^3 \rightarrow & QQD + Q^c Q^c D^c + QQ^c H^c + \\ & + LL^c H + H^2 n_0 + DD^c n_0 + QLD^c + Q^c L^c D. \end{aligned} \quad (8.110)$$

Отсюда видно, что если в дополнение к обычным значениям  $B-L$ , приписываемым обычным фермионам, считать  $B-L$  для  $D$  равным  $(-2/3)$ , а для  $D^c$   $(+2/3)$ , то тогда все члены в (8.110) сохраняют  $R$ -четность до нарушения симметрии. Если  $\langle v^c \rangle \neq 0$ , то  $d^c$  и  $D$  смешиваются, и это нарушает  $R$ -четность. Взаимодействие (8.110) генерирует член  $u^c d^c d^c$ , приводящий к процессам с  $\Delta B=2$ , например, нейтрон – антинейтронным осцилляциям.

#### 8.3.14. $SU(5) \times SU(5)$ объединение

Эта модель автоматически сохраняет  $R$ -четность, а также содержит простой see-saw механизм генерации нейтринных масс в контексте суперструнной компактификации. Причина введения  $SU(5) \times SU(5)$  – невозможность получить в струнных моделях 126-плет, в случае  $SO(10)$  определяющий фермионную компактификацию. Поля материи в этой модели относятся к лево-правосимметричным представлениям  $(\bar{5}, 1) + (1, 5) + (10, 1) + (1, \bar{10})$  (обозначенным через  $F_L, F_R, T_L, T_R$ )

$$\begin{aligned}
F_L &= \begin{pmatrix} D_1^c \\ D_2^c \\ D_3^c \\ e^- \\ \nu \end{pmatrix}; \quad F_R = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ e^+ \\ \nu^c \end{pmatrix}; \\
T_L &= \begin{pmatrix} 0 & U_3^c & -U_2^c & U_1 & d_1 \\ & 0 & U_1^c & U_2 & d_2 \\ & & 0 & U_3 & d_3 \\ & & & 0 & E^+ \\ & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad T_L = \begin{pmatrix} 0 & U_3 & -U_2 & U_1^c & d_1^c \\ & 0 & U_1 & U_2^c & d_2^c \\ & & 0 & U_3 & d_3^c \\ & & & 0 & E^- \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.111)
\end{aligned}$$

Критичной для сохранения  $R$ -четности является природа хиггсовского мультиплета в теории. Обычно считается, хиггсы относятся к  $(5, \bar{5})$ ,  $(15, 1) + (1, \bar{15})$ .

Группа  $SU(5) \times SU(5)$  сначала нарушается до  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  за счет  $(5, \bar{5})$ , приобретающего вакуумные средние  $\text{diag}(a, a, a, 0, 0)$ . При этом возникают векторно-подобные сверхтяжелые частицы  $U, D, E$ . Лево-правая группа затем нарушается до  $G_{\text{Ст.Мод.}}$  15-плетом хиггсов, приобретающим ненулевые средние в правом мультиплете в  $\nu^c \nu^c$  направлении. Эта компонента имеет  $B-L=2$ , т.е.  $R$ -четность остается точной симметрией. Массы легких фермионов и электрослабое нарушение возникает за счет вакуумного среднего второго  $(5, \bar{5})$  мультиплета, приобретающего ненулевые вакуумное среднее значение в направлении  $\text{diag}(0, 0, 0, b, b)$ . Особенностью этой модели является присутствие новых фермионов. Вследствие этого нормировка гиперзаряда и цвета отличается от стандартных моделей  $SU(5)$  и  $SO(10)$  объединения. Действительно, в этом случае  $I_Y = \sqrt{\frac{3}{13}} \frac{Y}{2}$ . В результате на масштабе GUT  $\sin^2 \theta_W = \frac{3}{16}$ . Таким образом, масштаб GUT в этом случае гораздо ниже, чем в стандартных сценариях.

### 8.3.15. $SU(6)$ Большое объединение

В этой модели при определенных условиях в процессе нарушения симметрии возникают хиггсовские дублеты MSSM как псевдо-голдстоуновские мультиплеты без всякого “fine tuning”.

Обсудим только хиггсовский сектор модели, поскольку наша цель – проиллюстрировать новый механизм дублетно-триплетного расщепления. Пусть хиггсовские поля относятся к  $35$ -плету (обозначенному через  $\Sigma$ ), а также к  $6$  и  $\bar{6}$  ( $H$  и  $\bar{H}$ ). Потребуем, чтобы, суперпотенциал модели имел следующую структуру

$$W = W_H + W(H, \bar{H}), \quad (8.112)$$

т.е. члены типа  $H\Sigma\bar{H}$  считаем равными нулю. Это довольно жесткое требование, однако оно имеет очень интересные следствия. Пусть поля имеют следующие ненулевые вакуумные средние

$$\langle H \rangle = \langle \bar{H} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \Sigma \rangle = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -2, -2). \quad (8.113)$$

Заметим, что  $\Sigma$  нарушает  $SU(6)$  группу до  $SU(4) \times SU(2) \times U(1)$ , а  $H$  – нарушает до  $SU(5) \otimes U(1)$ . Голдстоуновские бозоны, необходимые для нарушения до  $SU(5) \times U(1)$ , принадлежат  $5 + \bar{5} + 1$ , т.е. относительно группы стандартной модели преобразуются следующим образом

$$(\text{голд. бозон}) = (3, 1) + (1, 2) + (\bar{3}, 1) + (1, 2) + (1, 1). \quad (8.114)$$

Голдстоуновские же бозоны  $\Sigma$ , генерирующие нарушение  $SU(4) \times SU(2) \times U(1)$ , преобразуются как

$$(\bar{3}, 2) + (3, 2) + (1, 2) + (1, 2). \quad (8.115)$$

Поскольку оба вакуумных средних нарушены  $SU(6) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , то безмассовыми состояниями, «поглощенными» механизмом Хиггса, являются

$$(3, 1) + (\bar{3}, 1) + (1, 2) + (1, 2) + (3, 2) + (\bar{3}, 2) + (1, 1). \quad (8.116)$$

Видно, что единственными «непоглощенными» голдстоуновскими бозонами являются два слабых дублета  $(8.1, 2) + (8.1, 2)$ . Их можно идентифицировать как дублеты MSSM.

Важно подчеркнуть, что путь поиска простых групп Большого Объединения – это не единственный путь объединения частиц и взаимодействий во Вселенной. Может оказаться, что на струнном масштабе в теории суперструн непосредственно возникает стандартная модель. Эта возможность имеет серьезные преимущества и характерные проявления. Например, не нужно беспокоиться по поводу дублет-триплетного расщепления и нет необходимости в распаде протона. Однако в этом сценарии есть одно загадочное обстоятельство: MSSM спектр приводит к объединению на масштабе  $\sim 10^{16}$  ГэВ, в то время как струнный масштаб объединения  $\sim 10^{17.6}$  ГэВ. Как понять эту разницу? Вполне могут существовать промежуточные масштабы или новые частицы, которые изменяют поведение бегущих констант и восполняют отмеченную разницу.

На ранних стадиях развития идей Большого Объединения считалось, что GUT модели необходимы для квантования электрического заряда и происхождения материи во Вселенной. Сейчас же известно, что квантование электрического заряда можно объяснить сокращением калибровочных аномалий. Кроме того, поскольку GUT модели приводят к квантованию электрического заряда, чтобы получить наблюдаемые значения этих зарядов, необходимы дополнительные предположения относительно хиггсовских представлений. Таким образом, понимание величин электрических зарядов элементарных фермионов требует более чем простую группу GUT.

На феноменологическом уровне проверки идей Большого Объединения всегда оказываются модельно зависимыми. Идея может быть продуктивной даже в отсутствии экспериментальных проявлений. Ситуация выглядит аналогичной суперсимметрии. Многие физики считают, что если хиггсовский бозон с массой меньше 150 ГэВ, не будет обнаружен на LHC (ILC), то интерес к суперсимметрии как к идее, имеющей отношение к физике, будет в значительной степени утрачен. Ограничительных тестов для SUSY GUT не существует. С другой стороны, наблюдение значительного нарушения аромата в процессах  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $p \rightarrow K^+ \nu_\mu$  или  $N - \bar{N}$  ос-

цилляции означало бы проявление некоторых форм Большого объединения.

В настоящее время есть указания из различных экспериментов на существования масс нейтрино. Если они подтвердятся, то это будет сильным доводом в пользу существования локальной  $B-L$  симметрии, а также лево-право-симметричных моделей Большого объединения на масштабе  $\sim 10^{11}$  ГэВ.

#### 8.4. Суперсимметрия и феноменология суперструн

Как известно, генераторы SUSY образуют супералгебру, которая является (супер) расширением Пуанкаре алгебры Ли квантовой теории поля за счет фермионных генераторов. Эта супералгебра содержит как коммутаторы, так и антикоммутаторы. Вскоре после открытия (теоретического!) SUSY была проведена полная классификация простых и полупростых супералгебр, аналогичная картановской классификации алгебр Ли. Однако оказалось, что полная классификация супералгебр не слишком полезна для физики. В отличие от алгебр Ли, простые или полупростые супералгебры не могут быть использованы для описания внутренних симметрий.

В ранних работах по суперсимметричным теориям поля рассматривался лишь один фермионный генератор – майорановский спинор. Соответствующая супералгебра была названа  $N = 1$  SUSY. Рассматривались и расширенные версии ( $N > 1$ ) SUSY. Оказалось, однако, что  $N = 1$  SUSY в четырех измерениях – наилучший выбор для SUSY расширения стандартной модели элементарных частиц. Причина – киральные свойства физических фермионов.

Когда суперсимметрия была объединена с общей теорией относительности, возникла теория супергравитации, которая соответствует пределу бесконечного натяжения струны в теории струн. В настоящее время большинство теоретиков рассматривают теорию суперструн в 10-ти измерениях как кандидата на теорию Всего (ТОЕ), объединяющую общую теорию относительности и квантовую механику. В теории струн имеются 5 кандидатов, которые связаны между собой двумя типами дуальностей:  $S$ -дуальностью, свя-



зывающей пределы слабой и сильной константы  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ , и  $T$ -дуальностью, связывающей большой и малый радиусы компактификации:  $R \rightarrow \frac{1}{R} \cdot \alpha = \frac{g_s^2}{4\pi}$  – константа калибровочной группы на струнном масштабе,  $R$  – радиус компактификации из  $D$  измерений в  $(D-1)$  измерение. На рис. 8.5 (принадлежит J. Schwarz) показаны соотношения дуальностей, связывающие различные 10-ти мерные теории суперструн между собой, а также с  $M$ -теорией «живущей» в 11-ти измерениях и содержащей мембраны. На этом рисунке маленькими окружностями, линиями, тором и цилиндром изображены соответствующие многообразия при изменении  $D$  на одну или две единицы.

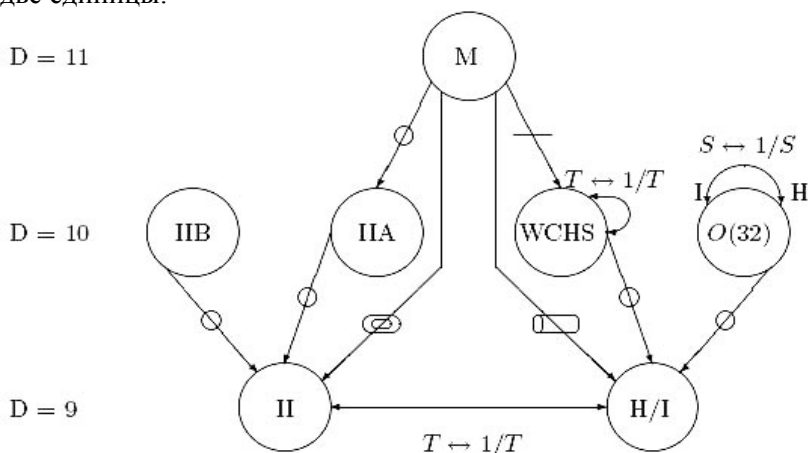


Рис. 8.5

Две  $O(32)$  теории являются  $S$ -дуальными одна к другой, в то время как  $E_8 \times E_8$  слабо связанная гетеротическая струнная теория ( $WCHS$ ) пертурбативно инвариантна относительно  $T$ -дуальности при компактификации на 4-е измерения. В этом случае  $R$  – радиус компактного 6-мерного многообразия.

Другое изображение  $M$ -теории, принадлежащее  $M. Green$ , представлено на рис. 8.6.

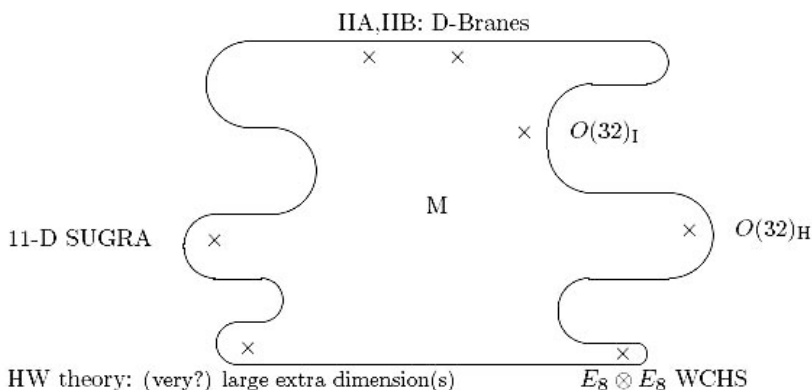


Рис. 8.6

Из этого рисунка видно, что все известные теории суперструн, как и  $D = 11$  супергравитация, являются пределами  $M$ -теории. Каждая точка на этом рисунке обладает очень большим числом вакуумов. В настоящее время наблюдается значительная активность в попытках установить число типов вакуумов в II В теории. В популярном Horava-Witten (HW) сценарии компактификации, при компактификации одного измерения 11-мерной  $M$ -теории снова приходят к HW сценарию с двумя 10-мерными бранами, каждая из которых содержит  $E_8$  калибровочную группу. Если радиус 11-го измерения устремить к нулю, возникает сценарий слабо связанных гетеротических струн. Именно этот сценарий наиболее естественным образом включает стандартную модель. В пределе бесконечного натяжения струны WCHS сводится к 10-мерной супергравитации, связанной с  $E_8 \times E_8$  янг-миллсовским калибровочным супермультиплетом. Если 6 измерений компактифицируются, скажем, на три двумерных тора, возникает плоская геометрия, причем теория будет иметь  $N = 4$  SUSY, поскольку 8-ми компонентный спинор, генерирующий преобразования симметрии в 10-ти измерениях, обеспечивает четыре 2-х компонентных суперсимметричных генератора в 4-х измерениях. Выше уже отмечалось, что только  $N = 1$  SUSY соответствует наблюдаемой физике частиц. Поэтому необходимо искривленное 6-мерное многообразие, имеющее

нетривиальную группу голономии (группа преобразований при параллельном переносе). Компактификация на пространства Calabi-Yau, имеет  $SU(3) \in \Sigma O(6)$  группу голономии, которая оставляет неизменным только 2-компонентный спинор, приводя, таким образом, к  $N=1$  суперсимметрии в 4-х измерениях. Калибровочную группу можно представить в виде:

$$E'_8 \times E_8 \ni E'_8 \times E_6 \times SU(3), \quad (8.117)$$

при этом уравнения движения требуют, чтобы пространственно-временная фоновая кривизна балансировалась фоном от напряженности калибровочного поля так, чтобы  $SU(3)$  подгруппу одной из  $E_8$  можно было идентифицировать с  $SU(3)$  группой голономии многообразия Calabi-Yau. Остающаяся при этом 4-мерная калибровочная группа –  $E'_8 \times E_6$ . Другой способ компактификации (на орбифолды) также очень популярен, поскольку компактное многообразие оказывается плоским за исключением сингулярных точек с бесконечной кривизной. В этом случае остаточная калибровочная группа в 4-х измерениях:

$$E'_8 \times E_6 \times [G' \subset SU(3)]. \quad (8.118)$$

В любом случае, это рассмотрение обнадеживает, так как  $E_6$  считается кандидатом на единую группу симметрии сильных и электрослабых взаимодействий стандартной модели. Безмассовый спектр состоит из полей, которые инвариантны относительно диагональной группы из двух нарушенных  $SU(3)$  (или, при орбифолдной компактификации, соответствующей подгруппы). Остающимися степени свободы 10-ти мерного калибровочного супермультиплета:

$$(A_M, \tilde{g})_{E'_8 \times E_8}, \quad M = 0, \dots, 9 \quad (8.119)$$

является 4-мерный калибровочный супермультиплет:

$$(A_\mu, \tilde{g})_{E'_8 \times E_6}, \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad (8.120)$$

который инвариантен относительно обеих  $SU(3)$ , а также киральный мультиплет полей материи:

$$(A_m, \tilde{g})_{E_8/[E_6 \times SU(3)]} = (27 + 2\bar{7})_{E_6}, \quad m = 4, \dots, 9, \quad (8.121)$$

который преобразуется как  $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$ .

Эти состояния разлагаются относительно калибровочных групп  $SO(10)$  и  $SU(5)$  следующим образом:

$$27_{E_6} = (16 + 10 + 1)_{SO(10)} = (\bar{5} + 10 + 1 + 5 + \bar{5} + 1)_{SU(5)}. \quad (8.122)$$

Комбинация  $\bar{5} + 10$  группы  $SU(5)$  содержит кварки и лептоны стандартной модели. Форма 16-плета  $SO(10)$ , совместно с синглетом стандартной модели, может соответствовать недавно обнаруженным малым массам нейтрино и смешиваниям. Мультиплет  $\bar{5} + 5$ , содержащийся в 10-плете  $SO(10)$ , включает, помимо прочих частиц, два хигсовских дублета, необходимые в суперсимметричных расширениях стандартной модели.

Таким образом, рассмотренные в этой главе симметрии Большого объединения так или иначе возникают в теории струн. Проблема в том, что этих возможностей теория струн предлагает чрезвычайно много. Какую (какие?) из них выбрала Природа? Ответ на этот вопрос способен многое прояснить в строении и эволюции нашей Вселенной. Действительно, новые симметрии – это новые взаимодействия и новые частицы. Существование темной материи и темной энергии – экспериментально установленный факт. Новые симметрии, безусловно, должны существовать. Просто в том масштабе расстояний и энергий, которыми мы обладаем, они не проявляют себя (или проявляют чрезвычайно слабо). Пожалуй, вряд ли мы найдем ответ на поставленный выше вопрос. Многое осознано в окружающем нас мире, но гораздо больше предстоит осознать на пути познания...

## Глава 9

# НАРУШЕНИЕ ЛОРЕНЦЕВСКОЙ И СРТ ИНВАРИАНТНОСТИ

---

### 9.1. Введение

Уже более 100 лет прошло с того времени, когда А. Эйнштейн опубликовал свою первую статью по специальной теории относительности. Эта теория основана на принципе лоренц-инвариантности: законы физики и скорость света одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Через несколько лет после появления пионерской работы Эйнштейна, Минковский показал, что специальная теория относительности требует новой пространственной геометрии. В этом отношении лоренц-симметрия – точная пространственно-временная симметрия, которой свойственна метрика Минковского в различных картезианских координатных системах.

В 1907–1915 годах А. Эйнштейн развил общую теорию относительности как новую теорию гравитации. В общей теории относительности пространство-время описывается в терминах метрики, являющейся решением уравнений Эйнштейна. При этом геометрия оказалась римановой, а физика – инвариантной относительно общих координатных преобразований. Лоренцевская же симметрия стала локальной. В каждой точке пространственно-временного многообразия можно выбрать такую локальную систему координат, в которой метрика оказывается метрикой Минковского. Однако выбор локальной системы координат не единственный, и локальные лоренц-преобразования обеспечивают связь между физически эквивалентными локальными системами.

Стандартная модель (СМ) физики частиц – релятивистская теория. СМ в пространстве Минковского инвариантна относительно глобальных лоренцевских преобразований, в римановом же пространстве-времени взаимодействия частиц должны быть инвариантными относительно как общих координатных преобразований, так и локальных лоренцевских преобразований.

Поля также инвариантны относительно калибровочных преобразований. Как хорошо известно, точная симметрия относительно локальных калибровочных преобразований приводит к существованию безмассовых калибровочных полей, таких как фотон. Спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии в электро-слабой теории включает механизм Хиггса, и калибровочные поля приобретают массу.

Классические гравитационные взаимодействия можно описать с помощью формализма вербейна по аналогии с калибровочной теорией. На этом пути описываются фермионы в искривленном пространстве-времени. Ковариантные производные тензоров в локальной лоренцевской системе включают спиновые связности. В римановом пространстве-времени с нулевым кручением спиновая связность не является не зависимой от поля, она зависит от вербейна и его производных. Однако естественной выглядит трактовка компонент спиновой связности как независимых степеней свободы. В результате приходим к пространству Римана-Картана с отличным от нуля кручением. В пространстве времени Римана-Картана ассоциированные полевые напряженности вербейна и спиновой связности являются тензорами кривизны и кручения. Обычное риманово пространство-время общей теории относительности возникает в пределе нулевого кручения. Аналогично, если тензор кривизны обращается в ноль, пространство-время сводится к пространству-времени Минковского.

Комбинация СМ и эйнштейновской классической теории гравитации дает успешное описание экспериментальных данных. Однако теория Эйнштейна не является квантовой теорией, поэтому можно надеяться, что она – предельный случай более общей квантовой теории. Кандидатом на квантовую теорию гравитации можно считать теорию струн. Масштаб, на котором становятся существенными квантовые эффекты гравитации, – масса Планка  $M_{Pl} \approx 10^{19}$  ГэВ.

Достаточно очевидно, что такой масштаб масс (энергий) на ускорителях нам недоступен. В этой ситуации следует выбрать альтернативный подход – исследовать эффекты новой физики в прецизионных экспериментах. Но для этого необходимо, чтобы новые эффекты были заметными на фоне процессов СМ или обычной

классической теории гравитации. Один из возможных сигналов, удовлетворяющий этому требованию, – наблюдение подавленных массой Планка эффектов нарушения лоренц-инвариантности.

Детектирование отклонений от специальной теории относительности было бы прямым указанием на существование новой физики на планковских масштабах. Эта идея не представляется полностью спекулятивной, поскольку как струнная модель, так и петлевая теория квантовой гравитации приводят к нарушению лоренц-инвариантности. К сожалению, эти теории еще недостаточно разработаны, чтобы допустить экспериментальную проверку при низких энергиях. Тем не менее, в настоящее время в этом направлении, благодаря идее эффективной теории поля, достигнут значительный прогресс. Чтобы быть реалистичной, эффективная теория должна содержать как СМ, так и общую теорию относительности, а также связи между ними. Кроме того, эта теория должна проявлять независимость от координат (или наблюдателя). В полной теории сектор гравитации должен содержать дополнительные поля, как, например, кручение, которые не содержатся в эйнштейновской общей теории относительности. Включение же таких полей приводит к более общим геометриям (включая пространство-время Римана-Картана). Эффективная теория поля такого типа, включающая независимое от наблюдателя лоренц-нарушение, называется расширением стандартной модели (СМР). Лагранжиан СМР, по определению, содержит скалярные члены, состоящие из произведений полей СМ и обобщенных гравитационных полей, а также связей, нарушающих лоренц-симметрию. В принципе, СМР, может иметь бесконечное число слагаемых в лагранжиане, в том числе перенормируемых членов с произвольной размерностью. Для исследования при низких энергиях, где и представляют интерес сигналы нарушения лоренц-инвариантности, ограничиваются в лагранжиане СМР конечным числом слагаемых. Обычно говорят о так называемом минимальном СМР, когда учитываются перенормируемые и калибровочно-инвариантные слагаемые.

Исторически интерес к нарушению лоренц-симметрии возник после работ Kosteletcky и Samuel в конце 80-х годов прошлого века, в которых было показано, что в теории струн оказывается возможным спонтанное нарушение лоренцевской симметрии. Спон-

танное нарушение лоренц-симметрии возникает в непертурбативном вакууме струнной теории, когда тензорные поля приобретают ненулевые вакуумные средние –  $\langle T \rangle \neq 0$ . В результате низкоэнергетическая эффективная теория содержит неограниченное число слагаемых типа

$$L \sim \frac{\lambda}{M_{Pl}^k} \langle T \rangle \Gamma \bar{\Psi} (i\partial)^k \chi, \quad (9.1)$$

где  $k$  – натуральная степень,  $\lambda$  – константа связи,  $\Psi$  и  $\chi$  – фермионные поля. В выражении (9.1) вакуумное среднее  $\langle T \rangle$  несет пространственно-временные индексы, которые здесь опущены. Эти вакуумные средние являются набором функций или констант, которые фиксированы в заданной системе отсчета наблюдателя. Это означает, что взаимодействия с этими коэффициентами имеют выделенные направления в пространстве-времени. Таким образом, коэффициенты при вакуумных средних индуцируют нарушение лоренц-симметрии.

Заметим, что многомерные ( $k > 0$ ) связи через производные, как ожидается, компенсируют дополнительные обратные степени планковской массы. В наиболее полной низкоэнергетической эффективной теории, описывающей фермионы  $\Psi$  и  $\chi$ , могут быть дополнительные юкавские связи. В общем случае член со взаимодействием в (9.1) записывается в виде:

$$L \sim t^{(k)} \Gamma \bar{\Psi} (i\partial)^k \chi, \quad (9.2)$$

где коэффициент  $t^{(k)}$ , несущий пространственно-временные индексы, содержит все константы связи, обратные массы и вакуумные средние. Коэффициент  $t^{(k)}$  действует как фиксированное фоновое поле, вызывающее нарушение лоренц-инвариантности. Конечно, помимо взаимодействий фермионов, могут быть и слагаемые со связями калибровочных и гравитационных взаимодействий. Важно подчеркнуть, что каждый член СМР считается наблюдаемым скаляром, т. е. все пространственно-временные индексы свернуты. СМР коэффициенты  $t^{(k)}$  предполагаются подавленными степенями планковской массы, причем степень подавления растет с ростом  $k$ . В отсутствие законченной теории струн невозможно при-



писать определенные численные значения этим коэффициентам. Возможно, что между ними существует определенная иерархия. Поскольку лоренц-нарушение до сих пор не наблюдалось, следует считать, что СМР коэффициенты малы. С другой стороны, можно ограничиться феноменологическим подходом и извлекать ограничения на эти коэффициенты из эксперимента.

Интересно отметить, что СМР первоначально мотивировано идеями теории струн, включая спонтанное нарушение лоренцевской симметрии, однако значение СМР выходит далеко за пределы этих идей. Действительно, СМР не содержит ничего, что требовало бы для лоренц-нарушающих коэффициентов наличия спонтанного нарушения лоренц-симметрии. Коэффициенты СМР можно рассматривать как результат прямого нарушения лоренц-симметрии или как результат доселе неизвестного механизма. Чтобы это проиллюстрировать, обратимся к некоммутативной теории поля. Это теории, содержащие некоммутативные координаты:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (9.3)$$

Известно, что подобные конструкции возникают в струнных теориях и приводят к нарушению лоренц-инвариантности. Однако в этом случае механизм, ведущий к нарушению лоренц-симметрии, отличен от спонтанного нарушения симметрии. Тем не менее, форма эффективных взаимодействий такая же, как СМР. Фиксированные параметры  $\theta^{\mu\nu}$ , нарушающие лоренц-симметрию, «действуют» как коэффициенты СМР. Например, эффективная теория поля, включающая  $U(1)$  калибровочное поле в некоммутативной геометрии, описывается лагранжианом

$$L \sim \frac{1}{4} i q \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi, \quad (9.4)$$

где  $F_{\alpha\beta}$  — полевые напряженности. В этом выражении, как и в (9.1), взаимодействие имеет вид скалярного произведения известного поля, операторов производных и набора фиксированных фоновых функций.

Необходимо подчеркнуть, что помимо нарушения лоренцевской симметрии, СМР приводит к нарушению дискретной  $CPT$ -симметрии. Эта симметрия есть произведение операций зарядового сопряжения ( $C$ ), четности ( $P$ ) и обращения времени ( $T$ ). Со-

гласно *CPT*-теореме, релятивистская теория поля, описывающая точечные частицы, должна быть *CPT*-симметричной. С другой стороны, другая (обратная) теорема утверждает, что если *CPT*-инвариантность нарушена в теории поля, то лоренц-инвариантность тоже должна быть нарушенной. Таким образом, любая независимая от наблюдателя эффективная теория поля, описывающая *CPT*-нарушение, должна содержаться в СМР. Поскольку *CPT*-теорема может быть проверена с высокой точностью в экспериментах с веществом и антивеществом, то это открывает новые возможности для изучения нарушения лоренц-инвариантности.

Таким образом, полная СМР определяется как наиболее общая, независимая от наблюдателя теория с нарушенной лоренц- и *CPT*-инвариантностью, содержащая СМ и гравитацию.

Наконец, необходимо сделать несколько замечаний относительно коэффициентов СМР. Эти коэффициенты, связанные с ненулевыми вакуумными средними тензорных полей, генерируемых при спонтанном нарушении лоренц-симметрии, напоминают «старый добрый» эфир. Однако эфир первоначально считался средой, в которой распространяется свет. СМР коэффициенты нет необходимости рассматривать подобным образом. Эти коэффициенты действуют как фоновые вакуумные поля. Их взаимодействия «выбирают» определенные сорта частиц. Действительно, если частица не является фотоном, то СМР-коэффициент не влияет на зависимость скорости света от направления. Более того, СМР-коэффициенты несут тензорные индексы, поэтому имеют выделенные пространственно-временные направления в любой системе отсчета. Итак, несмотря на некоторую похожесть с представлениями об эфире, физическое содержание СМР-коэффициентов значительно отличается от этих представлений.

## **9.2. Расширения стандартной модели, нарушающие лоренцевскую инвариантность**

Одна из основных особенностей СМР состоит в том, что эта теории не зависит от наблюдателя. Поэтому весьма важно различать лоренц-преобразования наблюдателя и частицы. Лоренц-преобразование наблюдателя изменяет систему отсчета наблюда-

теля. Это преобразование можно рассматривать как вращение и сдвиг базисных векторов в локальной системе отсчета. Философия СМР состоит в том, что даже при лоренц-нарушении физика должна оставаться независимой от наблюдателя. лоренц-преобразование частицы – вращение или сдвиг поля, приписываемого частице, оставляющее систему координат неизменной. В этом случае, если имеет место лоренц-нарушение, физика может изменяться. С точки зрения эксперимента, наблюдательная инвариантность СМР означает, что результаты измерения не зависят от выбора системы координат. С другой стороны, если лоренцевская симметрия нарушена, результаты эксперимента могут изменяться, если измерительная аппаратура вращается или сдвигается в некотором направлении. Конечно, эта особенность СМР нарушает принцип относительности, являющийся основным предположением (ненарушенной) релятивистской теории. Это принцип иногда формулируется как эквивалентность пассивных и активных преобразований Лоренца, когда одно преобразование рассматривается обратным другому преобразованию.

Подобное же различие между преобразованиями наблюдателя и частицы имеет место для общих координатных преобразований, проводимых на пространственно-временном многообразии с геометрией Римана или Римана-Картана. Преобразование наблюдателя – это изменение пространственно-временных координат, которое оставляет физику неизменной. С другой стороны, преобразование частицы – это диффеоморфизм, отображающий одну точку пространства-времени в другую.

Вообще говоря, полное СМР следует определять с помощью вербейн-формализма. Это дает возможность обнаружить отличие между пространственно-временным многообразием и локальной лоренцевской системой отсчета. Вербейн  $e_\mu^a$  обеспечивает связь между компонентами тензорного поля  $T_{\lambda\mu\nu}$  на пространственном многообразии (обозначенном с помощью греческих индексов) и соответствующими компонентами  $T_{abc\dots}$  в локальной лоренцевской системе (обозначаемой латинскими индексами). Эта связь задается в виде

$$T_{\lambda\mu\nu\dots} = e_{\lambda}^a e_{\mu}^b e_{\nu}^c \dots T_{abc\dots} . \quad (9.5)$$

В таких обозначениях  $g_{\mu\nu}$  — компоненты пространственно-временной метрики, в локальной же лоренцевской системе метрика имеет форму  $\eta_{ab}$  — метрики Минковского. Поэтому необходимое условие для вербейна:  $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab}$ . Ковариантные производные, действующие на тензорные поля с локальными индексами, содержат спиновую связность  $\omega_{\mu}^{ab}$ . Например,

$$D_{\mu} e_{\nu}^a = \partial_{\mu} e_{\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^a + \omega_{\mu b}^a e_{\nu}^b . \quad (9.6)$$

В римановом пространстве-времени, где  $D_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$ , спиновая связность не является независимым полем, она описывается вербейном и его производными. В пространстве-времени Римана-Картана спиновая связность представляет собой независимую степень свободы, ассоциированную с ненулевым кручением.

Независимость от наблюдателя СМР означает, что все члены в лагранжиане являются наблюдаемыми скалярами относительно общих координатных преобразований и локальных лоренцевских преобразований. Это значит, что каждый пространственно-временной индекс и каждый локальный лоренцевский индекс в лагранжиане должны быть свернутыми. Однако СМР не инвариантны относительно диффеоморфизмов частицы и локальных лоренцевских преобразований. Действительно, диффеоморфизм означает отображение одной точки пространства-времени на другую и характеризуется бесконечно малым преобразованием в координатном базисе:

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \xi^{\mu} . \quad (9.7)$$

Четыре бесконечно малых параметра  $\xi^{\mu}$  являются степенями свободы диффеоморфизма. С другой стороны, при бесконечно малых лоренц-преобразованиях частицы, компоненты поля преобразуются как свертка с матрицей:

$$\Lambda_b^a \simeq \delta_b^a + \varepsilon_b^a , \quad (9.8)$$

где  $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$  — бесконечно малые параметры, несущие шесть лоренцевских степеней свободы и формирующие локальную группу

Лоренца. Очевидно, в сумме имеется десять соответствующих пространственно-временных симметрий. Нарушение этих симметрий происходит тогда, когда член в лагранжиане, характеризующий взаимодействие, содержит коэффициенты, которые при преобразовании частицы остаются неизменными.

Полная теория СМР состоит из неограниченного числа наблюдаемых скалярных членов в лагранжиане, включающих свертки полей СМ, гравитационных полей и СМР-коэффициентов. Набор возможных СМР можно ограничить, воспользовавшись условиями калибровочной инвариантности и перенормируемости СМ. Такой ограниченный набор СМР называют минимальным СМР. Минимальное СМР сначала определим в пространстве-времени Минковского, а затем обобщим на геометрию Римана-Картана, включив гравитационные поля.

Минимальное СМР, построенное из операторов с размерностью не выше, чем четыре, описывает лоренцевское нарушение в лидирующем порядке. Действительно, следует ожидать, что члены в лагранжиане больших размерностей подавлены дополнительными степенями массы Планка. Эффекты связи гравитационных полей тоже ожидаются слабыми по сравнению со взаимодействиями СМ. В частности, по сравнению с электромагнитными взаимодействиями. По этой причине представляется разумным, прежде всего, осуществлять проверку лоренц-инвариантности в КЭД в плоском пространстве-времени Минковского. Тем не менее, следует иметь в виду, что некоторые типы лоренц-нарушений могут происходить и в высших порядках.

### 9.3. Гравитационный сектор

При построении гравитационного сектора СМР используется вербейновский формализм, который позволяет сформулировать теорию аналогично калибровочному сектору. лоренц-нарушение происходит из-за присутствия СМР-коэффициентов, которые не меняются при лоренц-преобразованиях частицы в локальной системе отсчета. В этом случае СМР-коэффициенты несут латинские индексы, например,  $b_a$  для вектора. Превращение в пространственно-временные координаты осуществляется следующим обра-

зом:  $b_\mu = e_\mu^a b_a$ . Лагранжиан записывается в терминах полей и СМР-коэффициентов, определенных на пространственно-временном многообразии. Естественно (хотя и не обязательно) предполагать, что СМР-коэффициенты являются плавными функциями на многообразии. Нет необходимости считать их ковариантно-постоянными. Действительно, определяя ковариантно-постоянные тензоры на многообразии, мы тем самым ограничиваем геометрию этого многообразия. Одно из упрощающих предположений, которое выглядит вполне естественно в контексте спонтанного нарушения лоренц-инвариантности, – постоянство СМР-коэффициентов в локальной системе отсчета.

Первый шаг при построении минимального СМР, включающего гравитацию – учет гравитационных полей в обычной СМ. Это можно сделать, переписав все члены в  $L_{\text{лептон}}$  и  $L_{\text{калибр}}$  в терминах полей и гамма-матриц, определенных по отношению к локальной системе отсчета. Тогда для превращения этих членов, определенных уже на пространственно-временном многообразии, можно использовать вербейн-формализм. При этом для ковариантного интегрирования плотности лагранжиана (задающего действия) следует учесть определитель вербейна. С учетом этих изменений,  $L_{\text{лептон}}$  принимает следующий вид:

$$L_{\text{лептон}} = \frac{1}{2} i e e_a^\mu \bar{L}_A \gamma^a \tilde{D}_\mu L_A + \frac{1}{2} i e e_a^\mu \bar{R}_A \gamma^a D_\mu R_A. \quad (9.9)$$

Другие слагаемые в лагранжиане, соответствующие кварковому, юкавскому, хиггсовскому и калибровочному секторам получаются аналогично. Различные лептонные вклады в лагранжиан можно разделить на  $CPT$ -четные и  $CPT$ -нечетные. Например,  $CPT$ -четный вклад:

$$L_{\text{лептон}}^{CPT\text{-чет.}} = -\frac{1}{2} i (c_L)_{\mu\nu AB} e e_a^\mu \bar{L}_A \gamma^a \tilde{D}^\nu L_B - \frac{1}{2} i (c_R)_{\mu\nu AB} e e_a^\mu \bar{R}_A \gamma^a \tilde{D}_\nu R_B. \quad (9.10)$$

Чисто гравитационный сектор минимального СМР состоит из лоренц-инвариантной и лоренц-неинвариантной части. Лоренц-инвариантный лагранжиан включает произведение гравитацион-

ных полей. В общем случае такой лагранжиан содержит кривизну, кручение и ковариантные производные. Эйнштейновская гравитация (с космологическим членом или без него) входит в этот сектор.

Лагранжиан с лоренц-нарушающими членами в гравитационном секторе в минимальном СМР строится путем объединения СМР коэффициентов с гравитационными полевыми операторами. При этом должны возникать скаляры относительно локальных лоренцевских и общих координатных преобразований. В минимальном случае (с размерностью до четырех) эти слагаемые лагранжиана имеют вид:

$$L_{e,\omega}^{LV} = e(k_T)^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + e(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \\ + e(k_{TT})^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu} T_{\alpha\beta\gamma} T_{\lambda\mu\nu} + e(k_{DT})^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa T_{\lambda\mu\nu}. \quad (9.11)$$

СМР коэффициенты в (9.11) имеют симметрии, связанные с лоренц-нарушающими операторами. Все коэффициенты, за исключением  $(k_T)^{\lambda\mu\nu}$ , имеющего размерность массы, безразмерны.

Лоренц-нарушающий сектор вносит дополнительные гравитационные связи, которые могут иметь феноменологические следствия (в космологии, в физике черных дыр, гравитационном излучении и постньютоновской физике).

#### 9.4. Спонтанное нарушение лоренцевской инвариантности

Одним из первоначальных мотивов для развития СМР было, как уже отмечалось, открытие спонтанного нарушения локальной лоренцевской симметрии в теории струн. Если полное СМР описывает не зависящее от наблюдателя лоренц-нарушение на уровне эффективной теории поля, то специальному случаю соответствует спонтанное нарушение лоренц-симметрии. При этом тензорные поля приобретают ненулевые вакуумные средние, имеющие выделенные пространственно-временные направления, нарушающие симметрию относительно сдвигов и вращений. Согласно теореме Голдстоуна, при спонтанном нарушении непрерывной глобальной симметрии возникают безмассовые нambu-голдстоуновские (NG) моды. Если же нарушается локальная симметрии, то имеет место

механизм Хиггса, и калибровочные бозоны приобретают массу. Естественно возникает вопрос: а какова судьба NG-мод при спонтанном нарушении лоренцевской симметрии? Следующий вопрос: происходит ли механизм Хиггса в случае нарушения локальной лоренцевской симметрии? Общий анализ теорий со спонтанным нарушением лоренцевской симметрии можно провести в пространстве-времени Римана-Картана, а также в предельных случаях Риманова и Минковского пространства-времени. Прежде всего, можно установить связь между спонтанным нарушением локальной лоренцевской симметрии и диффеоморфизмами. Действительно, если вербейн приобретает вакуумное среднее, которое для простоты выберем как некоторое значение в пространстве Минковского:  $e_{\mu}^a = \delta_{\mu}^a$ , и если локальный тензор имеет фиксированное вакуумное среднее  $b_a$ , нарушающее локальную лоренцевскую симметрию, то и ассоциированный пространственно-временной вектор  $b_{\mu}$ , получаемый при свертке с вербейном, тоже приобретает фиксированное вакуумное среднее. Пространственно-временное вакуумное среднее  $b_{\mu}$  нарушает диффеоморфизмы. Обратное утверждение тоже справедливо. Если нескалярное тензорное вакуумное среднее на пространственно-временном многообразии нарушает диффеоморфизм, то ассоциированный локальный тензор приобретает ненулевое вакуумное среднее, нарушающее локальную лоренцевскую симметрию. В скалярном случае производные поля будут иметь вакуумные средние, нарушающие локальную лоренцевскую симметрию.

Обратимся теперь к обсуждению NG-мод. Поскольку имеется шесть лоренцевских симметрий и четыре диффеоморфизма, которые могут быть нарушены, когда тензор с соответствующим числом индексов приобретает ненулевое вакуумное среднее, то следует ожидать появления до десяти NG-мод. Однако эти десять мод могут быть поглощены как дополнительные степени свободы вербейна. Действительно, вербейн имеет 16 компонент. При наличии лоренцевской симметрии, шесть мод можно исключить калибровкой. Обычно это антисимметричные компоненты. Аналогично, для исключения четырех дополнительных степеней свободы можно



использовать диффеоморфизм. Таким образом, в общем случае остается шесть вербейновских мод. В эйнштейновской теории четыре из этих мод становятся вспомогательными, в результате две безмассовых моды относятся к гравитону. Однако в более общей теории гравитации может быть до шести распространяющихся мод, которым в формализме вербейна соответствуют шесть вербейновских степеней свободы. Если лоренцевская симметрия и диффеоморфизмы нарушены, то утрачивается возможность исключения путем выбора калибровки некоторых вербейновских степеней свободы. В частности, т. к. до десяти симметрий может быть нарушено, то до десяти дополнительных NG-мод возникает у вербейна. На число мод влияет природа вакуумных средних и тот факт, что симметрия является пространственно-временной симметрией. Например, в случае векторного вакуумного среднего, которое нарушает три лоренцевских симметрии и один диффеоморфизм, можно ожидать появление 3-х безмассовых лоренцевских NG-мод и одной безмассовой NG-моды диффеоморфизма. Если же векторное вакуумное среднее оказывается константой, мода диффеоморфизма становится вспомогательной модой. В этом случае, поскольку NG-моды несут векторные индексы, безмассовый вектор имеет две распространяющиеся моды. Это пример того, как обычный учет NG-мод (по одной безмассовой моде на каждый нарушенный генератор) не проходит для нарушенной пространственно-временной симметрии. Судьба NG-мод зависит от геометрии. В римановом или пространстве-времени Минковского, где кручение равно нулю, NG-моды возникают как дополнительные безмассовые или вспомогательные моды вербейна. Однако в пространстве-времени Римана-Картана, имеющем ненулевое кручение и где спиновая связность имеет степени свободы, независимые от вербейна, возможно осуществление механизма Хиггса. Дело в том, что при спонтанном нарушении симметрии образуется массовый член спиновой связности. Если теория допускает распространение безмассовых мод спиновой связности, то эти моды приобретают массу. Специфическая векторная модель спонтанного нарушения лоренцевской симметрии, называемая “bumblebee” модель, иллюстрирующая поведение NG-мод, будет рассмотрена ниже.

## 9.5. Bumblebee модель

Это векторная теория, в которой векторное поле  $B^\mu$  приобретает ненулевое вакуумное среднее, спонтанно нарушающее лоренцевскую симметрию. Лагранжиан теории состоит из кинетического члена для  $B^\mu$  и потенциала, спонтанно нарушающего лоренцевскую симметрию. При этом потенциал не обладает  $U(1)$ -инвариантностью. Потенциал подразумевает вакуумное среднее  $b_a \neq 0$  для вектора в локальной системе отсчета. Вербейн связывает вакуумное среднее с пространственно-временным вектором  $B^\mu = e_\mu^a b_a$ . Для простоты будет искать пертурбативное решение на фоне пространства Минковского. Это означает, что можно пренебречь отличием между латинскими и греческими индексами и записать

$$e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \left( \frac{1}{2} h_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu} \right), \quad (9.12)$$

где десять симметричных возбуждений  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$  связаны с метрикой  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , а шесть антисимметричных компонент  $\chi_{\mu\nu} = -\chi_{\nu\mu}$  – локальные лоренцевские степени свободы. Вакуумное решение имеет вид

$$\langle B^\mu \rangle = b^\mu, \quad \langle e_{\mu\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu}. \quad (9.13)$$

Кинетические и потенциальные члены можно выбрать разными способами. В иллюстративных целях будет исследовать модель с лагранжианом:

$$L_B = \frac{1}{2k} \left( eR + \xi e B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} e B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - e\lambda \left( B_\mu B^\mu \pm b^2 \right) - e B_\mu J^\mu, \quad (9.14)$$

где  $k = 8\pi G$ ,  $\xi$  – коэффициент связи между векторным полем и кривизной. В (9.14) учтены взаимодействия с векторным током, а также связи вектора с кривизной. Кинетические слагаемые в (9.14) аналогичны кинетическим членам в Эйнштейн-Максвелловской теории. Однако, в общем случае пространства-времени Римана-

Картана, наличие кручения вносит вклад в полевые напряженности, определяемые следующим образом:

$$B_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu, \quad (9.15)$$

где  $D_\mu$  – ковариантные производные. Потенциальный член

$$V(B_\mu B^\mu \pm b^2) = \lambda(B_\mu B^\mu \pm b^2), \quad (9.16)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Он учитывает ограничение – векторное поле имеет вакуумное среднее  $b_a$ , удовлетворяющее соотношению  $b_a b^a = \mp b^2$  (знак соответствует случаям времениподобного и пространственноподобного векторов). Перепишем далее векторное поле в терминах вербейна и пертурбативно разложим в ряд:

$$B^\mu = e_a^\mu b^a \simeq b^\mu + \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu} \right) b_\nu. \quad (9.17)$$

При этом степени свободы вербейна включают NG-моды.

Эту модель можно исследовать в линеаризованном приближении. Симметричные и антисимметричные компоненты вербейна преобразуются следующим образом

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}, \quad \chi_{\mu\nu} \rightarrow \chi_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} \quad (9.18)$$

при бесконечно малых лоренцевских преобразованиях. Относительно же бесконечно малых диффеоморфизмов

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \\ \chi_{\mu\nu} &\rightarrow \chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu). \end{aligned} \quad (9.19)$$

В этих выражениях величины порядка  $(\varepsilon h)$ ,  $(\varepsilon \chi)$ ,  $(\xi h)$ ,  $(\xi \chi)$  и т. д. считаются в линеаризованном приближении малыми, и ими пренебрегается.

NG-моды находятся при рассмотрении флуктуаций возле вакуумного решения

$$\delta B^\mu = (B^\mu - b^\mu) \simeq \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu} \right) b_\nu. \quad (9.20)$$

Полезно ввести проекции на поперечные и продольные компоненты  $\delta B^\mu$ . Предполагая  $b^2 \neq 0$ , проекции имеют вид

$$(P_{\parallel})_{\nu}^{\mu} = \frac{b^{\mu}b_{\nu}}{b^{\sigma}b_{\sigma}}, \quad (P_{\perp})_{\nu}^{\mu} = \partial_{\nu}^{\mu} - (P_{\parallel})_{\nu}^{\mu}. \quad (9.21)$$

Определяя проекции флуктуаций

$$\varepsilon^{\mu} = (P_{\perp})_{\nu}^{\mu} \delta B^{\nu}, \quad \rho^{\mu} = (P_{\parallel})_{\nu}^{\mu} \delta B^{\nu} \approx b^{\mu} \rho, \quad (9.22)$$

$$\text{где} \quad \rho = -\frac{b^{\mu}h_{\mu\nu}b^{\nu}}{2b^{\sigma}b_{\sigma}}, \quad (9.23)$$

перепишем поле  $B^{\mu}$  в виде

$$B^{\mu} \simeq (1 + \rho)b^{\mu} + \varepsilon^{\mu}. \quad (9.24)$$

В терминах этих проекций определяются NG лоренцевские и диффеоморфные моды. При бесконечно малых локальных лоренцевских преобразованиях возбуждаются только те компоненты  $\varepsilon^{\mu}$ , которые удовлетворяют условию  $b_{\mu}\varepsilon^{\mu} = 0$ . Если же осуществляется бесконечно малый диффеоморфизм, то возбуждается только продольная компонента  $\rho$ . Таким образом, ее можно отождествлять с NG-модой диффеоморфизма. Заметим, что флуктуации метрики относительно вакуумного решения

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} \quad (9.25)$$

тоже является диффеоморфизмом. Динамика NG мод зависит от фоновой геометрии. Рассмотрим случаи пространства Минковского, Римана и Картана-Римана.

### 9.5.1. Пространство Минковского

В этом пространстве кривизна и кручение равны нулю, а метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (9.26)$$

Лагранжиан модели сводится к выражению

$$L_B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \lambda(B_{\mu}B^{\mu} \pm b^2) - B_{\mu}J^{\mu}. \quad (9.27)$$

В этом случае мода  $\rho$  диффеоморфизма в величине  $B_{\mu\nu}$  сокращается. Она становится вспомогательной модой и не распростра-

няется. Лоренцевские моды содержатся в проекции  $\varepsilon_\mu$ . Переобозначая  $\varepsilon_\mu \equiv A_\mu$  и определяя полевые напряженности  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , перепишем лагранжиан в виде

$$L_B \rightarrow L_{NG} \simeq -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu - b_\mu J^\mu + b^\mu \partial_\nu \Xi_\mu J^\nu, \quad (9.28)$$

где  $\Xi_\mu$  – продольная диффеоморфная мода  $\xi_\mu$ , соответствующая NG-полно. Она определяется соотношением  $\rho = \partial_\mu \Xi_\mu$ . При этом варьирование по вспомогательной моде приводит к сохранению тока  $\partial_\mu J^\mu = 0$ .

Лагранжиан (9.28) – эффективный квадратичный лагранжиан, описывающий распространение NG мод в пространстве Минковского. Поле  $A^\mu$  имеет три степени свободы и автоматически удовлетворяет условию аксиальной калибровки  $b_\mu A^\mu = 0$ . Оно содержит три лоренцевских NG моды. В зависимости от вакуумного среднего  $b_\mu$ , возможны частные случаи временной ( $A^0 = 0$ ) и чисто аксиальной калибровки. В пространстве Минковского NG моды напоминают безмассовый фотон в  $U(1)$  калибровочной теории (в аксиальной калибровке). Однако, в отличие от калибровочной теории, где безмассовость фотона есть следствие ненарушенности калибровочной симметрии, в рассматриваемом случае безмассовость фотона связана со спонтанным нарушением лоренцевской симметрии. Имеет ли этот эффект экспериментальные проявления? Очевидно, что в этом случае есть одно дополнительное взаимодействие, которого нет у фотона в калибровочной теории. Это лоренц-нарушающий член  $b_\mu J^\mu$ , где  $J^\mu$  – заряженный ток. Этот член можно идентифицировать с СМР-членом с коэффициентом  $a_\mu^e$ , входящим в КЭД-предел СМР. Оказывается, этот тип СМР-коэффициентов, если они постоянные, является в электронном секторе ненаблюдаемым. Однако этот член способен генерировать сигнал в кварковом и нейтринном секторах. Поэтому идею о том, что фотон возникает при спонтанном нарушении лоренцев-

ской симметрии, можно попытаться проверить в пространстве Минковского.

### 9.5.2. Риманово пространство

В римановой геометрии в формализме вербейна спиновая связность  $\omega_\mu^{ab}$  возникает в ковариантных производных. Однако метрическое требование

$$D_\mu e_\mu^a = 0 \quad (9.29)$$

и тот факт, что кручение обращается в ноль, позволяет определить спиновую связность в терминах вербейна:

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{ab} = & \frac{1}{2} e^{\nu a} (\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) - \frac{1}{2} e^{\nu b} (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) - \\ & - \frac{1}{2} e^{\alpha a} e^{\beta b} e_\mu^c (\partial_\alpha e_{\beta c} - \partial_\beta e_{\alpha c}). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Спиновая связность не имеет независимых степеней свободы в римановом пространстве, а NG моды содержатся в вербейне. В этом случае до шести (из 16-ти компонент вербейна) представляют собой динамические степени свободы, ассоциированные с гравитационными полями. Обратимся снова к выражениям (9.13) и (9.14), определяющим вакуум и лагранжиан bumblebee модели. Разложение проекционного оператора  $B_\mu$  показывает, что имеется четыре потенциальных NG-моды, содержащиеся в  $\epsilon^\mu$  и  $\rho$ , при этом условие аксиальной калибровки  $b_\mu \epsilon^\mu = 0$  справедливо и в римановом пространстве. Полевую напряженность запишем в виде

$$B_{\mu\nu} = (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) b_a. \quad (9.31)$$

Это соотношение предполагает, что распространение вербейна модифицируется bumblebee-кинетическим членом.

Эффективный лагранжиан NG-моды можно найти путем разложения лагранжиана (9.14) до второго порядка, оставляя при этом связи с токами и кривизной:

$$L_{NG} \simeq \frac{1}{2k} [eR + \xi e b^\mu b^\nu R_{\mu\nu} + \xi e A^\mu A^\nu R_{\mu\nu} + \xi e \rho (\rho + 2) b^\mu b^\nu R_{\mu\nu} + \\ + 2\xi e (\rho + 1) b^\mu A^\nu R_{\mu\nu}] - \frac{1}{4} e F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e A_\mu J^\mu - e b_\mu J^\mu + e b^\mu \partial_\nu \Xi_\mu J^\nu, \quad (9.32)$$

где снова лоренцевские моды обозначены как  $A_\mu = \varepsilon_\mu$ , причем  $b_\mu A^\mu = 0$  и полевые напряженности  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , а гравитационные возбуждения  $h_{\mu\nu}$  удовлетворяют условию  $h_{\mu\nu} b^\mu = 0$ . Из формы (9.32) эффективного лагранжиана следует, что только две из четырех потенциальных NG-мод распространяются. Это поперечные лоренцевские NG-моды. Продольная лоренцевская и диффеоморфная NG-моды оказываются вспомогательными (нераспространяющимися). В частности, члены с кривизной не индуцируют кинетических членов для  $\rho$ . Дело в том, что в линейном приближении флуктуации метрики в форме диффеоморфного возбуждения дают нулевой вклад в тензор кривизны.

В римановом пространстве NG лоренцевские моды снова напоминают фотон в аксиальной калибровке. Можно ли в этом случае проверить, что фотон обязан своим происхождением спонтанному нарушению симметрии? Следует обратить внимание на необычную связь кривизны с  $A^\mu$ ,  $\rho$  и  $b^\mu$ . Связь с кривизной  $e A^\mu A^\nu R_{\mu\nu}$ , подавленная калибровочной инвариантностью в электродинамике Эйнштейна-Максвелла, возникает в теории с лоренц-нарушением. Член  $\xi e b^\mu b^\nu R_{\mu\nu} / 2k$  соответствует СМР-коэффициенту типа  $S^{\mu\nu}$  в гравитационном секторе СМР. Оставшиеся слагаемые также представляют собой лоренц-нарушающие члены, входящие в СМР. Любое из этих возможных экспериментальных проявлений позволило бы проверить идею о том, что фотон – NG-мода, возникающая при спонтанном нарушении лоренц-симметрии.

### 9.5.3. Пространство Картана-Римана (КР)

В пространстве КР вербейн  $e_\mu^a$  и спиновая связность  $\omega_\mu^{ab}$  являются независимыми степенями свободы. В результате, эффекты

спонтанного нарушения лоренц-симметрии кардинально отличаются от случаев пространств Минковского и Римана. В частности, при кручении, отличном от нуля, возможен механизм Хиггса. Это мы увидим ниже на примере bumblebee модели в КР пространстве. Сразу возникает вопрос: если в теории гравитации происходит механизм Хиггса, то гравитон приобретает массу? Очевидно, что даже очень малая масса гравитона модифицирует предсказания общей теории относительности, приводя к разногласию с экспериментом. Однако обычный механизм Хиггса не приводит к массе гравитона, поскольку члены, генерирующие массу, содержат производные от метрики.

Общий вид лагранжиана, содержащего спонтанное нарушение лоренцевской симметрии в КР пространстве:

$$L = L_0 + L_{SSB} . \quad (9.33)$$

Часть  $L_0$  содержит только гравитационные члены, включающие кривизну и кручение и описывает ненарушенную теорию.  $L_{SSB}$  вызывает спонтанное нарушение лоренц-симметрии. Для осуществления механизма Хиггса в присутствии спиновой связности,  $L_0$  должен описывать распространяющиеся моды спиновой связности до спонтанного нарушения лоренцевской симметрии. Кроме того, теория должна быть свободной от духовых состояний. Оказывается, что эти условия сильно ограничивают число возможных теорий. Обратимся снова к наиболее простой модели, удовлетворяющей указанным ограничениям, – bumblebee модели. В этой модели

$$L_{SSB} = -\frac{1}{4} e B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - e\lambda (B_\mu B^\mu \pm b^2) . \quad (9.34)$$

В КР пространстве полевая напряженность  $B_{\mu\nu}$  определяется соотношением (9.15). В терминах вербейна и спиновой связности

$$B_{\mu\nu} = (e_\mu^b \omega_{\nu b}^a - e_\nu^b \omega_{\mu b}^a) b_a . \quad (9.35)$$

Заметим, что выражение (9.35) сводится к (9.31) в пределах пространств Римана и Минковского, где спиновая связность имеет вид (9.30). Если взять квадрат  $B_{\mu\nu}$ , то в лагранжиане возникает квадратичное слагаемое по  $\omega_{\mu b}^a$ , причем



$$-\frac{1}{4}eB_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{4}(\omega_{\mu\rho\nu} - \omega_{\nu\rho\mu})(\omega^{\mu\sigma\nu} - \omega^{\nu\sigma\mu})b^\rho b_\sigma. \quad (9.36)$$

Наличие квадратичных членов предполагает возможность осуществления механизма Хиггса, происходящего путем поглощения NG-мод спиновой связностью. Подчеркнем, что это возможно только в КР пространстве с ненулевым кручением, т. к. в противном случае (римановом пространстве) спиновая связность не имеет независимых степеней свободы.

## 9.6. Нарушение СРТ подразумевает нарушение лоренц-инвариантности

Квантовая теория поля лоренц-ковариантна на световом конусе, если вакуумные матричные элементы от неупорядоченного произведения полей (функции Вайтмана) ковариантны (см. главу 1). «На конусе» означает, что импульсы, сопряженные к соответствующим разностям пространственно-временных переменных, являются физическими, т.е. принадлежат переднему световому конусу в импульсном пространстве. Будем далее предполагать наличие на конусе лоренц-ковариантности (пуанкаре-ковариантности). Квантовая теория поля ковариантна вне светового конуса, если вакуумные матричные элементы упорядоченных по времени произведений полей ( $\tau$ -функции) ковариантны. Чтобы определить  $S$  матрицу, нужно знать  $\tau$ -функции, запаздывающие или опережающие произведения ( $r$  функции или  $a$  функции). Будем подразумевать ковариантность квантовой теории поля, как на световом конусе, так и вне его. Это условие лоренц-инвариантности теории.

Таким образом, в теории с лоренц-инвариантностью как функции Вайтмана, так и  $r$  ( $r$  или  $a$ ) функции должны быть ковариантными.

Иост доказал фундаментальную теорему (глава 1): слабая локальная коммутативность в точках Иоста является необходимым и достаточным условием  $CPT$ -симметрии. Точки Иоста – это такие пространственно-временные точки, в которых все выпуклые комбинации соответствующих разностей координат, – пространственноподобны. Иначе говоря, если вайтмановские функции

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle, \quad (9.37)$$

то точки Иоста – упорядоченный набор  $\{x_i\}$ , для которого все суммы  $\sum_i C_i(x_i - x_{i+1})$ ,  $C_i \geq 0$ ,  $\sum_i C_i > 0$  – пространственноподобны. Слабая локальная коммутативность означает, что

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = W^{(n)}(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1). \quad (9.38)$$

Очевидно, что локальная коммутативность подразумевает слабую локальную коммутативность.

Как мы увидим, нарушение *CPT*-инвариантности в любой функции Вайтмана подразумевает нековариантность связанной  $\tau$  ( $r$  или  $a$ ) функции, т.е. нарушение в теории лоренц-инвариантности. Это будет показано на примере скалярной теории, хотя приведенные аргументы применимы для полей с любым спином.

Если *CPT* нарушена для любой  $\tau$  функции, т.е. для этой функции нарушена слабая локальная коммутативность, то соответствующая  $\tau$  функция не обладает лоренц-ковариантностью, и теория лоренц-неинвариантна. Обобщенная  $\tau$  функция в терминах функций Вайтмана задаются соотношением

$$\begin{aligned} \tau^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_p \theta(x_{p_1}^0, x_{p_2}^0, \dots, x_{p_n}^0) \times \\ \times W^{(n)}(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}), \end{aligned} \quad (9.39)$$

где  $\theta$  означает  $x_{p_1}^0 \geq x_{p_2}^0 \geq \dots \geq x_{p_n}^0$ .

Чтобы  $\tau$ -функция была лоренц-ковариантной, лоренц-преобразование, обращающее временной порядок точек, но оставляющее вайтмановскую функцию неизменной, должно не менять  $\tau$ -функцию.

Рассмотрим случай, когда частица и античастица имеют различные массы. Для простоты считаем поле заряженным скалярным полем. Обобщение на спинные поля очевидно. Для операторов рождения и уничтожения используем ковариантную нормировку. Для бозе-коммутирующих соотношений состояния частиц и античастиц

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 2E(\vec{p})\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (9.40)$$

$$[b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] = 2E(\vec{p})\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (9.41)$$

$$E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \bar{E}(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + \bar{m}^2}.$$

Для  $m^2 \neq \bar{m}^2$  эти коммутационные соотношения нарушают  $C$  и  $CPT$ -симметрию, но не обязательно  $P$  и  $T$ -симметрию.

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} E(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + \int \frac{d^3 p}{2\bar{E}(\vec{p})} \bar{E}(\vec{p}) b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}). \quad (9.42)$$

Обычные коммутационные соотношения для алгебры Ли группы Пуанкаре

$$[p^\mu, p^\nu] = 0, \quad [M^{\mu\nu}, p^\lambda] = i(\eta^{\nu\lambda} p^\mu - \eta^{\mu\lambda} p^\nu), \quad (9.43)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} - \eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha}), \quad (9.44)$$

удовлетворяются заменами

$$P^\mu \rightarrow p^\mu, \quad M^{\mu\nu} \rightarrow i \left( p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right). \quad (9.45)$$

Переход к полевым операторам приводит к эрмитовости генераторов алгебры Ли

$$P^\mu = \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} a^\dagger(\vec{p}) p^\mu a(\vec{p}) + \int \frac{d^3 p}{2\bar{E}(\vec{p})} b^\dagger(\vec{p}) p^\mu b(\vec{p}), \quad (9.46)$$

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} = & \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} a^\dagger(\vec{p}) i \left( p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right) a(\vec{p}) + \\ & + \int \frac{d^3 p}{2\bar{E}(\vec{p})} b^\dagger(\vec{p}) i \left( \bar{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\nu} - \bar{p}^\nu \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\mu} \right) b(\vec{p}). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Таким образом, свободные поля несут представления алгебры Пуанкаре. В частности, гамильтониан,  $H = p^0$  генерирует временные трансляции. Как будет показано ниже, проблема с лоренцевской инвариантностью возникает вне светового конуса и проявляется только при наличии взаимодействий. Используя генераторы трансляций, построим пространственно-временную зависимость полей

$$e^{iPx} a(\vec{p}) e^{-iPx} = e^{-ipx} a(\vec{p}). \quad (9.48)$$

Таким образом, поля в  $x$ -пространстве

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} a(\vec{p}) e^{-ipx} + \int \frac{d^3 p}{2\bar{E}(\vec{p})} b^\dagger(\vec{p}) e^{i\bar{p}x}, \quad (9.49)$$

$$\varphi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2\bar{E}(\vec{p})} b(\vec{p}) e^{-i\bar{p}x} + \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}, \quad (9.50)$$

где  $p^0 = E(\vec{p})$  для членов с  $a$  и  $a^\dagger$  и  $\bar{p}^0 = \bar{E}(\vec{p})$  для членов с  $b$  и  $b^\dagger$ .

В этом случае имеются только одни вакуумные матричные элементы – двухточечные функции, обладающие свойством ковариантности (для скаляров – свойством инвариантности)

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle = \Delta^{(+)}(x-y, m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} e^{-ipx}, \quad (9.51)$$

$$\langle 0 | \varphi^\dagger(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \Delta^+(x-y, \bar{m}^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\bar{E}(\vec{p})} e^{-i\bar{p}x}. \quad (9.52)$$

Назовем поле локальным в смысле (9.39), определенном ниже, если коммутатор полей обращается в ноль при пространственноподобном  $(x-y)^2 < 0$ :

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] = 0. \quad (9.53)$$

Чтобы это было справедливым для вакуумного матричного элемента,  $[\Delta^{(+)}(r, m^2) - \Delta^+(-r, \bar{m}^2)]r^\mu = x^\mu - y^\mu$  должно обращаться в ноль для  $r^2 < 0$ . Асимптотический предел для  $\sqrt{-r^2} \rightarrow \infty$  равен

$$\langle 0 | [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] | 0 \rangle \rightarrow (-r^2)^{-3/4} \left( e^{-m\sqrt{-r^2}} - e^{-\bar{m}\sqrt{-r^2}} \right). \quad (9.54)$$

Последнее условие требует, чтобы  $m^2 = \bar{m}^2$ . При пуанкаре-преобразованиях двухточечная  $\tau$ -функция, являющаяся фейнмановским пропагатором

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\varphi(x)\varphi^\dagger(y))|0\rangle = \\ = \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\varphi^\dagger(y)\varphi(x)|0\rangle, \end{aligned} \quad (9.55)$$

изменяется следующим образом

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\varphi(\Lambda^{-1}(x-a))\varphi^\dagger(\Lambda^{-1}(y-a)))|0\rangle = \theta(\Lambda^{-1}(x-y)^0) \times \\ \times \langle 0|\varphi(x)\varphi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(\Lambda^{-1}(y-x)^0)\langle 0|\varphi^\dagger(y)\varphi(x)|0\rangle. \end{aligned} \quad (9.56)$$

В выражении (9.56) мы воспользовались лоренц-инвариантными свойствами  $\Delta^{(\dagger)}(x-y, m^2)$  и  $\Delta^{(\dagger)}(y-x, \bar{m}^2)$ . Если  $(x-y)$  – пространственно-подобна, лоренцевское преобразование способно перевести вектор с  $x^0 > y^0$  в вектор с  $y^0 > x^0$ . При этом пропагатор меняется с  $\Delta^\dagger(x-y, m^2)$  на  $\Delta^\dagger(y-x, \bar{m}^2)$ . Таким образом, пропагатор не ковариантен до тех пор, пока вакуумный матричный элемент коммутатора  $\Delta^{(\dagger)}(x-y, m^2) - \Delta^{(\dagger)}(y-x, \bar{m}^2)$  не обращается в ноль при пространственноподобной разности  $(x-y)$ . А это происходит лишь в случае, если  $m^2 = \bar{m}^2$ .

Вычисление  $\tau$  функции в импульсном пространстве приводит к выражению

$$\left[ 2i(E(\vec{p}) - p^0 - i\varepsilon)E(\vec{p}) \right]^{-1} + \left[ 2i(\bar{E}(\vec{p}) + p^0 - i\varepsilon)\bar{E}(\vec{p}) \right]^{-1}. \quad (9.57)$$

Для  $m^2 = \bar{m}^2$  это выражение приводится к инвариантной форме  $i/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$ , как и должно быть.

Чтобы продемонстрировать эффект неинвариантности этого пропагатора относительно разных наблюдателей, предположим, что пропагатор связывает скалярный  $s$ -канальный процесс  $k_1 + k_2 \rightarrow k'_1 + k'_2$ ,  $k_1^2 = k_1'^2 = m_1^2$ ,  $k_2^2 = k_2'^2 = m_2^2$ .

Если бы пропагатор был лоренц-инвариантным, то наблюдатель, который обнаружил полный импульс, равный нулю (например, в системе центра масс) получил бы тот же результат, как и наблюдатель, для которого импульс одной из частиц равен нулю (на-

зовем эту систему лабораторной). В системе центра масс  $\vec{p} \equiv 0$ ,  $s = \left( \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} \right)^2$ ,  $E(\vec{p}) = m$ ,  $\bar{E}(\vec{p}) = \bar{m}$ . Тогда пропагатор

$$(\text{пропаг.})|_{cm} = \frac{m^2 + \bar{m}^2 + (\bar{m} - m)\sqrt{s}}{2im\bar{m}(m - \sqrt{s})(\bar{m} + \sqrt{s})}. \quad (9.58)$$

В лабораторной системе  $\vec{p} = \vec{k}_1$ ,  $s = m_1^2 + m_1^2 + 2m_2\sqrt{\vec{k}_1^2 + m_1^2}$ ,  $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_1^2}$ ,  $\bar{E}(\vec{p}) = m_2$ . Пропагатор задается соотношением (9.57), причем

$$E(\vec{p}) = \frac{1}{2m_2} \sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_1^2 - m_2^2)^2 + 4m_2^2 m}. \quad (9.59)$$

Аналогично определяется  $\bar{E}(\vec{p})$ , но  $m$  заменяется на  $\bar{m}$  и  $p^0 = (s + m_2^2 - m_1^2)/2m_2$ . В пределе  $s \rightarrow \infty$

$$(\text{пропаг.})|_{ст} \rightarrow i \frac{(\bar{m} - m)}{2m\bar{m}\sqrt{s}}, \quad (9.60)$$

$$(\text{пропаг.})|_{лаб} \rightarrow \frac{i}{s}. \quad (9.61)$$

Таким образом, в пределе больших  $s$  амплитуды в двух различных системах отсчета качественно отличаются. Если  $m = \bar{m}$ , то оба пропагатора ведут себя  $\sim \frac{i}{s}$  при больших  $s$ . Для резонансной амплитуды, когда  $s \approx m^2$  или  $s \approx \bar{m}^2$ , неинвариантность пропагатора приводит к неинвариантности сечения рассеяния. Обсудим теперь вопрос о нелокальности, когда массы частицы и античастицы отличаются.

Нелокальные квантовые теории поля интенсивно обсуждались в 50-х годах прошлого века как возможный способ исключения ультрафиолетовых расходимостей. При этом нелокальность всегда содержалась в слагаемых лагранжиана, описывающих взаимодействия. К сожалению нелокальные теории оказались неспособными разрешить проблему расходимостей. Свойство локальности в квантовой теории поля имеет три различных значения:

а) поля, входящие в лагранжиан, рассматриваются в одной пространственно-временной точке;

б) наблюдаемые коммутируют на пространственноподобных  $(x - y)$ ;

в) при пространственноподобных разностях  $(x - y)$  поля коммутируют (при целых спинах) или антикоммутируют (для полуцелых спинов).

Теории, в которых нарушается (а), могут удовлетворять (б) и (в). Пример – квантовая электродинамика в кулоновской калибровке. Теории, в которых (в) нарушается, могут удовлетворять (а) и (б). Как было показано выше, теории, в которых *CPT* нарушается за счет различия в массах частиц и античастиц, нелокальны в смысле (б). Покажем, что они нелокальны в смысле (а). Опять для простоты выберем заряженное скалярное поле, хотя результат обобщается на высшие спины. Вычислим свободный гамильтониан для этих полей двумя способами. Сначала вычислим гамильтониан в предположении о том, что он содержит только производные первого порядка, а затем найдем гамильтониан, в который входят высшие производные.

Если в гамильтониан входят лишь первые производные, то

$$a(\vec{p}) = \frac{4E_p \bar{E}_p}{(E_p + \bar{E}_p)^2} \left[ \varphi_p + \frac{E_p - \bar{E}_p}{2\bar{E}_p} \varphi_{(-\bar{E}_p, \vec{p})} e^{i(E_p + \bar{E}_p)x^0} \right], \quad (9.62)$$

$$b(\vec{p}) = \frac{-4E_p \bar{E}_p}{(E_p + \bar{E}_p)^2} \left[ \varphi_{(-E_p, \vec{p})} - \frac{E_p - \bar{E}_p}{2\bar{E}_p} \varphi_p e^{-i(E_p + \bar{E}_p)x^0} \right]. \quad (9.63)$$

В выражениях (9.62, 9.63) использовано определение

$$\varphi_p = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{ipx} \tilde{\partial}_{x_0} \phi(x) \quad (9.64)$$

Точная нелокальная форма гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} \int d^3p \left[ a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}) \right], \quad (9.65)$$

выраженная в терминах  $\phi(x)$ , согласно (9.62)–(9.64), оказывается нелокальной в пространстве, усложненной и мало информативной.

Допущение же высших производных, наоборот, ведет к простой форме гамильтониана с  $\Delta^{(\dagger)}$  как ядром, задающим нелокальность. В результате получаем

$$H = \frac{2i}{(2\pi)^3(m^2 - \bar{m}^2)^2} \left\{ \int d^3x d^3x' \frac{\partial \Delta^{(\dagger)}(x - x', m^2)}{\partial(x^0 - x'^0)} \frac{\ddot{\partial}}{\partial x_0} \frac{\ddot{\partial}}{\partial x'^0} \times \right. \\ \times (\partial_x \partial^x + \bar{m}^2)(\partial_{x'} \partial^{x'} + \bar{m}^2) \phi^\dagger(x) \phi(x') + \int d^3x d^3x' \frac{\partial \Delta^{(\dagger)}(x - x', \bar{m}^2)}{\partial(x^0 - x'^0)} \times \quad (9.66) \\ \left. \times \frac{\ddot{\partial}}{\partial x_0} \frac{\ddot{\partial}}{\partial x'^0} (\partial_x \partial^x + m^2)(\partial_{x'} \partial^{x'} + m^2) \phi(x) \phi^\dagger(x') \right\}.$$

Очевидная сингулярность выражения (9.66) из-за фактора  $(m^2 - \bar{m}^2)^{-2}$  исключается операторами Клейна-Гордона и скалярными произведениями в этом выражении.

Таким образом, *CPT*-инвариантность является необходимым условием лоренц-инвариантности во взаимодействующей квантовой теории поля. *CPT*-нарушение может происходить независимо в различных функциях Вайтмана. Кроме того, выше было показано, что если выбрать разными массы частиц и античастиц, то теория должна быть нелокальной в терминах полей в  $x$ -пространстве, ассоциированных с этими частицами. В этом случае пропагатор оказывается нековариантным. Более того, отсутствие ковариантности ведет к различному поведению пропагатора при больших  $\mathbf{s}$  в разных системах отсчета.

## 9.7. СРТ нарушение в расширениях стандартной модели

### 9.7.1. Введение

Будучи феноменологически успешной, стандартная модель содержит ряд вопросов, ответов на которые до сих пор нет. В настоящее время большое число теоретических исследований направлено на поиск основополагающей теории, содержащей кванто-



вое описание гравитации. Однако экспериментальные проверки такого типа идей сильно затруднены из-за подавленности предсказываемых эффектов массой Планка. Подобная «слабость» эффектов квантовой гравитации требует чрезвычайно внимательного подхода к выбору экспериментов. Пожалуй, можно выделить три критерия выбора физических законов, допускающие экспериментальную проверку. Прежде всего, следует рассматривать физические законы, которые «точно» выполняются. Тогда любые измеренные отклонения от этих законов свидетельствовали бы о качественно новой физике. Во-вторых, достоверность наблюдения таких эффектов возрастает при исследовании законов, которые могли бы быть нарушенными в заслуживающих доверия кандидатах на фундаментальную теорию. В-третьих, эти законы должны допускать ультра-прецизионную проверку.

Один из примеров физических законов, удовлетворяющих этим критериям – *CPT*-инвариантность. Этот закон требует, чтобы физика оставалась неизменной при действии на состояние частицы (системы частиц) операторами зарядового сопряжения (*C*), пространственной инверсии (*P*) и обращения времени (*T*). *C*-преобразование связывает частицы и античастицы, *P*-преобразование соответствует отражению пространственных осей, а преобразование *T* обращает физический процесс во времени.

Стандартная модель физики частиц *CPT*-инвариантна, можно сказать, «по построению», поэтому удовлетворяет первому из перечисленных выше критериев. Что касается второго критерия, следует заметить, что различные модели «фундаментальной физики» приводят к *CPT* нарушению. Среди этих моделей нужно упомянуть струны, пространственно-временную пену, модели с нетривиальной пространственно-временной топологией. Критерий номер три также выполнен. Действительно, как указано в Particle Data Group, *CPT* сохранение в системе каонов выполняется с точностью  $\sim 10^{-18}$ .

Поскольку *CPT* преобразование связывает частицу с античастицей, можно было бы ожидать, что *CPT*-инвариантность подразумевает симметрию между материей и антиматерией. Для проверки *CPT*-инвариантности нужно доказать, что массы заряды, ширины, гиромагнитные отношения и другие внутренние свойства частиц и античастиц одинаковы. Это доказательство можно распространить

на системы частиц и их динамику. Например, атомы и антиатомы должны иметь идентичные спектры, а реакции с участием частиц и их *CPT* сопряженных частиц должны иметь одинаковые сечения.

Таким образом, экспериментальное сравнение свойств материи и антиматерии могло бы служить проверкой *CPT*-инвариантности.

### 9.7.2. Механизмы нарушения пространственно-временных симметрий

Как уже отмечалось выше, пространственно-временные преобразования делятся на два класса: непрерывные и дискретные. Непрерывные преобразования включают трансляции, вращения и сдвиги. Примеры дискретных преобразований – *C*, *P*, *T*.

Предположим, что относительно одного или нескольких преобразований симметрия нарушена. Естественно возникает вопрос: сохраняются ли оставшиеся преобразования симметрии? Или же нарушение одной или нескольких симметрий связано с нарушением других симметрий?

Предположим, что нарушена трансляционная симметрия (один из возможных механизмов этого нарушения будет рассмотрен ниже). Тогда генератор трансляций – тензор энергии-импульса сохраняться не будет. Влияет ли это нарушение на лоренц-симметрию? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем генератор лоренцевских преобразований, задаваемый тензором углового момента:

$$J^{\mu\nu} = \int d^3x (\theta^{0\mu} x^\nu - \theta^{0\nu} x^\mu). \quad (9.67)$$

Заметим, что в это определение входит не сохраняющийся тензор энергии-импульса  $\theta^{\mu\nu}$ . Из определения (9.67) следует, что  $J^{\mu\nu}$  содержит нетривиальную зависимость от времени, поэтому обычные, зависящие от времени, генераторы лоренц-преобразований не существуют. Как результат, лоренц-симметрия не подразумевается. Нарушение трансляционной симметрии приводит к нарушению лоренц-инвариантности. Обратимся к *CPT*-инвариантности. Знаменитая *CPT* теорема (Белл, Людерс, Паули) утверждает, что *CPT*-симметрия возникает в квантовой теории поля, обладающей лоренц-инвариантностью, при весьма необременительных предположениях. Если *CPT*-симметрия нарушена, то одно или несколько

предположений, необходимых для доказательства *CPT* теоремы, оказываются нарушенными. Поскольку как *CPT*, так и лоренц-инвариантность включают пространственно-временные преобразования, то естественно предположить, что *CPT* нарушение связано с нарушением лоренцевской симметрии. Это утверждение недавно было подтверждено «анти-*CPT* теоремой» (Гринберг): «в любой унитарной, локальной, релятивистской теории, содержащей точечные частицы, нарушение *CPT* подразумевает нарушение лоренц-симметрии».

Важно отметить, что обратное утверждение: нарушение лоренц-симметрии подразумевает *CPT* нарушение, вообще говоря, неверно. В любом случае, однако, проверка *CPT* означает проверку лоренц-инвариантности.

Как мы видели выше, нарушение определенной пространственно-временной симметрии может повлечь за собой нарушение другой пространственно-временной симметрии. В этом разделе будут обсуждаться механизмы нарушения пространственно-временной симметрии. Среди этих механизмов – спонтанное нарушение *CPT* и лоренц-симметрии, а также *CPT* и лоренц-нарушения за счет изменяющихся скаляров.

### 9.7.3. Спонтанное *CPT* и лоренц-нарушение

Механизм спонтанного нарушения симметрии хорошо известен в различных областях физики, например, в физике конденсированного состояния или в физике элементарных частиц. С теоретической точки зрения, этот механизм весьма привлекателен, поскольку нарушение инвариантности происходит за счет нетривиального основного состояния. При этом основополагающая динамика, основанная на гамильтониане, остается инвариантной относительно преобразований определенной симметрии. Чтобы понять явление спонтанного нарушения *CPT* и лоренц-симметрии, рассмотрим три поучительных примера. Эти три примера представлены на рис. 9.1.

Случай (а) соответствует классической электродинамике. С любой конфигурацией электромагнитного поля связана плотность энергии

$$V(\vec{E}, \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (9.68)$$

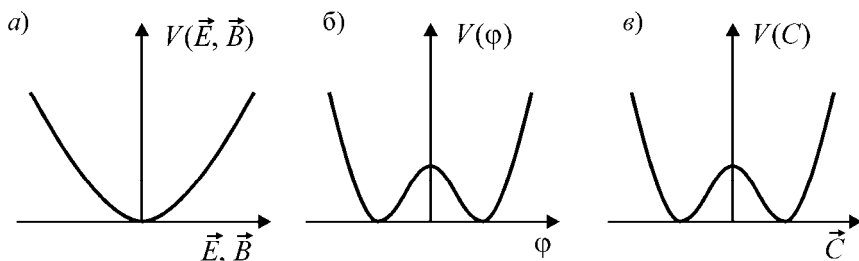


Рис. 9.1

В этом выражении подразумеваются «естественные» единицы измерения, а  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  обозначают напряженности электрических и магнитных полей. Соотношение (9.68) определяет энергию любого решения уравнений Максвелла. Заметим, что если либо электрическое, либо магнитное поле, либо оба поля обращаются в ноль в некоторой области пространства-времени, то энергия, содержащаяся в этих полях, будет строго положительной. Эта энергия может быть равной нулю лишь в случае, когда повсюду  $\vec{E} \equiv 0$ ,  $\vec{B} \equiv 0$ . Основное состояние системы (вакуум) определяется как состояние с наименьшей энергией. В электромагнетизме конфигурации с наименьшей энергией соответствуют  $\vec{E} \equiv 0$ ,  $\vec{B} \equiv 0$ , т.е. максвелловский вакуум пуст (если пренебречь лоренц- и  $CPT$ -симметричными квантовыми флуктуациями).

Пример (б) относится к хиггсовскому полю, входящему в состав стандартной модели физики частиц. В отличие от электромагнитного поля, хиггсовское поле – скаляр. Плотность энергии хиггсовского скаляра задается потенциалом

$$V(\phi) = (\phi^2 - \lambda^2)^2, \quad (9.69)$$

где  $\lambda$  – постоянная. Как и в случае электродинамики, обсуждавшейся выше, наименьшая плотность энергии равна нулю. Однако для такой конфигурации поле  $\phi$  имеет ненулевые вакуумные средние (VEV)  $\phi = \pm\lambda$ . Потому вакуум уже не пустой, он содержит по-

стоянное скалярное поле  $\phi_{\text{бак}} = \langle \phi \rangle = \pm \lambda$ . За счет подобных VEV в стандартной модели многие частицы приобретают массы. Отметим, что  $\langle \phi \rangle$  – скаляр и не содержит выделенного направления в пространстве-времени. В этом случае  $CPT$  и лоренц-инвариантность не нарушены. Нарушенными оказываются внутренние симметрии.

Обратимся теперь к случаю (в) векторного поля  $\vec{c}$  (допускающего релятивистское обобщение). Подобного рода полей нет в стандартной модели, но они возникают в моделях «фундаментальной» физики. По аналогии с хиггсовским случаем, запишем плотность энергии для постоянного  $\vec{c}$ :

$$V(\vec{c}) = (\vec{c}^2 - \lambda^2)^2. \quad (9.70)$$

Как и в предыдущих двух примерах, наименьшая энергия полевой конфигурации равна нулю, но при этом необходимо ненулевое значение  $\vec{c}$ . Следует потребовать, чтобы  $\vec{c}_{\text{бак}} = \langle \vec{c} \rangle = \vec{\lambda}$ , где  $\vec{\lambda}$  – произвольный постоянный вектор, удовлетворяющий условию  $\vec{\lambda}^2 = \lambda^2$ . Вакуум содержит VEV векторного поля. Поскольку мы должны рассматривать только постоянные решения  $\vec{c}$ ,  $\langle \vec{c} \rangle$  будет независимым от пространственно-временной точки  $x$ . Действительно,  $x$ -зависимость могла бы привести в (9.70) к положительно определенным производным, повышающим плотность энергии. Истинный вакуум в этой модели содержит выделенное «внутреннее» направление, определяемое  $\langle \vec{c} \rangle$ , нарушающее вращательную инвариантность и, следовательно, лоренц-симметрию.

Заметим, что взаимодействия, приводящие к энергетической плотности типа (9.70), в перенормируемых калибровочных теориях отсутствуют, но существуют, например, в струнных моделях.

#### 9.7.4. Скаляры, зависящие от пространственно-временных координат

Эти скаляры, независимо от конкретного механизма, вызывающего эти изменения, подразумевают нарушение пространственно-временной трансляционной инвариантности. Как обсуждалось вы-

ше, трансляции и лоренц-преобразования связаны с группой Пуанкаре, поэтому нарушение трансляционной инвариантности обычно приводит к нарушению лоренц-инвариантности.

Попытаемся пояснить это утверждение. Рассмотрим систему с переменной константой  $\zeta(x)$  и двумя скалярными полями  $\phi$  и  $\Phi$ . Лагранжиан такой системы будет содержать член  $\zeta(x)\partial^\mu\phi\partial_\mu\Phi$ . Можно проинтегрировать по частям действие этой системы (например, по отношению к первой частной производной), не изменяя при этом уравнений движения. При этом эквивалентный лагранжиан

$$L' \supset -k^\mu\phi\partial_\mu\Phi, \quad (9.71)$$

где  $k^\mu \equiv \partial^\mu\zeta$  – внешний нединамический 4-вектор, характеризующий выделенное направление в пространстве-времени, нарушающий лоренц-симметрию.

Подчеркнем, что для изменений  $\zeta$  на космологических масштабах (например, масштабах Солнечной системы),  $k^\mu$  с хорошей точностью постоянен.

Нарушение лоренц-симметрии в присутствии изменяющихся скаляров, можно представить следующим образом. В некоторых пространственно-временных областях 4-градиент скалярного поля должен быть отличен от нуля. Этот градиент имеет предпочтительное направление в этих областях. Пусть некоторая частица взаимодействует со скаляром. Тогда эта частица будет по-разному распространяться в направлениях, параллельных и перпендикулярных к градиенту. Физически же неэквивалентность направлений означает нарушение вращательной инвариантности. Поскольку вращения входят в группу Лоренца, лоренцевская симметрия в этом случае оказывается нарушенной.

Минимальная  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  стандартная модель, будучи феноменологически весьма успешной, оставляет множество неразрешенных проблем. Можно надеяться, что она является низкоэнергетическим пределом более фундаментальной теории, включающей квантовое описание гравитации. Естественный масштаб более фундаментальной теории – масса Планка  $M_{Pl}$ , которая на 17 порядков больше электрослабого масштаба. Это означает, что наблю-

даемые сигналы фундаментальной теории будут подавлены степенями отношения  $r \approx \frac{m_W}{M_{Pl}} \approx 10^{-17}$ . Детектирование таких слабых

эффектов требует экспериментов с исключительной чувствительностью. Для идентификации эффектов такой величины нужно попытаться выбрать явления, качественно отличные от явлений стандартной модели. В настоящее время в качестве кандидата на фундаментальную теорию рассматривается струнная ( $M$ ) теория. Эта теория предсказывает новую физику на планковских масштабах. Было бы интересно исследовать, какие низкоэнергетические предсказания имеет эта теория?

Рассмотрим, к чему может привести предположение о нарушении лоренц-инвариантности в фундаментальной теории. Известно, что спонтанное нарушение лоренц-инвариантности происходит в струнных теориях с лоренц-ковариантной динамикой. В отличие от стандартной модели, струнные теории включают взаимодействия, которые способны дестабилизировать наивный вакуум и вызывать ненулевые средние лоренцевских тензоров. Заметим, что подобное спонтанное нарушение многомерной лоренц-симметрии ожидается в любой лоренц-ковариантной фундаментальной теории в пространстве с числом измерений, большим четырех. Если нарушение имеет место в четырех пространственно-временных измерениях, то нарушение лоренц-инвариантности должно проявляться в стандартной модели. Это могло бы быть проявлением фундаментальной теории, возникающим вне рамок перенормируемых калибровочных моделей.

Следует подчеркнуть, что лоренц-симметрия остается свойством основополагающей фундаментальной теории, поскольку нарушение симметрии – спонтанное. Это означает, что различные притягательные черты обычных теорий (например, микропричинность, положительность энергии), как ожидается, имеют место в низкоэнергетической эффективной теории. Кроме того, сохраняется энергия и импульс, а это означает, что тензор энергии-импульса фундаментальной теории не зависит от пространственно-временной точки. При этом стандартные методы квантования остаются неизменными, т.е. в соответствующих пределах возникают релятивистское уравнение Дирака и нерелятивистское уравнение

Шредингера. Другой важный аспект спонтанного нарушения состоит в том, что как фундаментальная теория, так и эффективная низкоэнергетическая теория, остаются инвариантными относительно лоренц-преобразований наблюдателя, т.е. вращений и сдвигов инерциальной системы отсчета наблюдателя. Присутствие ненулевых значений тензора изменяет только свойства инвариантности относительно лоренц-преобразований частицы, т.е. относительно вращений импульсов локализованной частицы или поля.

### 9.7.5. Эффективная модель спонтанного $CPT$ нарушения

Начнем обсуждение с простой модели нарушения  $CPT$ -инвариантности. Эта модель содержит в 4-х измерениях одно массивное дираковское поле  $\psi(x)$ , и плотность лагранжиана имеет вид:

$$L = L_0 - L', \quad (9.72)$$

где  $L_0$  — обычный свободный дираковский лагранжиан фермиона  $\psi$  массы  $m$ , а  $L'$  включает дополнительные  $CPT$  нарушающие слагаемые, которые будут описаны ниже. Нас будут интересовать возможные формы, которые возникают как «эффективные» вклады при спонтанном нарушении  $CPT$  в более общей теории.

По-видимому, в настоящее время только струнные теории составляют единственный класс (калибровочных) теорий в 4-х и более измерениях, который квантово самосогласован, обладает пуанкаре-инвариантностью и содержит механизм спонтанного нарушения  $CPT$  инвариантности.

Для того, чтобы рассмотрение было максимально общим, предположим, однако, что спонтанное нарушение  $CPT$  связано с ненулевыми значениями, приобретаемыми одним и более лоренцевскими тензорами  $T$ , т.е. будем считать  $L'$  эффективным четырехмерным лагранжианом, полученным в фундаментальной теории, содержащей пуанкаре-инвариантные взаимодействия  $\psi$  с  $T$ . Как будет видно, дальнейшее обсуждение не зависит от конкретной формы строгой теории, поэтому применимо к любым неструнным теориям со спонтанным  $CPT$  нарушением.



Даже с учетом строгого требования динамической пуанкаре-инвариантности, ненарушенная «реалистическая» теория включает члены с производными, степенями тензорных полей и квадратами фермионных полей. Однако любой  $CPT$  нарушающий член, являющийся частью 4-мерной эффективной теории, должен иметь размерность (масса)<sup>4</sup>. В эффективном лагранжиане любая комбинация полей и производных с размерностью, больше четырех, должна содержать весовой фактор с отрицательной степенью  $(-k)$ , по крайней мере, одного массового масштаба  $M \gg m$  – масштаба эффективной теории. В реалистической теории со струнным сценарием  $M \simeq M_{Pl}$ . Поскольку средние  $\langle T \rangle$  тензоров  $T$ , как предполагается, нарушают Лоренц и  $CPT$  симметрию, то любой член, «выживающий» в  $L'$  после спонтанного нарушения симметрии, должен быть подавленным степенями  $\frac{m}{M}$ .

Таким образом, возникает иерархия возможных слагаемых в  $L'$ , соответствующих  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Опуская для простоты лоренцевские индексы, лидирующие члены с  $k \leq 2$  должны иметь следующую форму

$$L' \supset \frac{\lambda}{M^k} \langle T \rangle \bar{\psi} \Gamma (i\partial)^k \psi + \text{э.с.} \quad (9.73)$$

В этом выражении  $\lambda$  – безразмерная константа связи,  $(i\partial)^k$  –  $k$  четырехмерных производных, действующих в некоторой комбинации на фермионные поля,  $\Gamma$  – некоторая структура из гамма-матриц. Члены с  $k \geq 3$  и с более чем квадратичными фермионными факторами тоже возникают, но оказываются подавленными. Заметим, что вклады вида (9.73) характерны для струнных теорий. Наивный учет степеней указывает на то, что доминирующие члены с  $k \leq 1$  – перенормируемые.

Для  $k = 0$  лидирующие члены (9.73) должны иметь вид  $\langle T \rangle \sim \frac{m^2}{M}$ . Ниже будет проанализирован именно этот относительно простой случай. Следует отметить, что основные особенности, связанные с нарушением  $CPT$  и лоренц-инвариантности сохраняются и при рассмотрении других значений  $k$ .

Каждый вклад в  $L'$  за счет членов (9.73) является фермионной билинейной комбинацией, включающей  $4 \times 4$  матрицы  $\Gamma$ . Независимо от числа тензоров  $T$ , индуцирующих нарушение,  $\Gamma$  можно представить как линейную комбинацию 16-ти базисных элементов алгебры гамма-матриц. Нас же интересует лишь часть этих комбинаций, приводящая к  $CPT$  нарушению.

Для случая  $k = 0$  существуют два типа нарушающих членов:

$$L'_a \equiv a_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad L'_b \equiv b_\mu \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma^\mu \Psi. \quad (9.74)$$

Из соображений полноты приведем также соответствующие члены для случая  $k=1$ .

$$\begin{aligned} L'_c &\equiv \frac{1}{2} i c^\alpha \bar{\Psi} \tilde{\partial}_\alpha \Psi, \quad L'_d \equiv \frac{1}{2} d^\alpha \bar{\Psi} \gamma_5 \tilde{\partial}_\alpha \Psi, \\ L'_e &\equiv \frac{1}{2} i e^\alpha_{\mu\nu} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\alpha \Psi, \end{aligned} \quad (9.75)$$

где операция  $A \tilde{\partial}_\mu B \equiv A \partial_\mu B - (\partial_\mu A) B$ . Во всех выражениях (9.74) величины  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c^\alpha$ ,  $d^\alpha$ ,  $e^\alpha_{\mu\nu}$ , должны быть вещественными, и это есть следствие спонтанного нарушения симметрии и эрмитовости теории. Эти величины являются комбинациями констант связи, ожидаемых значений тензоров, массовых параметров и коэффициентов, возникающих при разложении  $\Gamma$ . Основываясь на интерпретации этих величин как эффективных констант связи, в сценарии спонтанного нарушения симметрии  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c^\alpha$ ,  $d^\alpha$  и  $e^\alpha_{\mu\nu}$  являются инвариантными относительно  $CPT$  преобразований. Как уже отмечалось, в последующем изложении ограничимся выражениями (9.74).

Допуская наличие обоих вкладов (9.74) в  $L'$ , приходим к модельному лагранжиану вида

$$L = \frac{1}{2} i \bar{\Psi} \gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu \Psi - a_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - b_\mu \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma^\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (9.76)$$

Варьируя этот лагранжиан, получаем модифицированное уравнение Дирака:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - m) \Psi = 0. \quad (9.77)$$

С уравнением дираковского типа связано модифицированное уравнение Клейна-Гордона. Осуществляя обычную процедуру, в которой оператор уравнения Дирака с противоположным знаком массы действует на уравнение Дирака слева, получаем уравнение типа Клейна-Гордона

$$\left[ (i\partial - a)^2 - b^2 - m^2 + 2i\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} b_\mu (i\partial_\nu - a_\nu) \right] \psi(x) = 0. \quad (9.78)$$

Это уравнение содержит производную второго порядка, но, в отличие от обычного уравнения Клейна-Гордона, включает недиагональные члены в спинорном пространстве. Они могут быть исключены путем применения к (9.78) оператора с противоположным знаком для недиагональной части. Это дает уравнение четвертого порядка, которому удовлетворяет каждая компонента спинора любого решения модифицированного уравнения Дирака:

$$\left\{ \left[ (i\partial - a)^2 - b^2 - m^2 \right]^2 + 4b^2 (i\partial - a)^2 - 4 \left[ b^\mu (i\partial_\mu - a_\mu) \right]^2 \right\} \psi(x) = 0. \quad (9.79)$$

Обсудим непрерывные симметрии модели с лагранжианом (9.76). Для определенности, начнем с анализа в ориентированной инерциальной системе отсчета, в которой определены величины  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . Эффекты вращений и сдвигов будут рассмотрены позже.

*CPT*-нарушающие члены в выражении (9.76) не изменяют обычной глобальной  $U(1)$  инвариантности, т.е. ток  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  сохраняется. Следовательно, в этой модели сохраняется заряд. Кроме того, эти члены не влияют на нарушение кирального  $U(1)$ -тока  $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$ . Обозначим объемные интегралы от плотностей токов  $j^\mu$  и  $j_5^\mu$  через  $J^\mu$  и  $J_5^\mu$ .

Рассматриваемая модель инвариантна относительно трансляций, если средние значения тензора считать постоянными. Это приводит к сохранению канонического тензора энергии-импульса

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\partial}^\nu \psi, \quad \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0, \quad (9.80)$$

и, соответственно, к сохранению 4-х импульса  $p^\mu$ . Выражения (9.80) имеют ту же форму, как и в свободной теории. Отметим, однако, что сохранение энергии и импульса не обязательно подразу-

мекает обычное поведение относительно сдвигов или вращений. Присутствие *CPT* нарушающих членов в уравнении Дирака нарушает симметричные свойства  $\theta^{\mu\nu}$ . Антисимметричная часть  $\theta^{[\mu\nu]}$

$$\theta^{[\mu\nu]} \equiv \theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} = -\frac{1}{4}\partial_\alpha [\bar{\psi}\{\gamma^\alpha, \sigma^{\mu\nu}\}\psi] - a^{[\mu\nu]} - b^{[\mu\nu]}, \quad (9.81)$$

уже не является полной производной. Обычная конструкция симметричного тензора энергии-импульса, включающая вычитание из канонического тензора энергии-импульса антисимметричной части нарушала бы сохранение энергии-импульса, и поэтому в данном случае неприменима.

Рассмотрим теперь влияние вращений и сдвигов. Обычные лоренц-преобразования специальной теории относительности связывают наблюдаемые в двух инерциальных системах отсчета частицы, имеющие различные ориентации и скорости. Эти преобразования можно рассматривать как изменение координат, поэтому их называют «наблюдательными» лоренц-преобразованиями. Можно, однако, рассматривать преобразования, связывающие свойства двух частиц, отличающихся в определенной ориентированной инерциальной системе ориентацией спина или импульса. Такие преобразования называются лоренц-преобразованиями частиц. Для свободных частиц эти два типа преобразований являются обратными преобразованиями. Однако эта эквивалентность нарушается для частиц, движущихся в фоновом поле. Отличие между «наблюдаемыми» преобразованиями и преобразованиями частицы представляется весьма существенным, поскольку *CPT*-нарушающие члены можно считать возникающими за счет постоянных фоновых полей  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . Однако эти восемь величин преобразуются как два четырех-вектора относительно лоренцевских преобразований наблюдателя и как восемь скаляров относительно лоренцевских преобразований частицы, причем они связаны с токами, которые преобразуются относительно обоих типов преобразований как четырех-векторы. Это означает, что лоренц-симметрия наблюдателя остается симметрией модели, в то время как, лоренцевская группа частиц оказывается нарушенной.

Физическую ситуацию понять нетрудно. Например, электрон с импульсом, перпендикулярным однородному фоновому магнитно-

му полю, движется по окружности. Предположим, что в той же системе отсчета наблюдателя мы увеличиваем величину импульса электрона без изменения его направления. При этом электрон движется по окружности увеличивающегося радиуса. Этот сдвиг частицы оставляет фоновое поле неизменным. Однако, если рассмотреть сдвиг наблюдателя перпендикулярно магнитному полю, то электрон уже не будет двигаться по окружности. Это видно в новой инерциальной системе, относительно которой  $\vec{E} \times \vec{B}$  дрейф вызван присутствием электрического поля. В этом примере фоновое магнитное поле преобразуется при сдвигах наблюдателя в электромагнитном поле, но (по определению) остается неизменным при сдвигах частиц. Это выглядит вполне аналогичным преобразованию  $a_\mu$  и  $b_\mu$  в *CPT*-нарушающей модели.

В этом примере, необычный аспект *CPT*-нарушающей модели состоит в том, что постоянные поля  $a_\mu$  и  $b_\mu$  являются глобальными свойствами этой модели. Их нельзя считать возникающими из локализованных экспериментальных условий, которые могли бы приводить к инвариантным преобразованиям 4-х векторов, а не скаляров. Поведение  $a_\mu$  и  $b_\mu$  как фоновых полей есть следствие ненулевых значений лоренцевских тензоров «фундаментальной» теории. Эти ненулевые значения лоренцевских тензоров нарушают те части лоренцевской группы частицы, которые не являются унитарными преобразованиями вакуума.

Сохранение лоренцевской симметрии наблюдателя – важная особенность рассматриваемой модели. Это следствие лоренцевской инвариантности наблюдателя в основополагающей фундаментальной теории. Эта симметрия не изменяется при появлении ненулевых значений лоренцевских тензоров благодаря применению соответствующих координатных преобразований. В качестве иллюстрации использования этой симметрии в эффективной модели покажем, что она позволяет провести дальнейшую классификацию типов *CPT*-нарушающих членов в соответствии с лоренцевскими свойствами  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . Так, например, если  $b_\mu$  – времениподобен в одной инерциальной системе, то он должен быть времениподобным и во всех других системах отсчета. Это означает, что можно

найти класс инерциальных систем отсчета, в котором  $b_\mu = b(1, 0, 0, 0)$ , и вычисления в значительной степени упрощаются. Этот же аргумент, примененный к светоподобным или пространственно-подобным случаям, показывает, что *CPT*-нарушающая физика четырех компонент  $b_\mu$  в каждом случае сводится к знанию их лоренцевского типа и единственного числа, определяющего его величину.

Следует заметить, что класс инерциальных систем, выбранный таким образом, может отличаться от экспериментально значимых систем отсчета, например, определенных с помощью микроволнового фонового излучения. В заданной инерциальной системе отсчета при спонтанном нарушении лоренц-инвариантности возникают определенные  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . Ток  $J^{\lambda\mu\nu}$  для лоренцевских преобразований частиц, будучи выраженным в терминах тензора энергии-импульса, имеет вид

$$J^{\lambda\mu\nu} = x^{[\mu}\theta^{\nu]\lambda} + \frac{1}{4}\bar{\Psi}\{\gamma^\lambda, \sigma^{\mu\nu}\}\Psi. \quad (9.82)$$

Этот ток сохраняется на уровне основополагающей теории со спонтанным нарушением симметрии. В эффективной же низкоэнергетической теории, где спонтанное нарушение проявляется в явной форме, свойство сохранения нарушается. В последнем случае соответствующие лоренцевские заряды  $M^{\mu\nu}$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{dM^{\mu\nu}}{dt} = -a^{[\mu}J^{\nu]} - b^{[\mu}J_5^{\nu]}. \quad (9.83)$$

Для заданных в некоторой инерциальной системе отсчета значений  $a_\mu$  и  $b_\mu$  соотношение (9.83) можно использовать для определения нарушенных лоренцевских симметрий. Отметим, что если либо  $a_\mu$ , либо  $b_\mu$  зануляется, то лоренцевская группа нарушена до малой группы ненулевого 4-х вектора. Это означает, что наибольшая подгруппа группы Лоренца, оставляющая инвариантным лагранжиан (9.76) – это  $SO(3)$ ,  $E(2)$  (см. главу 1) или  $SO(2,1)$ . Поскольку  $a_\mu$  и  $b_\mu$  представляют собой два 4-вектора в 4-мерном

пространстве-времени, они определяют двумерную плоскость. Преобразования, включающие два ортогональных измерения, не влияют на эту плоскость. Это значит, что наименьшей подгруппой лоренцевской симметрии может быть компактная или некомпактная  $U(1)$ .

В реалистической низкоэнергетической эффективной теории  $CPT$ -нарушающие члены могли бы нарушать лоренц-группу частиц согласно соотношению (9.83). Поскольку экспериментально не наблюдаются эффекты нулевого порядка  $CPT$ -нарушения, то  $CPT$ -нарушающие эффекты в струнном сценарии подавлены по крайней мере, как  $\frac{m}{M_{Pl}}$ , где  $m$  – массовый масштаб эффективной теории.

При обсуждении выше было использовано «практическое» определение  $CPT$  и лоренцевских преобразований. Оно включает трактовку  $C$ ,  $P$ ,  $T$  и лоренцевских свойств  $\psi$  в свободной теории, описываемой лагранжианом  $L_0$  и последующим установлением симметричных свойств лагранжиана  $L'$ . Этот подход требует осторожности, поскольку существуют альтернативные определения преобразований симметрии, оставляющие полный лагранжиан теории  $L$  инвариантным. Рассмотрим сначала  $CPT$  и лоренц-нарушающую модель, содержащую только  $a_\mu$  и описываемую в заданной инерциальной системе отсчета лагранжианом

$$L[\psi] = L_0[\psi] - L'_a[\psi]. \quad (9.84)$$

Если ввести в этой системе отсчета новое поле, связанное с  $\psi$ -фазой, зависящей от пространственно-временной точки

$$\chi = \exp(iax)\psi, \quad (9.85)$$

то лагранжиан в терминах нового поля запишется в виде

$$L[\psi] = \exp(-iax)\chi \equiv L_0[\chi]. \quad (9.86)$$

Эта модель эквивалентна обычной свободной дираковской теории, в которой отсутствуют  $CPT$  или Лоренцевские нарушения. Связь между генераторами Пуанкаре в двух формах теории можно установить, если подставить  $\psi = \psi[\chi]$  в Пуанкаре генераторы для  $L[\psi]$  и извлечь комбинации, необходимые для воспроизведения Пуанка-

ре генераторов  $L_0[\chi]$ . На этом пути обнаруживаем, что зарядовые и киральные токи  $j^\mu$  и  $j_5^\mu$  в обеих теориях имеют одинаковую функциональную форму, однако изменяется канонический тензор энергии-импульса

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} i \bar{\chi} \gamma^\mu \tilde{\partial}^\nu \chi + a^\nu \bar{\chi} \gamma^\mu \chi. \quad (9.87)$$

При этом, соответственно, изменяется лоренцевский ток  $J^{\lambda\mu\nu}$ . Это означает, что в первоначальной теории с лагранжианом  $L[\psi]$  мы могли ввести сохраняющиеся модифицированные Пуанкаре токи  $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$  и  $\tilde{J}^{\lambda\mu\nu}$ , генерируемые ненарушенной алгеброй Пуанкаре. Эти токи задаются функционалами от  $\psi$ :

$$\tilde{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} - a^\nu j^\mu, \quad \tilde{J}^{\lambda\mu\nu} = J^{\lambda\mu\nu} - x^{[\mu} a^{\nu]} j^\lambda. \quad (9.88)$$

Существование этой связи между двумя теориями определяется наличием сохраняющегося тока  $j^\mu$ . В модели (9.76) с  $a_\mu$  и  $b_\mu$  членами компонента  $L_a$  может быть исключена, как и раньше, переопределением поля. Однако подобного преобразования, исключаяющего  $L'_b$  – нет, поскольку сохранение кирального тока  $j_5^\mu$  нарушено массой. В безмассовом пределе этой модели киральный ток сохраняется, и мы можем исключить как  $a_\mu$ , так и  $b_\mu$  путем переопределения поля

$$\chi = \exp(iax - ibx\gamma_5)\psi. \quad (9.89)$$

В случае же  $m \neq 0$ , это переопределение вносило бы пространственно-временную зависимость в массовый параметр.

Член  $L'_a$  в выражении (9.74) «напоминает» о локальной  $U(1)$  связи, хотя теория (9.76) и не обладает локальной  $U(1)$  симметрией. Для последующего обсуждения стандартной модели очень важно, как переопределение полей влияет на  $U(1)$  калибровочную инвариантность первоначальной теории. Заметим, что член  $L'_a$  имеет ту же форму, что и связь с постоянным фоновым электромагнитным потенциалом.



Таким образом, в калибровочной теории  $CPT$ -нарушающий член  $L'_a$  можно интерпретировать как слагаемое, связанное с выбором фоновой калибровки. Его можно исключить переопределением поля. Отметим также, что модель (9.76) содержит одно фермионное поле. Все  $CPT$ -нарушающие эффекты в теории с несколькими фермионными полями исключаются, если каждый из фермионов имеет в лагранжиане член, подобный  $L'_a$ . Например, это возможно, если отсутствует фермионное смешивание и каждый  $CPT$ -нарушающий член включает одинаковые  $a_\mu$ . Однако в многофермионных теориях с  $CPT$  нарушением, содержащих фермионные билинейные члены,  $CPT$ -нарушающие эффекты переопределением полей исключить нельзя. Тем не менее, поскольку члены лагранжиана, спонтанно нарушающие  $CPT$ , с необходимостью включают «спаренные» фермионные поля, по крайней мере, одну из величин  $a_\mu$  можно исключить. Это означает, что наблюдаемыми оказываются разности между  $a_\mu$ . Примеры будут приведены ниже.

Обсудим теперь некоторые особенности релятивистской квантовой механики, основанной на лагранжиане (9.76), в котором  $\psi$  рассматривается как 4-х компонентная волновая функция. Полученные результаты оказываются важными с точки зрения понимания  $CPT$ -нарушающих членов в квантовой теории поля. Аналогичная трактовка в стандартной модели включает несколько фермионных полей, для которых  $CPT$ -нарушающие члены типа  $L'_a$  не могут быть исключены. Поэтому в последующий анализ мы явным образом включим величину  $a_\mu$ , хотя ее в однофермионном случае можно исключить путем переопределения поля.

Модифицированное уравнение Дирака (9.90) в приближении плоских волн имеет следующее решение

$$\psi(x) = e^{-i\lambda_\mu x^\mu} \omega(\vec{\lambda}). \quad (9.90)$$

В этом выражении  $\omega(\vec{\lambda})$  – 4-компонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$(\lambda_\mu \gamma^\mu - a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - m) \omega(\vec{\lambda}) = 0. \quad (9.91)$$

Чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (9.91), детерминант матрицы, действующий на  $\omega(\vec{\lambda})$ , должен обращаться в ноль. Это означает, что  $\lambda^\mu \equiv (\lambda^0, \lambda')$ , где  $\lambda^0 = \lambda^0(\vec{\lambda})$  должна удовлетворять соотношению

$$\left[ (\lambda - a)^2 - b^2 - m^2 \right]^2 + 4b^2 (\lambda - a)^2 - 4[b_\mu (\lambda_\mu - a_\mu)] = 0. \quad (9.92)$$

Это условие можно получить непосредственно из уравнения (9.79), если учесть предположение (9.90).

Дисперсионное соотношение (9.92) – уравнение 4-го порядка для  $\lambda^0(\vec{\lambda})$ . Можно свести (9.92) к кубическому уравнению и решить его, однако алгебраические решения этого уравнения не просто анализировать. Тем не менее, некоторые особенности решений можно анализировать и не зная аналитического выражения. Одна из таких особенностей – все четыре корня должны быть, вследствие эрмитовости квантовомеханического гамильтониана, вещественными

$$H\psi \equiv i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{\nabla} + a_\mu \gamma^0 \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^0 \gamma^\mu + m\gamma^0) \psi. \quad (9.93)$$

Другая особенность следует из инвариантности относительно замены  $(\lambda_\mu - a_\mu) \rightarrow -(\lambda_\mu - a_\mu)$ . В этом случае каждое решение  $\lambda_+^0(\vec{\lambda})$  соответствует другому решению  $\lambda_-^0(\vec{\lambda})$ , задаваемому соотношением

$$\lambda_-^0(\vec{\lambda}) = -\lambda_+^0(-\vec{\lambda} + 2\vec{a}) + 2a^0. \quad (9.94)$$

Это уравнение и инвариантность относительно замены  $b_\mu \rightarrow -b_\mu$  приводят к отличию собственных состояний четырех корней, что является прямым следствием наличия *CPT*-нарушающий членов.

Другой важной чертой рассматриваемой модели является наличие при некоторых значениях корней  $\lambda^0(\vec{\lambda})$  особенностей дисперсионного соотношения. Для обычного дисперсионного соотношения энергия – плавная функция каждой трехимпульсной компоненты как для времениподобного, так и пространственноподобного 4-х

импульса. Для светоподобного же случая в начале координат имеется особенность. Исследуя разрывы производных от корней по отношению к компонентам  $\vec{\lambda}$ , можно обнаружить, что разрывы возникают, если  $m^2 > 0$ , а  $b_\mu$  – времениподобный.

Наличие скачков не имеет наблюдаемых следствий, поскольку их величина определяется величиной  $b_\mu$ , подавленной в любой реалистической ситуации. Предположении о том, что *CPT*-нарушающие величины малы по отношению к масштабу  $m$  низкоэнергетической теории означает, что дисперсионное соотношение (9.92) имеет два положительных  $\lambda_{+(\alpha)}^0(\vec{\lambda})$  и два отрицательных корня  $\lambda_{-(\alpha)}^0(\vec{\lambda})$  ( $\alpha=1,2$ ). Поскольку эти корни являются собственными значениями оператора пространственно-временной трансляции, соответствующие волновые функции описывают состояния с положительной и отрицательной энергиями.

В релятивистской квантовой механике состояния с отрицательной энергией заполняют дираковское море. Когда состояние с отрицательной энергией переходит в состояние с положительной энергией, на его месте возникает «дырка» – частица с противоположной энергией, импульсом, спином и зарядом. В рассматриваемой модели, однако, когда состояние с отрицательной энергией распространяется в *CPT*-нарушающем фоне с параметрами  $a_\mu$  и  $b_\mu$  и переходами в состояние с положительной энергией, возникает дырка с противоположными значениями энергии, импульса, спина, заряда. Но при этом дырка движется в *CPT*-нарушающем фоне, с параметрами  $(-a_\mu)$  и  $b_\mu$ . Дело в том, что член  $L'_a$  – нечетный относительно зарядового сопряжения. Этот же эффект проявляется при построении зарядово-сопряженного уравнения Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - m)\psi^c = 0, \quad (9.95)$$

где, как обычно,  $\psi^c = C\bar{\psi}^T$  и  $C$ -зарядово-сопряженная матрица.

Собственные функции, соответствующие двум отрицательным собственным значениям  $\lambda_{-(\alpha)}^0(\vec{\lambda})$ , можно интерпретировать как

волновые функции с положительной энергией, но с противоположными по знаку импульсами.

Введем спиноры  $u^{(\alpha)}(\vec{p})$ ,  $v^{(\alpha)}(\vec{p})$  в импульсном пространстве

$$\begin{aligned}\psi^{(\alpha)}(x) &= \exp(-ip_u^{(\alpha)}x)u^{(\alpha)}(\vec{p}), \\ \psi^{(\alpha)}(x) &= \exp(+ip_v^{(\alpha)}x)v^{(\alpha)}(\vec{p}),\end{aligned}\quad (9.96)$$

где 4-х импульсы

$$\begin{aligned}p_u^{(\alpha)} &\equiv (E_u^{(\alpha)}, \vec{p}), & E_u^{(\alpha)}(\vec{p}) &= \lambda_{+(\alpha)}^0(\vec{p}); \\ p_v^{(\alpha)} &\equiv (E_v^{(\alpha)}, \vec{p}), & E_v^{(\alpha)}(\vec{p}) &= -\lambda_{-(\alpha)}^0(\vec{p}).\end{aligned}\quad (9.97)$$

Соотношение между спинорами  $u$  и  $v$  определяется зарядово-сопряженной матрицей и зарядово-сопряженным уравнением Дирака (9.95). Например,  $u^{(2)}(\vec{p}, a_\mu, b_\mu) \sim v^{(1)c}(\vec{p}, -a_\mu, b_\mu)$ , где зависимость от  $a_\mu$  и  $b_\mu$  представлена в явной форме. Симметрия дисперсионного соотношения (9.94) связывает два набора энергий

$$E_v^{(2,1)}(\vec{p}) = E_u^{(1,2)}(\vec{p} + 2\vec{a}) - 2a^0. \quad (9.98)$$

Подчеркнем, что четыре спинора  $u^{(\alpha)}(\vec{p})$ ,  $v^{(\alpha)}(\vec{p})$  – ортогональны. Их нормировку можно выбрать произвольно, например, ограничение  $(\psi^c)^c = \psi$  весьма полезно для этих целей. Обычные условия ортонормируемости дают

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)\dagger}(\vec{p})u^{(\alpha')}(\vec{p}) &= \frac{\delta^{\alpha\alpha'}E_u^{(\alpha)}}{m}, & u^{(\alpha)\dagger}(\vec{p})v^{(\alpha')}(-\vec{p}) &= 0; \\ v^{(\alpha)\dagger}(\vec{p})v^{(\alpha')}(\vec{p}) &= \frac{\delta^{\alpha\alpha'}E_v^{(\alpha)}}{m}, & v^{(\alpha)\dagger}(-\vec{p})u^{(\alpha')}(\vec{p}) &= 0.\end{aligned}\quad (9.99)$$

Отметим, что лоренцевское нарушение не допускает простое обобщение соотношений, включающих дираковские сопряженные спиноры  $\bar{u}^{(\alpha)}(\vec{p})$  и  $\bar{v}^{(\alpha)}(\vec{p})$ , на эрмитово-сопряженные спиноры  $u^{(\alpha)\dagger}(\vec{p})$  и  $v^{(\alpha)\dagger}(\vec{p})$ .

Соотношения (9.99) приводят к условию полноты

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[ \frac{m}{E_u^{(\alpha)}(\vec{p})} u^{(\alpha)}(\vec{p}) \otimes u^{(\alpha)+}(\vec{p}) + \frac{m}{E_v^{(\alpha)}(-\vec{p})} v^{(\alpha)}(-\vec{p}) \otimes v^{(\alpha)+}(-\vec{p}) \right] = I. \quad (9.100)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha')}(\vec{p}') \gamma^\mu u^{(\alpha)}(\vec{p}) &= \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha')}(\vec{p}') \times \\ &\times \left[ p_u'^{(\alpha')\mu} + p_u^{(\alpha)\mu} - 2a^\mu + \right. \\ &\left. + i\sigma^{\mu\nu} \left( p_{uv}'^{(\alpha')} - p_{uv}^{(\alpha)} - 2\gamma_5 b_\nu \right) \right] u^{(\alpha)}(\vec{p}). \end{aligned} \quad (9.101)$$

Общее решение модифицированного уравнения Дирака (9.77) имеет вид

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \frac{m}{E_u^{(\alpha)}} b_{(\alpha)}(\vec{p}) e^{-ip_u^{(\alpha)} x} u^{(\alpha)}(\vec{p}) + \frac{m}{E_v^{(\alpha)}} d_{(\alpha)}^*(\vec{p}) e^{ip_v^{(\alpha)} x} v^{(\alpha)}(\vec{p}) \right], \quad (9.102)$$

где  $b_{(\alpha)}(\vec{p})$ ,  $d_{(\alpha)}^*(\vec{p})$  – комплексные веса.

Отметим, что 4-х импульсы являются собственными значениями операторов трансляции, следовательно, сохраняются. Они представляют собой каноническую энергию и импульс, а не кинетическую энергию и импульс. Отличие между канонической и кинетической энергией существует во многих физических системах, например, при движении заряженной частицы в электромагнитном поле. В рассматриваемом нами случае канонический 4-х импульс не связан со скоростью так, как обычный 4-х импульс в специальной теории относительности. Искомое соотношение можно получить, используя оператор скорости  $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} = i[H, \vec{x}] = \gamma^0 \vec{\gamma}$ , где  $H$  – гамильтониан (9.93).

Даже в обычной дираковской квантовой механике введение скорости включает тонкости, связанные с присутствием решений с отрицательной энергией. Например, оператор скорости не коммутирует с обычным дираковским гамильтонианом. В обсуждаемой

нами  $CPT$ -нарушающей модели возникают дополнительные сложности. Действительно, из свойств корней дисперсионного соотношения (9.92) следует, что для времениподобного  $b_\mu$  скорость вблизи начала координат не соответствует сохранению импульса. В общем случае, оператор скорости в энергетическом базисе имеет дополнительные недиагональные компоненты даже в секторе положительных энергий.

Другой подход к определению скорости – вычислить производную по импульсу от энергии. Для случая  $\vec{b} \equiv 0$  это определение приводит к результату, обсуждаемому выше, причем без знания точной волновой функции. Этот подход дает возможность исследования всех вопросов, связанных со скоростью. Например, требование причинности модели ограничивает групповую скорость скоростью света. Если условие причинности удовлетворяется, то

$$|v^j| \equiv \left| \frac{\partial E}{\partial p_j} \right| < 1 \quad (9.103)$$

выполнено для каждого  $j = 1, 2, 3$ .

Наше рассмотрение релятивистской квантовой механики одного фермиона в присутствии  $CPT$ -нарушающих членов можно распространить на взаимодействия с другими полями. При этом используется стандартный метод функций Грина. Действительно, можно ввести обобщенный фейнмановский пропагатор, удовлетворяющий соотношению

$$(i\gamma^\mu a_\mu - a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - m) \times S_F(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (9.104)$$

и обычным фейнмановским граничным условиям. Этот пропагатор имеет интегральное представление

$$S_F(x - x') = \int_{C_F} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-x')}}{p_\mu \gamma^\mu - a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - m}, \quad (9.105)$$

где  $C_F$  – аналог фейнмановского контура в  $p_0$  пространстве, проходящий ниже двух полюсов с отрицательной энергией и выше полюсов с положительной энергией.

Обсудим теперь некоторые аспекты квантовой теории поля, связанные с модельным лагранжианом (9.76). Как и в обычном дираковском случае, прямого канонического квантования оказывается недостаточно, и необходимо использовать условие квантования, основанное на положительности сохраняющейся энергии.

Считая Фурье – коэффициенты в разложении (9.102) операторами в гильбертовом пространстве, из соотношения (9.80) получаем выражение для нормально-упорядоченной сохраняющейся энергии  $p^0 = \int d^3x : \theta_0^0$ : Это выражение является положительно-определенным для  $a^0 < m$ , если выполняются следующие антикоммутиационные соотношения

$$\begin{aligned} \{b_{(\alpha)}(\vec{p}), b_{(\alpha')}^\dagger(\vec{p}')\} &= (2\pi)^3 \frac{E_u^{(\alpha)}}{m} \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \\ \{d_{(\alpha)}(\vec{p}), d_{(\alpha')}^\dagger(\vec{p}')\} &= (2\pi)^3 \frac{E_v^{(\alpha)}}{m} \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (9.106)$$

Для простоты в этих выражениях, как и в последующих, опущена зависимость от  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . Соответствующие одновременные антикоммутиаторы полей

$$\begin{aligned} \{\psi_j(t, \vec{x}), \psi_k^\dagger(t, \vec{x}')\} &= \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{\psi_j(t, \vec{x}), \psi_k(t, \vec{x}')\} &= \{\psi_j^\dagger(t, \vec{x}), \psi_k^\dagger(t, \vec{x}')\} = 0. \end{aligned} \quad (9.107)$$

С помощью этих выражений получаем нормально-упорядоченный сохраняющийся заряд

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \frac{m}{E_u^{(\alpha)}} b_{(\alpha)}^\dagger(\vec{p}) b_{(\alpha)}(\vec{p}) - \frac{m}{E_v^{(\alpha)}} d_{(\alpha)}^\dagger(\vec{p}) d_{(\alpha)}(\vec{p}) \right]. \quad (9.108)$$

Аналогично, нормально-упорядоченный сохраняющийся 4-х импульс

$$\begin{aligned} p_\mu &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^2 \times \\ &\times \left[ \frac{m}{E_u^{(\alpha)}} p_{u\mu}^{(\alpha)} b_{(\alpha)}^\dagger(\vec{p}) b_{(\alpha)}(\vec{p}) + \frac{m}{E_v^{(\alpha)}} p_{v\mu}^{(\alpha)} d_{(\alpha)}^\dagger(\vec{p}) d_{(\alpha)}(\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Легко проверить, что оператор  $p_\mu$  генерирует пространственно-временные трансляции:  $i[p_\mu, \psi(x)] = \partial_\mu \psi(x)$ . Операторы рождения и уничтожения в терминах полей можно представить в виде

$$\begin{aligned} b_{(a)}(\vec{p}) &= \int d^3x e^{ip_u^{(a)}x} \bar{u}^{(a)}(\vec{p}) \gamma^0 \psi(x), \\ d_{(a)}^\dagger(\vec{p}) &= \int d^3x e^{-ip_v^{(a)}x} \bar{v}^{(a)}(\vec{p}) \gamma^0 \psi(x). \end{aligned} \quad (9.110)$$

Для вакуумного состояния  $|0\rangle$  гильбертова пространства

$$b_{(a)}(\vec{p})|0\rangle = 0, \quad d_{(a)}(\vec{p})|0\rangle = 0. \quad (9.111)$$

Действуя на вакуумное состояние  $|0\rangle$ , операторы рождения  $b_{(a)}^\dagger(\vec{p})$  и  $d_{(a)}^\dagger(\vec{p})$  создают частицы и античастицы с 4-х импульсами  $p_u^{(a)\mu}$  и  $p_v^{(a)\mu}$ . Обычная 4-кратная вырожденность собственных состояний гамильтониана для заданного трехмерного импульса снимается за счет *CPT*-нарушающих членов.

Приведенные выше выражения можно использовать для получения результатов в полевой теории с ненулевыми значениями  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . Например, зависящее от времени коммутационное соотношение между сохраняющимися  $p_\mu$  и квантовыми операторами  $M^{\mu\nu} = \int d^3x : J^{0\mu\nu} :$  имеет вид

$$i[p^\lambda, M^{\mu\nu}] = -g^{[\lambda\mu} p^{\nu]} - g^{\lambda 0} (a^{[\mu} J^{\nu]} + b^{[\mu} J^{\nu]}), \quad (9.112)$$

где  $J^\mu = \int d^3x : j^\mu :$  и  $J_5^\mu = \int d^3x : j_5^\mu :$  – интегралы от заряженных и киральных токов.

Обобщения одновременных антикоммутационных соотношений (9.107) на неодинаковые времена должны быть решениями модифицированного уравнения Дирака по каждой переменной и должны давать в пределе  $a_\mu, b_\mu \rightarrow 0$  известный результат. Для этого достаточно заменить (9.107) на следующие антикоммутационные соотношения



$$\begin{aligned}\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} &= iS(x-x'), \\ \{\psi(x), \psi(x')\} &= \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0,\end{aligned}\tag{9.113}$$

где

$$S(x-x') = \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \frac{e^{-ip(x-x')}}{p_\mu \gamma^\mu - a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - m}.\tag{9.114}$$

В этом выражении  $C$  – аналог замкнутого контура в  $p_0$  пространстве, который окружает все полюса и обходится против часовой стрелки.

Следует подчеркнуть, что антикоммутаторы (9.113) весьма существенны для причинной структуры квантовой теории. В частности, в случае  $\vec{b} \equiv 0$  антикоммутатор двух полей, разделенных пространственно-подобным интервалом, обращается в ноль

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0, (x-x')^2 < 0.\tag{9.115}$$

Это означает, что наблюдаемые величины, построенные на билинейных произведениях полевых операторов и разделенные пространственноподобным интервалом, коммутируют. Это, в свою очередь, означает, что в квантовой теории поля с времениподобным  $b_\mu$  микроскопическая причинность сохраняется во всех системах отсчета.

Обратимся теперь к полевой теории со взаимодействием. Предположим, что дираковский фермион взаимодействует с одним или более полями, и нас интересует влияние  $CPT$ -нарушающих членов. Существенно, что в этом случае применимы все стандартные предположения теории взаимодействующих полей. Например, свойство лоренц-инвариантности наблюдателя подразумевает квантование во всех системах отсчета, если оно проведено в одной системе. Как правило, анализ производится в заданной системе отсчета, т.е. при фиксированных значениях  $a_\mu$  и  $b_\mu$ .

### 9.7.6. Расширения стандартной модели, нарушающие $CPT$

В этом разделе рассматривается возможность обобщения стандартной модели путем добавления  $CPT$ -нарушающих членов в соответствии с предсказаниями, обсужденными выше.

Поскольку  $CPT$ -нарушение до сих пор не наблюдалось, любые  $CPT$ -нарушающие константы, возникающими в расширениях стандартной модели, должны быть малыми. В дальнейшем будем предполагать, что эти константы являются синглетами относительно ненарушенной калибровочной группы, но, как и раньше, ведущие себя относительно лоренц-преобразований частицы как тензоры с нечетным числом лоренцевских индексов.

Целью нашего рассмотрения будет построение реалистической модели  $CPT$  нарушения, которая могла бы быть основой для получения количественных оценок  $CPT$ -нарушения.

Обсуждение в предыдущих разделах ограничивает  $CPT$ -нарушение фермионными билинейными слагаемыми. Однако члены другого типа, нарушающие  $CPT$  в лагранжиане, могли бы возникать при спонтанном нарушении симметрии.

Любой член лагранжиана должен представлять из себя комбинацию из ковариантных производных и полей лептонов, кварков, калибровочных бозонов и хиггсовских бозонов. Для обеспечения перенормируемости на уровне ненарушенной калибровочной группы, ограничимся полевыми операторами с размерностью массы, меньшей четырех.

Начнем обсуждение с  $CPT$ -нарушающих расширений, включающих фермионы. Поскольку  $SU(3)$  инвариантность исключает кварк-лептонные связи, следует трактовать отдельно лептонные и кварковые сектора. Обратимся сначала к лептонному сектору. Обозначим левые и правые лептонные мультиплеты

$$L_A = \begin{pmatrix} \nu_A \\ \ell_A \end{pmatrix}, \quad R_A = (\ell_A)_R, \quad (9.116)$$

$$\text{где} \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi. \quad (9.117)$$

Как обычно,  $A = 1, 2, 3$  обозначает лептонные ароматы:  $\ell_A = (e, \mu, \tau)$ ,  $\nu_A = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ . Тогда наиболее общий набор  $CPT$ -нарушающих лептонных билинейных комбинаций, совместимый с калибровочной инвариантностью

$$L_{\text{лепт}}^{\text{CPT}} = -(a_L)_{\mu AB} \bar{L}_A \gamma^\mu L_B - (a_R)_{\mu AB} \bar{R}_A \gamma^\mu R_B. \quad (9.118)$$

Постоянные матрицы в пространстве ароматов  $a_{L,R}$  – эрмитовы.

Присутствие фактора  $\gamma^\mu$  допускает появление в лагранжиане полей только определенной спиральности. При этом сохраняется калибровочная инвариантность. В этом отличие от обычных юкавских связей, в которых присутствуют поля обеих спиральностей, и инвариантность обеспечивается присутствием хиггсовского дублета.

После спонтанного нарушения симметрии массовые собственные состояния (обозначенные шляпками) строятся с помощью стандартных унитарных преобразований

$$\nu_{LA} = (U_L^\nu)_{AB} \hat{\nu}_{LB}, \quad \ell_{LA} = (U_L^\ell)_{AB} \hat{\ell}_{LB}, \quad \ell_{RA} = (U_R^\ell)_{AB} \hat{\ell}_{RB}. \quad (9.119)$$

Тогда  $CPT$ -нарушающий член (9.118) принимает вид

$$\begin{aligned} L_{\text{лепт}}^{\text{CPT}} = & -(\hat{a}_{\nu L})_{\mu AB} \bar{\hat{\nu}}_{LA} \gamma^\mu \hat{\nu}_{LB} - \\ & -(\hat{a}_{\ell L})_{\mu AB} \bar{\hat{\ell}}_{LA} \gamma^\mu \hat{\ell}_{LB} - (\hat{a}_{\ell R})_{\mu AB} \bar{\hat{\ell}}_{RA} \gamma^\mu \hat{\ell}_{RB}, \end{aligned} \quad (9.120)$$

где каждая матрица  $\hat{a}_\mu$  получается из матрицы  $a_\mu$  путем унитарного вращения  $\hat{a}_\mu = U^\dagger a_\mu U$ . При этом не все связи  $\hat{a}_\mu$  являются наблюдаемыми. Свобода в переопределении полей позволяет исключить некоторые связи. Рассмотрим, например, следующее переопределение полей

$$J_{LA} = (V_L^\nu)_{AB} \hat{\nu}_{LB}, \quad \tilde{\ell}_{LA} = (V_L^\ell)_{AB} \tilde{\ell}_{LB}, \quad \tilde{\ell}_{RA} = (V_R^\ell)_{AB} \tilde{\ell}_{RB}, \quad (9.121)$$

где матрицы  $V(x^\mu)$  – унитарные в пространстве поколений и имеют следующую форму

$$V = \exp(iH_\mu x^\mu), \quad (9.122)$$

$H_\mu$  – эрмитов.

Тогда в каждом кинетическом члене типа  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ , за счет переопределения (9.121), возникает  $CPT$ -нарушающий член  $-\bar{\psi}\gamma^\mu\exp(iH_\lambda x^\lambda)H_\mu\exp(-iH_\nu x^\nu)\psi$ .

Очевидно, что путем выбора  $H_\mu$ , можно исключить из (9.120)  $CPT$ -нарушающий член, содержащий  $\hat{a}_\mu$ . Матрицы  $V$  должны быть подобраны так, чтобы они не влияли на юкавские связи. Можно показать, что  $V_L^\ell$  – диагональны с  $V_R^\ell = V_L^\ell$  и  $V_L^\nu = (U_L^\ell)^\dagger U_L^\nu V_L^\ell$ .

Таким образом, опуская в обозначениях тильды и шляпки, получаем общий вид  $CPT$ -нарушающих расширений стандартной модели в лептонном секторе

$$\begin{aligned} L_{\text{лепт}}^{\text{CPT}} = & -(a_\nu)_{\mu AB} \bar{\nu}_A \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \nu_B - \\ & -(a_\ell)_{\mu AB} \bar{\ell}_A \gamma^\mu \ell_B - (b_\ell)_{\mu AB} \bar{\ell}_A \gamma_5 \gamma^\mu \ell_B, \end{aligned} \quad (9.123)$$

где для замены левых и правых связей на векторные и аксиальные связи использованы определения (9.117).

Заметим, что выражение (9.123) содержит члены, нарушающие индивидуальные лептонные числа, при этом полное лептонное число остается неизменным. Таким образом, переходы с изменением аромата в принципе, существуют, но они ненаблюдаемы, если  $CPT$ -нарушающие связи в достаточной степени подавлены. Например, в струнных моделях ожидается подавление на уровне  $10^{-17}$ .

Обратимся теперь к кварковому сектору.  $SU(3)$  симметрия подразумевает, что все три кварковых цвета любого аромата должны иметь одинаковую  $CPT$ -нарушающую связь. Поэтому можно не рассматривать цветовое пространство и использовать конструкцию, аналогичную лептонному сектору.

Обозначим левые и правые компоненты кварковых полей

$$Q_A = \begin{pmatrix} u_A \\ d_A \end{pmatrix}_L, \quad U_A = (u_A)_R, \quad D_A = (d_A)_R, \quad (9.124)$$

где  $A = 1, 2, 3$  соответствуют кварковым ароматам:  $u_A = (u, c, t)$ ,  $d_A = (d, s, b)$ . Тогда на уровне ненарушенной симметрии общие  $CPT$ -нарушающие связи в лагранжиане имеют вид

$$L_{\text{кварк}}^{\text{CPT}} = -(a_Q)_{\mu AB} \bar{Q}_A \gamma^\mu Q_B - (a_U)_{\mu AB} \bar{U}_A \gamma^\mu U_B - (a_D)_{\mu AB} \bar{D}_A \gamma^\mu D_B. \quad (9.125)$$

Как и раньше, матрицы  $a_{Q,U,D}$  в пространстве ароматов являются эрмитовыми.

После спонтанного нарушения симметрии массовые собственные состояния получаются при стандартных унитарных преобразованиях:

$$\begin{aligned} u_{LA} &= (U_L^u)_{AB} \hat{u}_{LB}, & u_{RA} &= (U_R^u)_{AB} \hat{u}_{RB}, \\ d_{LA} &= (U_L^d)_{AB} \hat{d}_{LB}, & d_{RA} &= (U_R^d)_{AB} \hat{d}_{RB}. \end{aligned} \quad (9.126)$$

Тогда лагранжиан (9.125) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} L_{\text{кварк}}^{\text{CPT}} &= -(\hat{a}_{uL})_{\mu AB} \bar{\hat{u}}_{LA} \gamma^\mu \hat{u}_{LB} - (\hat{a}_{dL})_{\mu AB} \bar{\hat{d}}_{LA} \gamma^\mu \hat{d}_{LB} - \\ &- (\hat{a}_{uR})_{\mu AB} \bar{\hat{u}}_{RA} \gamma^\mu \hat{u}_{RB} - (\hat{a}_{dR})_{\mu AB} \bar{\hat{d}}_{RA} \gamma^\mu \hat{d}_{RB}. \end{aligned} \quad (9.127)$$

Как и в лептонном секторе, каждая матрица  $\hat{a}_\mu$  получается путем унитарного вращения матрицы  $a_\mu$ .

Переопределяя поля, можно исключить некоторые  $CPT$ -нарушения. Для этого достаточно переопределить поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{LA} &= (V_L^u)_{AB} \hat{u}_{LB}, & \tilde{u}_{RA} &= (V_R^u)_{AB} \hat{u}_{RB}, \\ \tilde{d}_{LA} &= (V_L^d)_{AB} \hat{d}_{LB}, & \tilde{d}_{RA} &= (V_R^d)_{AB} \hat{d}_{RB}, \end{aligned} \quad (9.128)$$

где, как и раньше, матрицы  $V = \exp(iH_\mu x^\mu)$  — унитарные в пространстве поколений. В этом случае инвариантность юкавских и связей, не зависящих от производных, включая смешивание Кабибо-Кобаяши-Маскава, требует введение матриц  $V$ , сокращающих

эффекты, связанные с умножением на фазовый фактор. Например, можно подобрать фазу так, чтобы выполнялось соотношение  $(a_{uL})_{\mu 11} = (a_{uR})_{\mu 11}$ . Эта процедура исключает  $CPT$ -нарушающую векторную связь из  $u$ -кваркового сектора.

Снова опуская в обозначениях тильды и шляпки, получаем  $CPT$ -нарушающие расширения кваркового сектора стандартной модели

$$L_{\text{кварк}}^{\text{CPT}} = -(a_u)_{\mu AB} \bar{u}_A \gamma^\mu u_B - (b_u)_{\mu AB} \bar{u}_A \gamma_5 \gamma^\mu u_B - \\ -(a_d)_{\mu AB} \bar{d}_A \gamma^\mu d_B - (b_d)_{\mu AB} \bar{d}_A \gamma_5 \gamma^\mu d_B. \quad (9.129)$$

причем  $(a_u)_{\mu 11} = 0$ . Как и прежде, лагранжиан (9.125) содержит малые эффекты, связанные с переходами ароматов, которые ненаблюдаемы. Однако диагональные вклады могут быть детектированы в интерферометрических экспериментах по косвенному  $CPT$  нарушению в осцилляциях нейтральных псевдоскалярных  $p$ -мезонов ( $p = K, D, B_d$  или  $B_s$ ). В этих экспериментах измеряется феноменологический параметр  $\delta_p$ , пропорциональный разности между диагональными элементами эффективного гамильтониана, осуществляющего эволюцию в  $p - \bar{p}$  системе.

Лагранжианы (9.123) и (9.127) представляют собой  $CPT$ -нарушающие рассматривания фермионного сектора стандартной модели. Обсудим теперь  $CPT$ -нарушающие члены, не содержащие фермионов.

Единственный  $CPT$ -нарушающий член, содержащий хиггсовское поле и удовлетворяющий обсуждавшимся выше критериям, включает связь через производную

$$L_{\text{хиггс}}^{\text{CPT}} = ik^\mu \phi^\dagger D_\mu \phi + \text{э.с.}, \quad (9.130)$$

где  $k^\mu$  –  $CPT$ -нарушающий постоянный 4-х вектор,  $D_\mu$  – ковариантная производная,  $\phi$  –  $SU(2)$  -дублетное хиггсовское поле. Очевидно, что лагранжиан (9.130) характеризует вклад хиггс –  $Z_\mu^0$  сектора модели. Независимо от  $CPT$ -сохраняющих, но нарушающих лоренц-симметрию вкладов в статический потенциал, лагранжиан (9.130) приводит к стабильным модификациям механизма нарушения симметрии.

Можно найти и *CPT*-нарушающие члены, удовлетворяющие сформированным выше критериям и содержащие только калибровочные поля

$$L_{\text{калибр}}^{\text{CPT}} = k_{3\kappa} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left( G_\lambda G_{\mu\nu} + \frac{2}{3} G_\lambda G_\mu G_\nu \right) + \\ + k_{2\kappa} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left( W_\lambda W_{\mu\nu} + \frac{2}{3} W_\lambda W_\mu W_\nu \right) + k_{1\kappa} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} B_\nu B_{\mu\nu} + k_{0\kappa} B^\kappa, \quad (9.131)$$

где  $k_{3\kappa}$ ,  $k_{2\kappa}$ ,  $k_{1\kappa}$  и  $k_{0\kappa}$  – *CPT*-нарушающие константы. В (9.131)  $G_\mu$ ,  $W_\mu$ ,  $B_\mu$  – матричные  $\text{SU}(3)$ ,  $\text{SU}(2)$ ,  $\text{U}(1)$  калибровочные бозоны,  $G_{\mu\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  – соответствующие полевые напряженности. Первые три члена в (9.131) не влияют на характер нарушения симметрии. Можно ожидать, что эффекты *CPT*-нарушения будут ненаблюдаемыми при малых значениях *CPT*-нарушающих констант.

Выше мы рассмотрели спонтанное нарушение *CPT* в эффективной теории поля. При этом предполагалось, что действие исходной теории *CPT* и Пуанкаре – инвариантно, уравнения же движения приводят к решениям, обнаруживающим *CPT* и лоренц-нарушение. Эффективная низкоэнергетическая теория остается трансляционно-инвариантной и ковариантной относительно изменения системы отсчета наблюдателя, но в ней нарушается *CPT* и ковариантность относительно сдвигов частицы. Мы ограничились членами в лагранжиане, содержащими *CPT*-нарушающие фермионные билинейные комбинации. Эти слагаемые в лагранжиане весьма важны с точки зрения получения экспериментальных ограничений на нарушение *CPT* в мезонной интерферометрии. Анализ модели дираковского фермиона показывает, что эффективные теории поля со спонтанным *CPT*-нарушением обладают желаемыми свойствами микроскопической причинности и перенормируемости.

## 9.8. *CPT*-нарушение и декогерентность

Теоретические модели, вне зависимости от того, насколько они детализированы и элегантны, становятся физическими теориями только тогда, когда их предсказания могут быть сопоставлены с экспериментом. Критические струны и другие подходы в кванто-

вой гравитации, содержащие все локальные симметрии классической общей теории относительности, пока не способны что-либо предсказать для низкоэнергетических теорий. Причина проста:

константа связи гравитации – ньютоновская константа  $G_N \sim \frac{1}{M_{Pl}^2}$

(в 4-х измерениях) очень мала. С учетом локальной лоренц-симметрии и общей ковариантности, величины, представляющие экспериментальный интерес (сечения и вероятности), характеризуются квантовыми поправками, которые пропорциональны некоторой степени тензора кривизны. Этот тензор имеет размерность квадрата импульса, т.е. физические величины будут подавлены, по крайней мере, квадратом планковской массы. Это приводит к тому, что детектирование эффектов квантовой гравитации становится практически невозможным. Таким образом, такого типа модели остаются математически согласованными моделями, но не физическими теориями.

С другой стороны, в последнее время становится все более популярной идея о том, что некоторые из фундаментальных симметрий классической общей и специальной теорий относительности (например, лоренц-симметрия, принцип эквивалентности) способны нарушаться в квантовой теории гравитации. Если это так, то вышеупомянутое подавление массой Планка могло бы модифицироваться таким образом, чтобы эффекты квантовой гравитации усиливались и оказались способными к детектированию.

Многие подходы к квантовой гравитации сходятся в одном: они нарушают *CPT*-теорему. Оказывается, нарушение дискретной *CPT*-пространственно-временной симметрии могут иметь важнейшие феноменологические следствия.

### 9.8.1. *CPT*-теорема и как ее можно обойти

Инвариантность плотности лагранжиана  $L(x)$  теории поля относительно комбинированного преобразования *CPT* есть свойство любой квантовой теории поля в плоском пространстве-времени, если эта теория обладает

а) локальностью;

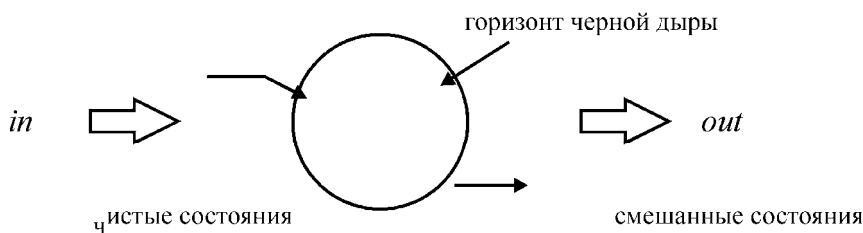


- б) унитарностью;  
 в) лоренц-инвариантностью.  
 Иначе говоря, если  $\theta=CPT$ , то

$$\theta L(x)\theta^\dagger = L(-x), \quad L = L^\dagger. \quad (9.132)$$

В искривленном пространстве-времени, например, вблизи черных дыр, *CPT*-теорема несправедлива, при этом теряются свойства лоренц-инвариантности и унитарности. В моделях квантовой гравитации нарушаются условия (б) и (в), т.е. *CPT*-нарушена. Важно отметить, что на планковских масштабах пространство-время может быть дискретным и топологически нетривиальным. Следовательно, лоренц-инвариантность окажется нарушенной, т.е. будет нарушенной и *CPT*. Феноменологически нарушение лоренц-инвариантности приводит к расширению стандартной модели, в которой нарушена как Лоренц, так и *CPT*-инвариантность.

Кроме того, возможно существование окружения из гравитационных степеней свободы, которые никак себя не проявляют при низких энергиях (нераспространяющиеся степени свободы). Это приводит к потере информации для «низкоэнергетического» наблюдателя, который, по определению, способен измерять посредством рассеяния лишь распространяющиеся степени свободы. В результате происходит потеря унитарности, *CPT* нарушается, причем независимо от нарушения лоренц-инвариантности. Потерю информации можно проиллюстрировать с помощью рис. 9.2.



Модифицированная временная эволюция

$$\frac{d}{dt}\rho = \underbrace{i[\rho, H]}_{\text{квантовомеханическое слагаемое}} + \underbrace{\Delta H[\rho]\rho}_{\text{член, нарушающий квантовую механику}}$$

Рис. 9.2

В пространстве-времени присутствуют сингулярные флуктуации (например, черные дыры), и это означает, что наблюдаемое пространство-время является открытой системой.

Когда материальная частица проходит такую флуктуацию (со временем жизни  $\sim 10^{-43}$  с), часть квантовых чисел частицы «уходит» за горизонт. Таким образом, может происходить обмен информацией между «наблюдательным» миром и гравитационным окружением, состоящим из степеней свободы, которые никак себя не проявляют в экспериментах по рассеянию при низких энергиях. Потеря информации подразумевает эволюцию первоначально чистых квантовомеханических состояний в смешанные состояния.

В результате асимптотический наблюдатель вместо чистых состояний будет пользоваться матрицей плотности

$$\rho_{out} = \text{tr}_{\text{ненабл}} \langle out | \rho_{in} | out \rangle = S \rho_{in} S^\dagger, \quad (9.133)$$

где  $S = e^{iHt}$  – обычная матрица рассеяния. Следовательно, в квантовой гравитации концепция матрицы рассеяния заменяется на матрицу суперрассеяния  $S$ , введенную Хоукингом. Эта матрица линейна, но необратима между  $in$  и  $out$ -состояниями. Именно она характеризует потерю унитарности в эффективной низкоэнергетической теории.

### 9.8.2. $S$ -матрица и сильное $CPT$ -нарушение

Согласно теории R. Wald, если  $S = SS^\dagger$ , то  $CPT$ -симметрия нарушена в том смысле, что  $CPT$ -оператор не является определенным. Попробуем доказать эту теорему. Предположим, что  $CPT$  – сохраняется, т.е. существует унитарный, обратимый  $CPT$  оператор:  $\theta \bar{\rho}_{in} = \rho_{out}$ . Поскольку матрица плотности действует на тензорное произведение пространств между «ket» и «bra» векторами:  $\rho = \psi \otimes \bar{\psi}$ , действие  $\theta$  определяется схематически следующим образом:  $\Theta = \theta \theta^\dagger$ , причем  $\theta$  действует на состояние векторов  $\psi$  как антиунитарный оператор  $\theta^\dagger = -\theta^{-1}$ .

Предполагая, что оператор  $\Theta$  существует, получаем

$$\rho_{out} = \$\rho_{in} \rightarrow \Theta \bar{\rho}_{in} = \$\Theta^{-1} \bar{\rho}_{out} \rightarrow \bar{\rho}_{in} = \Theta^{-1} \$\Theta^{-1} \bar{\rho}_{out}.$$

Поскольку  $\bar{\rho}_{out} = \$\bar{\rho}_{in}$ , то

$$\bar{\rho}_{in} = \Theta^{-1} \$\Theta^{-1} \$\bar{\rho}_{in}. \quad (9.134)$$

Это соотношение подразумевает наличие обратного оператора

$$\$^{-1} = \Theta^{-1} \$\Theta^{-1}. \quad (9.135)$$

Однако этого не может быть, поскольку при эволюции чистых состояний в смешанные информация теряется. Чтобы доказать формально это утверждение, заметим, что из выражения (9.135) следует

$$\Theta = \$\Theta^{-1} \$ . \quad (9.136)$$

Рассмотрим матрицу плотности чистых состояний  $\rho_{in} = |IN\rangle\langle IN|$ , которая эволюционирует в матрицу плотности смешанных состояний  $\rho_{in}$ . Как результат (9.136), смешанное состояние  $\Theta^{-1}\rho_{in}$  должно эволюционировать в чистое состояние  $\Theta\rho_{in}$ . Предположим, однако, что имеется *out*-состояние  $\psi$ , которое получено действием  $\$$  на  $IN$  матрицы плотности  $\sigma$

$$\$ \sigma = \psi \otimes \bar{\psi}, \quad (9.137)$$

где, как отмечалось выше,  $\otimes$  обозначает тензорное произведение гильбертовых пространств, «заселенных» ket- и bra-векторами. Можно разложить  $\sigma$  по ее собственным векторам  $\varphi_i$ , соответствующим взвешенной суперпозиции состояний, представляющей смешанное состояние  $\sigma$

$$\sigma = \sum_i p_i \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i, \quad (9.138)$$

где  $p_i$  – положительные числа, причем  $\sum_i p_i = 1$ . Поскольку, по

определению,  $\$$  – линейное отображение, получаем

$$\sum_i p_i \$(\varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i) = \psi \otimes \bar{\psi}. \quad (9.139)$$

Выберем теперь OUT вектор состояния  $\chi$ , ортогональный к  $\psi$ . Найдем среднее значение от (9.139) в состоянии  $\chi$

$$\sum_i p_i \langle \chi | \$(\varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i) | \chi \rangle = 0. \quad (9.140)$$

Каждое из слагаемых в выражении (9.140) – неотрицательное вследствие положительности  $p_i$  и положительности матрицы плотности  $\$(\varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i)$ . Поэтому из соотношения (9.140) получаем

$$\langle \chi | \$(\varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i) | \chi \rangle = 0 \quad (9.141)$$

для всех  $i$  и всех  $\chi$ , ортогональных  $\psi$ . Это означает, что

$$\$(\varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i) = \psi \otimes \bar{\psi} \quad (9.142)$$

для всех  $i$ . Каждое начальное чистое состояние  $\varphi_i$  должно эволюционировать в то же самое конечное чистое состояние  $\psi$ . Тогда  $\theta^{-1}\psi$  должно эволюционировать в конечное состояние  $\theta\varphi_i$  для всех  $i$ . Но это невозможно, если существует более чем одно  $\varphi_i$ , т.е. матрица плотности представляет смешанное состояние.

Таким образом, в случае, когда декогерентность подразумевает эволюцию чистого состояния в смешанные, *CPT* должно быть нарушенной в том смысле, что оператор  $\theta$  не является вполне определенным оператором. Необратимость  $\$$  в этом случае не удивительна, она есть результат потери информации.

### 9.8.3. *CPT*-симметрия без *CPT*-симметрии?

Может ли нарушение *CPT*-симметрии быть экспериментально детектировано? Оказывается, что помимо «сильного» *CPT*-нарушения, связанного с декогерентностью и эволюцией чистых состояний в смешанные, возможна «мягкая» форма *CPT*-инвариантности, совместимая с необратимостью  $\$$ . Основная идея «мягкой» формы *CPT*-инвариантности состоит в том, что несмотря на нарушение *CPT* в указанном выше смысле, можно определить асимптотически чистые *in* и *out*-состояния, которые *CPT*-преобразование переводит друг в друга. Иначе говоря, если даже в полной теории оператор  $\Theta$  не определен, можно найти чистые состояния  $\psi \in H_{IN}$  и  $\varphi \in H_{OUT}$  в гильбертовых пространствах  $H$  *in* и

*out*-состояний, для которых имеет место следующее соотношение для вероятностей  $P$ :

$$P(\psi \rightarrow \varphi) = P(\theta^{-1}\varphi \rightarrow \theta\psi). \quad (9.143)$$

Если экспериментально измеряются только вероятности, то равенство (9.143) подразумевает, что «строгая» форма  $CPT$  – инвариантности экспериментально недетектируема.

Что касается матрицы суперрассеяния  $\$$ , соотношение (9.143) означает, что

$$\langle \varphi | \$(\psi \otimes \bar{\psi}) | \varphi \rangle = \langle \theta\psi | \$(\theta^{-1}\varphi \otimes \bar{\theta}^{-1}\varphi) | \theta\psi \rangle \quad (9.144)$$

или эквивалентно,

$$\$^\dagger = \Theta^{-1} \$ \Theta^{-1}, \quad (9.145)$$

если действие рассматривается на чисто асимптотических состояниях. Соотношение (9.145) совместимо с отсутствием обратного преобразования к  $\$$ , коль скоро имеется полная  $CPT$ -инвариантность, подразумевающая унитарность  $\$$ , т.е.  $\$^\dagger = \$^{-1}$ .

#### 9.8.4. Декогерентность и «чистота» состояний при эволюции

Полученный выше результат, касающийся «слабой»  $CPT$ -инвариантности, требует «чистоты» асимптотических состояний. Интересным подходом к обсуждению декогерентной эволюции открытых квантовомеханических систем является модель Линдблада, которая подразумевает положительность матрицы плотности  $\rho(t)$  в любой момент времени и сохранение вероятности  $\text{tr} \rho = 1$ . В этой модели эволюция открытых систем с гамильтонианом  $H$  и взаимодействие с окружающей средой посредством операторов  $D_j, D_j^\dagger$  описывается как линейная эволюция матрицы  $\rho$

$$\dot{\rho} = i[\rho, H] + DD[\rho], \quad D[\rho] = \sum_j \left( \left\{ \rho, D_j^\dagger D_j \right\} - 2D_j \rho D_j^\dagger \right), \quad (9.138)$$

где  $\{...\}$  обозначает антикоммутатор.

Гамильтониан  $H$  в (9.138) может содержать слагаемые, связывающие систему с окружающей средой, которые выражаются через коммутаторы от  $\rho$ , т.е. этот гамильтониан следует рассматривать как эффективный гамильтониан системы. Декогерентный же член  $D[\rho]$  не может быть выражен через коммутатор.

Для того, чтобы убедиться в сохранении энергии (в среднем) и в монотонном возрастании неймановской энтропии, введем самосопряженные операторы

$$D_j^\dagger = D_j \quad (9.139)$$

и потребуем, чтобы эти операторы коммутировали для всех  $j$  с гамильтонианом

$$[D_j, H] = 0. \quad (9.140)$$

Тогда декогерентные слагаемые в (9.138) приобретают двойную коммутационную структуру

$$D[\rho] = \sum_j [D_j, [D_j, \rho]]. \quad (9.141)$$

Такой тип декогерентности приводит к эволюции чистого состояния в смешанное. Однако существует подкласс линдбадовской эволюции, для которого «чистота» векторов состояний сохраняется. Для этого необходимо, чтобы

$$\rho^2 = \rho, \quad \text{tr} \rho = 1 \quad (9.142)$$

при эволюции.

В таких моделях  $D_j = \lambda_j H$ , где  $\lambda_j$ ,  $c$  – числовые константы. Без потери общности можно учесть этот случай в сумме (9.141) для одного оператора  $D$

$$D = \lambda H, \quad \lambda^2 = \sum_j \lambda_j^2. \quad (9.143)$$

При таком типе декогерентности матрица плотности при эволюции сохраняет «чистоту» состояний и может быть записана в терминах стохастических дифференциальных уравнений для векторов состояний  $|\psi\rangle$  (или матрицы плотности чистых состояний  $\rho = (|\psi\rangle\langle\psi|)$ )

$$d\rho = -i[H, \rho]dt - \frac{1}{8}[D, [D, \rho]]dt + \frac{1}{2}[\rho, [\rho, D]]dW_t, \quad (9.144)$$

где  $t$  – время,  $dW_t$  – стохастический дифференциал, удовлетворяющий соотношениям:

$$dW_t^2 = dt, \quad dt dW_t = 0, \quad (9.145)$$

которые эквивалентны условиям на «белый шум».

Заметим, что в терминах векторов состояний  $|\psi\rangle$ , первое слагаемое в (9.144) – шредингеровский гамильтониан  $-iH|\psi\rangle$ , второе же слагаемое представляет собой стохастический диффузионный член. В отличие от шредингеровского члена, диффузионный член неинвариантен относительно обращения времени  $t \rightarrow -t$  и  $i \rightarrow -i$ . Таким образом, в задаче, несмотря на сохранение «чистоты» состояний, присутствует необратимость времени.

Используя соотношения (9.143), (9.144), получаем стохастическое уравнение для декогерентности

$$d\rho = -i[H, \rho]dt - \frac{\lambda^2}{8}[H, [H, \rho]]dt + \frac{\lambda}{2}[\rho, [\rho, D]]dW_t. \quad (9.146)$$

Двойной коммутатор гамильтониана, совместно с условием (9.142) чистоты состояний, приводит к следующему порядку декогерентного слагаемого (полученному путем нахождения вакуумного среднего от двойного коммутатора в (9.146))

$$\gamma = \langle\langle D[\rho] \rangle\rangle = \text{tr} \left( \rho \frac{\lambda^2}{8} [H, [H, \rho]] \right). \quad (9.147)$$

Используя в качестве полного ортонормированного базиса собственные энергетические состояния  $|m\rangle$ , получим для квадрата дисперсии энергии

$$\gamma = \frac{\lambda^2}{8} (\Delta H)^2 = \langle\langle H^2 \rangle\rangle - \langle\langle H \rangle\rangle^2. \quad (9.148)$$

В моделях декогерентности, обусловленных гравитацией, естественно считать  $\lambda^2 \sim \frac{1}{M_{Pl}^2}$ . В таких моделях оценка коэффициента декогерентности дает

$$\gamma \sim \frac{(\Delta H)^2}{M_{Pl}}. \quad (9.149)$$

Общая линдбладовская эволюция может быть сформулированная таким образом, что для получения феноменологических предсказаний нет необходимости в знании микроскопической динамики процесса декогерентности. Это так называемый «динамический полугрупповой подход к декогерентности». Временная необратимость в этом подходе связана с отсутствием обратного элемента соответствующей полугруппы.

Рассмотрим общий случай декогерентной эволюции  $N$ -уровневой системы, т.е. системы, чьи собственные энергетические состояния занимают  $N$ -мерное пространство. Пусть операторы декогерентности являются ограниченными и представляются  $N \times N$  матрицами, генерируемые базисом  $F_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, N^2 - 1$  со скалярным произведением  $(F_\mu, F_\nu) = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}$ . В целях простоты будем иметь дело  $N=2, 3$ -уровневыми системами. В этих случаях базис  $\{F_\mu\}$  состоит из

1) трех  $2 \times 2$  матриц Паули плюс единичная матрица  $I_2$  для случая  $N=2$ ;

2)  $3 \times 3$  матриц Галл-Манна  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  плюс  $3 \times 3$  единичная матрица  $I_3$  для  $N = 3$  случая.

Матрицы  $F_\mu$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[F_i, F_j] = i \sum_k f_{ijk} F_k, \quad 1 \leq i, \quad k \leq 8, \quad (9.150)$$

где  $f_{ijk}$  – структурные константы группы  $SU(N)$ .

Разлагая операторы  $D$ , а также эффективный гамильтониан и матрицу плотности по базису  $\{F_\mu\}$ , получаем

$$H = \sum_\mu h_\mu F_\mu, \quad \rho = \sum_\mu \rho_\mu F_\mu, \quad D_j = \sum_\mu d_\mu^{(j)} F_\mu. \quad (9.151)$$



Используя эрмитовость  $D$ , которая подразумевает монотонный рост неймановской энтропии  $S = -\text{tr} \rho \ln \rho$ , перепишем декогерентный член  $D[\rho]$  в выражении (9.138) в виде

$$D[\rho]_{\text{Lindblad}} = \sum_{\mu, \nu} L_{\mu\nu} \rho_{\mu} F_{\nu}, \quad (9.152)$$

где матрица  $L_{\mu\nu}$  – вещественная, симметричная и обладающая следующими свойствами

$$L_{\mu 0} = L_{0\mu} = 0, \quad L_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} (\vec{d}_m \vec{d}_k) f_{iml} f_{ikj}, \quad (9.153)$$

где  $\vec{d}_{\mu} = \left( d_{\mu}^{(1)}, \dots, d_{\mu}^{(N^2-1)} \right)$ .

Обращение в ноль первого столбца и первой строки матрицы  $L_{\mu\nu}$  связано с ростом энтропии. Если не использовать требование сохранения (в среднем), то можно не предполагать коммутативности операторов с гамильтонианом, т.е. вообще говоря,  $[D_j, H] \neq 0$ . Ниже будут рассмотрены примеры, в которых энергия не сохраняется из-за взаимодействий и флуктуаций метрики.

Уравнение эволюции (9.138) запишем в виде:

$$\dot{\rho} = \sum_{i,j} h_i \rho_j f_{ij\mu} + \sum_{\nu} L_{\mu\nu} \rho_{\nu}, \quad \nu, \mu = 0, \dots, N^2 - 1, \quad (9.154)$$

где точка над  $\rho$  – производная по времени.

Сохранение вероятности  $\text{tr}(\rho) = 1$  в любой момент времени означает, что дифференциальное уравнение для компоненты  $\rho_0$  становится независимым, т.е.

$$\rho_0(t) = \text{const}. \quad (9.155)$$

Остальные дифференциальные уравнения (9.154) можно переписать в виде

$$\dot{\rho}_k = \sum_j \left( \sum_i h_i f_{ij\mu} + L_{kj} \right) \rho_j = \sum_k M_{kj} \rho_j. \quad (9.156)$$

Обозначим через  $A$  матрицу, которая диагонализует матрицу  $M$ . Пусть  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N^2-1}\}$  – набор собственных значений матрицы  $M$ , а

$\{v_1, \dots, v_{N^2-1}\}$  – соответствующий набор ее собственных векторов.

Тогда  $(ij)$  элементы матрицы  $A$ :  $A_{ij} = (v_i)_j$ . Решение (9.156) можно представить в виде

$$\rho_i(t) = \sum_{k,j} e^{\lambda_k t} A_{ik}^{-1} A_{kj} \rho(0)_j. \quad (9.157)$$

Таким образом, в динамическом полугрупповом подходе использование таких общих свойств, как монотонное возрастание энтропии, сохранение вероятности и т.д., позволяет свести проблему декогерентности к алгебраической проблеме определения собственных значений и собственных векторов конечномерных матриц.

Декогерентность, вообще говоря, приводит к распаду со временем  $t$  недиагональных элементов матрицы плотности открытых систем

$$\rho(x, x', t) \sim \exp\left(-ND(x-x')^2 t\right), \quad (9.158)$$

где  $x, x'$  – пространственные положения центра масс системы из  $N$  частиц,  $D$  – параметр декогерентности. Отметим зависимость экспоненты от квадрата разности  $(x-x')^2$  и числа частиц  $N$ , которая подразумевает усиление декогерентности с ростом  $N$   $(x-x')^2$ .

Таким образом, макроскопические тела (содержащие число Авогадро частиц) очень быстро переходят в декогерентное состояние.

В некоторых моделях декогерентности, особенно в тех, в которых «чистота» состояний сохраняется, можно ввести математический критерий для редукции вектора состояния. Прежде всего заметим, что временная эволюция (9.138) такой специфической системы может быть записана в терминах соответствующих векторов состояний  $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} |d\psi\rangle = & -iH|d\psi\rangle dt + \sum_j \left( \langle D_j^\dagger \rangle_\psi D_j - \frac{1}{2} D_j^\dagger D_j - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \langle D_j^\dagger \rangle_\psi \langle D_j \rangle_\psi \right) |\psi\rangle dt + \sum_j \left( D_j - \langle D_j \rangle_\psi \right) |\psi\rangle dW_{0,t}, \end{aligned} \quad (9.159)$$

где  $dW_{0,t}$  – стохастический дифференциал случайных переменных, удовлетворяющий соотношению (9.149).

Редукцию вектора состояния или коллапс волновой функции можно продемонстрировать следующим образом. Сделаем предположение о том, что гамильтониан системы  $H$  можно представить в блочдиагональном виде в терминах каналов  $\{k\}$ , которые существуют независимо от какого-либо «измерения» (т.е. взаимодействия с макроскопической измерительной аппаратурой). Если обозначить через  $P_k$  – проекционный оператор на канал  $k$ , то

$$[H, P_k] = 0. \quad (9.160)$$

Редукция вектора состояния происходит путем локализации  $|\psi\rangle$  на канале  $k$  за счет соотношений (9.159). Математической мерой локализации является квантовая дисперсная энтропия

$$K = -\sum_k \langle P_k \rangle_\psi \ln \langle P_k \rangle_\psi, \quad (9.161)$$

которая имеет свойство монотонного убывания

$$\frac{d}{dt}(MK) = -\sum_k \frac{1 - \langle P_k \rangle_\psi}{\langle P_k \rangle_\psi} \sum_j \left| \langle P_k D_j P_k \rangle_\psi \right|^2 \leq 0, \quad (9.162)$$

где  $M$  обозначает среднее по ансамблю теорий. Монотонное убывание (9.162) подразумевает локализацию вектора состояния в пространстве состояний за время, зависящее от деталей взаимодействия со средой, особенно от эффективных скоростей взаимодействия

$$R_k = \sum_j \left| \langle P_k D_j P_k \rangle_\psi \right|^2.$$

### 9.8.5. Оценки величины эффектов нарушения CPT

К сожалению, величина нарушения  $CPT$ -эффектов зависит от используемой модели. Если связывать  $CPT$ -нарушение с квантовой

гравитацией, то следует учесть, что  $G_N \sim \frac{1}{M_{Pl}^2}$ ,  $M_{Pl} \approx 10^{19}$  ГэВ.

Поэтому  $CPT$ -нарушающие и эффекты декогерентности подавлены величиной  $E^3/M_{Pl}^2$ , где  $E$  – типичный масштаб энергий низкоэнергетического пробника.

Эти эффекты оказываются практически недетектируемы в нейтральных мезонах, но в экспериментах с осцилляциями нейтрино (если симметрия ароматов нарушена квантовой гравитацией), например, для нейтрино от  $\gamma$ -вспышек, они вполне могли бы наблюдаться.

Кроме того, учет петлевых поправок может привести к  $CPT$ -нарушающим эффектам порядка  $E^2/M_{Pl}$ . Это происходит в моделях петлевой квантовой гравитации или в моделях некритических струн. Такие эффекты уже могли бы проявляться при имеющихся энергиях, большинство из них уже исключены текущими экспериментами.

С другой стороны, как уже обсуждалось выше, в некоторых моделях декогерентности хотя и возникает подавление  $\sim \frac{1}{M_{Pl}}$ , но параметр декогерентности  $\gamma$  зависит от разности энергий  $\Delta E = E_2 - E_1$  между двумя энергетическими состояниями, например, системы нейтральных каонов или двумя нейтральными состояниями в иерархической модели нейтрино:  $\gamma \sim \frac{(\Delta E)^2}{M_{Pl}}$ . Такие эффекты вряд ли детектируемы в обозримом будущем в осцилляционных экспериментах, несмотря на минимальный масштаб подавления.

## 9.9. Некоммутативные теории поля

Стандартная модель представляет собой успешную физическую теорию, способную объяснить практически все имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные. Однако, будучи экспериментально успешной, стандартная модель содержит много теоретически неопределенных параметров. Очевидно стремление уменьшить число этих параметров путем рассмотрения расширенной стандартной модели.

Одной из таких возможностей является некоммутативная стандартная модель. Некоммутативное пространство-время может быть представлено так называемой плоскостью Мойяла, на которой операторы координат и сопряженных импульсов  $\hat{x}_\mu$ ,  $\hat{p}_\nu$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] &= i\theta_{\mu\nu}, & \theta_{\mu\nu} &= -\theta_{\nu\mu}, \\ [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] &= i\hbar\eta_{\mu\nu}, & [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (9.163)$$

В этих соотношениях  $\theta_{\mu\nu}$  – параметр некоммутативности (обычно выбираемый как постоянный тензор) размерности (длина)<sup>2</sup>. Очевидно, что лоренц-симметрия нарушена, однако она должна проявляться при низких энергиях  $E^2\theta \ll 1$  ( $\theta$  – безразмерный масштаб тензора  $\theta_{\mu\nu}$ ). Далее следует определить теорию поля на некоммутативном пространстве-времени – некоммутативную теорию поля. Чтобы построить некоммутативную теорию поля, достаточно заменить обычное произведение полей в коммутативном действии мойяловским  $*$ -произведением

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= e^{i\theta_{\mu\nu}\partial_\mu x_\nu} f(x)g(x)|_{x=y} = \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu g + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (9.164)$$

Отметим только, что этот рецепт нельзя использовать для калибровочных теорий, основанных на других, нежели  $U_*(n)$  симметриях. Введение  $*$ -произведения в действие приводит к нетривиальным последствиям в теории как на классическом, так и на квантовом уровне. На классическом уровне возникают ограничения на калибровочные теории: только некоммутативные  $U(n)$  калибровочные теории имеют простое некоммутативное расширение. Это утверждение не распространяется на некоммутативные  $SU(n)$  калибровочные теории. Представления  $U_*(n)$  алгебры ограничиваются  $n \times n$  эрмитовыми матрицами. Кроме того, некоммутативность предполагает ограничения на фермионы и их заряды. Другим интересным следствием классических некоммутативных теорий является  $C$ - и  $CP$ -нарушения.

### 9.9.1. Спин-статистика и *CPT*-теорема в некоммутативной теории поля

Принцип Паули – соотношение между спином и статистикой – один из самых фундаментальных результатов в физике. Это соотношение определяет структуру материи и ее устойчивость. Оно с высокой степенью точности проверено экспериментально. В релятивистской квантовой теории поля связь между спином и статистикой основана на следующих предположениях:

- а) вакуум – состояние с наименьшей энергией;
- б) физические величины (наблюдаемые) коммутируют друг с другом в двух пространственно-временных точках, разделенных пространственно-временным интервалом.
- в) метрика физического гильбертова пространства положительно определена. В этих условиях поля с полуцелым спином (фермионы) квантуются с помощью антикоммутиационных соотношений, а поля с целым спином (бозоны) – посредством коммутационных соотношений.

Возможность нарушения соотношения между спином и статистикой в квантовой теории поля на некоммутативном пространстве-времени впервые предложена в работе М. Chaichian. Ниже будет показано, что такое нарушение происходит тогда (и только тогда), если пространственные и временные координаты не коммутируют. Покажем так же, что *CPT* теорема остается справедливой в теориях поля на некоммутативных пространствах, несмотря на то, что *S*, *P*, *T* симметрии оказываются нарушенными.

Обычно считается, что представление о пространстве-времени как о непрерывном многообразии нарушаются на очень малых масштабах порядка планковской длины  $L_{Pl} \approx 1,6 \cdot 10^{-33}$  см. Такая картина может возникать при определении структуры пространства-времени, основанном на квантовомеханических и гравитационных представлениях. При определении пространственно-временных точек со все большей точностью необходимы все большие плотности энергии-импульса. На этом пути может возникнуть черная дыра, препятствующая измерениям со все большей точностью. Аргументы в пользу некоммутативности возникают также в теориях струн с постоянным антисимметричным фоновым полем.

В низкоэнергетическом пределе этой теории возникает некоммутативная теория поля. Таким образом, классическая геометрическая концепция пространства-времени может оказаться неадекватной при описании физических явлений на очень малых расстояниях.

В квантовой теории поля операторный характер соотношения (9.163) подразумевает, что произведение любых двух полевых операторов  $\varphi(x)\Phi(x)$  заменяется  $*$  – произведением или Вейль-Мойял произведением

$$\varphi(x) * \Phi(x). \quad (9.164)$$

В этом случае физические наблюдаемые, являющиеся произведением нескольких полевых операторов, уже не будут локальными величинами, удовлетворяющими вышеупомянутому условию (б) и обеспечивающими выполнение теоремы о связи спина и статистики. Например, произведение  $:\varphi^2(x):$  для вещественного скалярного поля с массой  $m$  имеет некоммутативную версию  $:\varphi(x)*\varphi(x):$  и приводит к отличному от нуля одновременному коммутационному соотношению (ETCR):

$$[:\varphi(x)*\varphi(x):, :\varphi(y)*\varphi(y):]_{|x_0=y_0} \neq 0, \quad (9.165)$$

где  $:$  обозначает нормальное упорядочение. В частности, поскольку вакуумные средние (9.165) равны нулю, матричный элемент между вакуумом и двухчастичным состоянием в  $d$ -мерном пространстве (для статистики Бозе-Эйнштейна)

$$\begin{aligned} \langle 0 | :\varphi(x)*\varphi(x):, :\varphi(y)* \\ * \varphi(y): |_{x_0=y_0} | P, P' \rangle = -\frac{2i}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{\sqrt{\omega_P \omega_{P'}}} \left( e^{-iP'x - iPy} + e^{-iPx - iP'y} \right) \times \\ \times \int \frac{d\vec{k}}{\omega_k} \sin \left[ \vec{k} \left( \vec{x} - \vec{y} \right) \right] \cos \left( \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu P_\nu \right) \cos \left( \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu P'_\nu \right), \end{aligned} \quad (9.166)$$

где  $\omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  и  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_d)$ .

Правая часть (9.166) отлична от нуля, если  $\theta^{0i} \neq 0$ . Это утверждение справедливо как для матричных элементов ETCR двух наблюдаемых, выраженных как любая степень бозонных полей  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(y)$  и их производных, так и для спинорных полей  $\psi(x)$ ,  $\psi(y)$  и

их производных (с антикоммутиационным соотношением). Известно, однако, что в теориях с пространственно-временной некоммутативностью ( $\theta^{0i} \neq 0$ ) нарушается унитарность, а также причинность на макроскопическом уровне. Действительно, в низкоэнергетическом пределе теории струн с постоянным антисимметричным фоновым полем  $B^{mk}$  получается полевая теория с  $*$ -произведением, если  $\theta^{0i} = 0$ . Если же  $\theta^{0i} \neq 0$ , то соответствующего предела не существует. Однако имеется исключение – теории поля со светоподобной некоммутативностью  $\theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = 0$ , т.е.  $\theta^{0i} = -\theta^{i0}$ , для которых свойство унитарности сохраняется. В этом случае микропричинность в смысле ETCR (9.166) нарушена. Например, если выбрать  $p_\mu = p'_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2$ ) и  $x - y \equiv z$ , то интеграл в (9.166) вычисляется

$$I = \frac{\pi}{4} \frac{\cos\left(m\sqrt{(\theta p_2)^2 - (\theta p_2 - |z_1|)^2 - (\theta\omega_p - \theta p_1 - |z_2|)^2}\right)}{\sqrt{(\theta p_2)^2 - (\theta p_2 - |z_1|)^2 - (\theta\omega_p - \theta p_1 - |z_2|)^2}}, \quad (9.167)$$

с  $\theta = \theta^{0i}$  (выбраны положительными) и для

$$\begin{aligned} 0 < \theta p_2 - |z_1| < \theta p_2, \\ 0 < \omega_p \theta - \theta p_1 - |z_2| < \sqrt{(\theta p_2)^2 - (\theta p_2 - |z_1|)^2}; \end{aligned} \quad (9.168)$$

или

$$\begin{aligned} 0 < |z_1| < \theta p_2, \\ \theta(\omega_p - p_1 - p_2) < |z_2| < \theta(\omega_p - p_1). \end{aligned} \quad (9.169)$$

В этом случае выражение (9.167) не обращается в ноль, допуская тем самым нарушение соотношения между спином и статистикой.

### 9.9.2. CPT-теорема в некоммутативной теории поля

Попытаемся расширить CPT-теорему на некоммутативные теории поля. Но прежде обсудим общие свойства антиунитарных преобразований, включающих обращение времени и CPT. Антиуни-



тарное преобразование будем обозначать через  $\square$ , как обобщение комплексного сопряжения

$$(\Psi^\square, \Phi^\square) = (\Phi, \Psi). \quad (9.170)$$

Преобразования векторов состояния соответствуют шредингеровской картине. Можно приписать то же самое преобразование операторам, соответствующим гейзенберговской картине

$$(\Psi^\square, Q\Phi^\square) = (\Phi, Q^\square\Psi). \quad (9.171)$$

Преобразование операторов удовлетворяет следующим соотношениям

$$\begin{aligned} (C_1A + C_2B)^\square &= C_1A^\square + C_2B^\square, & (\text{линейность}) \\ (AB)^\square &= B^\square A^\square, \end{aligned} \quad (9.172)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – комплексные коэффициенты.

Предположим, что

$$Q^\square = \varepsilon Q, \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (9.173)$$

и  $\Psi$  – собственное состояние  $Q$  с собственным значением  $q$

$$Q\Psi = q\Psi, \quad (9.174)$$

тогда  $\Psi^\square$  – тоже собственное состояние  $Q$

$$Q\Psi^\square = \varepsilon_q \Psi^\square \quad (9.175)$$

В дальнейшем будем использовать символ  $\square$  только для  $CPT$  преобразования. Рассмотрим, как действует  $CPT$  на локальные элементарные поля. Пусть  $\psi_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$  и  $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  – локальные элементарные поля, представляющие собой спиноры и тензоры. Тогда действие на них преобразованием  $CPT$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^\square(x) &= (i\gamma_5)_{\alpha\beta} \psi_\beta(-x), & \bar{\psi}_\alpha^\square(x) &= \bar{\psi}_\beta(-x)(i\gamma_5)_{\beta\alpha}, \\ \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^\square &= (-1)^n \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(-x). \end{aligned} \quad (9.176)$$

Этот набор преобразований полностью определяет действие  $CPT$  на спинорные и тензорные индексы. Тогда  $CPT$ -теорема для локальной теорий поля формулируется следующим образом.

Пусть  $\psi_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$  и  $\phi_{\lambda_2, \dots, \lambda_n}$  – локальные, но составные поля, представляющие собой спиноры и тензоры. Тогда они преобразуются точно также (9.176), как локальные элементарные поля.

Поясним значимость этой теоремы.

1) Рассмотрим локальные составные скалярные поля, у которых плотности свободных лагранжианов  $L_f$  и взаимодействия  $L_{\text{int}}$ , а плотность гамильтониана взаимодействия  $H_{\text{int}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} L_f^\square(x) &= L_f(-x), \quad L_{\text{int}}^\square(x) = L_{\text{int}}(-x), \\ H_{\text{int}}^\square(x) &= H_{\text{int}}(-x). \end{aligned} \quad (9.177)$$

Иногда последнее из соотношений (9.179) называют *CPT*-теоремой.

Если асимптотические условия удовлетворены, *CPT* инвариантность  $S$ -матрицы следует из соотношения

$$S^\square = S. \quad (9.178)$$

2) Пусть  $\Phi_\lambda$  – локальное составное векторное поле, тогда составное скалярное поле  $\Phi = \phi_\lambda \Phi_\lambda$  преобразуется как (9.177), а  $\phi_\lambda$  – как (9.176).

Таким образом,

$$\Phi_\lambda^\square(x) = -\Phi_\lambda(-x). \quad (9.179)$$

В качестве примера локального составного векторного поля выберем плотность заряженного тока  $j_\lambda(x)$ , тогда сохраняющийся электрический заряд  $Q$  преобразуется следующим образом

$$Q^\square = \int d^3x j_0^\square(x) = -\int d^3x j_0(-x) = -Q. \quad (9.180)$$

3) Вектор энергии-импульса  $P_A$  можно представить как пространственный интеграл от тензора энергии-импульса второго ранга. Тогда получаем

$$P_\lambda^\square = P^\lambda. \quad (9.181)$$

4) Генераторы преобразований Лоренца  $M_{\rho\sigma}$  выражаются через пространственные интегралы от тензора третьего ранга, поэтому

$$M_{\rho\sigma}^\square = -M_{\rho\sigma}. \quad (9.182)$$

Это означает, что при *CPT* преобразовании спин меняет свое направление на противоположное.

*CPT*-теорема в некоммутативной КЭД обсуждалась в работе [M. Sheikk-Jabbari, Phys. Rev. Lett. 84 (2000), 5265], где показано, что *CPT* сохраняется случайно, несмотря на то, что преобразования зарядового сопряжения и обращения времени нарушены предположением о некоммутативности. Однако в этой работе рассмотрена лишь версия некоммутативной КЭД, в которой фотон связан только с чатицами с зарядами +1, -1 и 0. Покажем, что *CPT* теорема справедлива для любой некоммутативной теории поля, описанной в предыдущем разделе.

Пусть  $H(x)$  – вейль-мойяловское произведение полевых операторов, представляющих взаимодействующий гамильтониан в некоммутативной теории поля. При этом считаем, что  $H(x)$  в представлении взаимодействия имеет вид нормального произведения. *CPT*-теорема подразумевает выполнение соотношения:

$$H_{\text{int}}^{\square}(x) = H_{\text{int}}(-x). \quad (9.183)$$

Чтобы это доказать, выберем для  $H(x)$   $n$ -линейную форму

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1, \dots, i_n} \phi_{i_1}^1(x) * \dots * \phi_{i_n}^n(x) = \\ &= e^D \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1, \dots, i_n} \phi_{i_1}^1(x_1) * \dots * \phi_{i_n}^n(x_n) \Big|_{x_1 = \dots = x_n = x}, \end{aligned} \quad (9.184)$$

где  $i_j$  с  $j = 1, \dots, n$  означают спинорные или тензорные индексы. Коэффициенты же  $f_{i_1, \dots, i_n}$  подобраны так, чтобы в локальном пределе  $H(x)$  был скаляром относительно преобразований Лоренца.  $D$  – дифференциальный оператор вида

$$D = \exp \left( \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \left( \partial_{\mu}^{x_1} \partial_{\nu}^{x_2} + \partial_{\mu}^{x_2} \partial_{\nu}^{x_3} + \dots + \partial_{\mu}^{x_{n-1}} \partial_{\nu}^{x_n} \right) \right) \quad (9.185)$$

с произвольными  $\theta^{\mu\nu}$ . Тогда *CPT* преобразование  $H(x)$ :

$$\begin{aligned}
H^\square(x) &= e^D \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1, \dots, i_n} \phi_{i_n}^{n\square}(x_n) \dots \phi_{i_1}^{1\square}(x_1) \Big|_{x_1 = \dots = x_n = x} = \\
&= e^D \sum_{i_1, \dots, i_n} f'_{i_1, \dots, i_n} \phi_{i_n}^n(-x_n) \dots \phi_{i_1}^1(-x_1) \Big|_{x_1 = \dots = x_n = x},
\end{aligned} \tag{9.186}$$

где  $f'$  определяется выражением

$$f'_{i_1, \dots, i_n} = (-1)^{F/2} f_{i_1, \dots, i_n}. \tag{9.187}$$

Величина  $F$  – число фермионных полей, содержащихся в  $H(x)$ . Если изменить порядок сомножителей на обратный и вернуться к (9.184), получим

$$\begin{aligned}
H^\square(x) &= e^D \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1, \dots, i_n} \phi_{i_1}^1(-x_1) \dots \phi_{i_n}^n(-x_n) \Big|_{x_1 = \dots = x_n = x} = \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1, \dots, i_n} \phi_{i_1}^1(-x) * \dots * \phi_{i_n}^n(-x) = H(-x).
\end{aligned} \tag{9.188}$$

Таким образом, *CPT* теорема справедлива не только в локальных теориях поля, но и в некоммутативных теориях поля.

Что касается преобразований  $C, P, T$ , то они оказываются нарушенными, и это можно обнаружить при сравнении с локальным (коммутативным) пределом рассматриваемой некоммутативной теории поля. В случае только пространственной некоммутативности ( $\theta^{0i} = 0$ ), четность некоммутативной теории поля точно такая же, как в коммутативном пределе. Действительно, преобразования  $C$  и  $T$  подразумевают комплексное сопряжение, изменяющее знак фазы в выражении (9.185).

В случае же пространственно-временной некоммутативной теории ( $\theta^{0i} \neq 0$ ) (чей коммутативный предел  $C, P, T$ -инвариантен) все эти дискретные преобразования нарушены.

## Глава 10

# ПРОВЕРКА ЛОРЕНЦ- И СРТ-ИНВАРИАНТНОСТИ В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ, АСТРОФИЗИКЕ И КОСМОЛОГИИ

---

### 10.1. Введение

Экспериментальные проверки лоренц-инвариантности становятся все более точными. Чтобы понять, насколько точными они должны быть, нужно исследовать лоренц-нарушающие члены к обычному лагранжиану. Эксперименты по проверке лоренц-инвариантности дают верхние границы на коэффициенты при этих членах. Один из способов введения лоренц-нарушающих взаимодействий – изменить коэффициент при квадрате магнитного поля в лагранжиане квантовой электродинамики:

$$\bar{B}^2 \rightarrow (1+\epsilon)\bar{B}^2. \quad (10.1)$$

Среди других эффектов, (10.1) вызывает отличие скорости света  $c$ , задаваемой соотношением  $c^2 = 1 + \epsilon$ , от максимально допустимой скорости для материальных тел. Соотношения типа (10.1) называют лоренц-нарушающими возмущениями. Это возмущение трансляционно и вращательно инвариантно в той системе отсчета, в которой мы работаем (в «предпочтительной системе»), но это не так в любой другой системе отсчета. Если рассматривать физические явления в предпочтительной системе отсчета, в которой космическое микроволновое излучение изотропно, то в лабораторной системе должна появиться анизотропия. Прецизионные спектроскопические эксперименты, не обнаружившие таких анизотропий, дают ограничение  $|1 - c^2| = |\epsilon| < 6 \cdot 10^{-22}$ . В недавней работе Коулмена и Глэшоу показано, что если  $c < 1$ , то более строгое ограничение можно получить в другом типе экспериментов. В этом случае заряженная частица, двигающаяся со скоростью, большей скорости света, интенсивно испускает фотоны. Таким образом, первичные протоны космического излучения не могут иметь энергии, боль-

шей, чем  $\frac{M}{\sqrt{1-c^2}} = M|\varepsilon|^{-1/2}$ , где  $M$  – масса протона. Поскольку пер-

вичные протоны с энергиями до  $10^{20}$  эВ, наблюдаются, можно получить ограничение  $1-c^2 < 10^{-23}$ , что почти на порядок величины более строгое ограничение, чем полученное из астрофизических данных.

Этот эффект, называемый вакуумным черенковским излучением, отсутствует при энергиях, ниже определенного значения и «резко включается» при достижении этой энергии. Однако это происходит не всегда, и рассматриваемый ниже пример подтверждает это.

Пусть  $\psi$  – набор из  $n$  комплексных скалярных полей, составляющих вектор-столбец. Если предположить инвариантность относительно группы  $U(1)$ :  $\psi \rightarrow e^{-i\lambda}\psi$ , то наиболее общий вид свободного лагранжиана этих полей:

$$L = \partial_\mu \psi^* Z \partial^\mu \psi - \bar{\psi}^* M^2 \psi, \quad (10.2)$$

где  $Z$  и  $M^2$  – положительные эрмитовы матрицы. Всегда оказывается возможным осуществить линейные преобразования полей таким образом, чтобы  $Z$  стала единичной матрицей, а  $M^2$  – диагональной. При этом возникает стандартная теория  $n$  несвязанных свободных полей. Добавим к лагранжиану лоренц-нарушающий член

$$L \rightarrow L + \partial_i \psi \delta \partial^i \psi, \quad (10.3)$$

где  $\delta$  – эрмитова матрица. Если  $\delta$  не коммутирует с  $M^2$ , то нет способа выстроить определенным способом поля. Одночастичные собственные состояния энергии-импульса переходят от собственных значений  $M^2$  при малых импульсах к собственным значениям  $\delta$  при больших импульсах. В отличие от вакуумного черенковского излучения, этот эффект, называемый смешиванием скоростей, включается постепенно.

Наиболее отчетливо эффект «постепенности» появляется в системе, минимально связанной с электромагнетизмом. В этом случае мезон может распасться на мезон меньшей массы плюс фотон со

скоростью, пропорциональной кубу энергии. Аналогичный член в стандартной модели мог бы вызывать сверхзапрещенный распад  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$  и переход  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \gamma$ .

Этот пример показывает, что «высокие энергии» в этом отношении зависят от деталей рассматриваемой системы. Предположим, для простоты,  $n = 2$  и пусть  $M^2 = \text{diag}(M_1^2, M_2^2)$ . Переход от собственных значений  $M^2$  к собственным значениям  $\delta$  происходит при энергиях  $\sim \sqrt{(M_1^2 - M_2^2)/\epsilon_{12}}$ . Для нейтральной каонной системы эта энергия на много порядков величины меньше характеристического вакуумного черенковского излучения.

Лоренц-нарушающие возмущения можно разделить на два класса в зависимости от того, являются ли они четными или нечетными относительно  $CPT$ -преобразований. Как будет показано ниже, для состояния с энергией  $E$  ожидаемые значения  $CPT$ -четных взаимодействий растут  $\sim E^2$ , а  $CPT$ -нечетные взаимодействия растут  $\sim E$ . Поскольку мы интересуемся эффектами очень слабых взаимодействий, которые могли бы быть детектируемыми при высоких энергиях, ограничимся  $CPT$ -четными взаимодействиями.

Попытаемся построить все  $CPT$ -четные лоренц-нарушающие вращательно-инвариантные возмущения для перенормируемой теории скаляров, спиноров и калибровочных бозонов. Покажем также, что матричные элементы этих взаимодействий растут с энергией быстрее, чем матричные элементы  $CPT$ -нечетных лоренц-нарушающих взаимодействий. Сначала напомним хорошо известные свойства лоренцевской группы  $SO(3,1)$ . Объединим все поля теории в один «большой» вектор  $\Phi$ . Действие  $\Lambda$  – элемента группы  $SO(3,1)$  – на эти поля осуществляется унитарным оператором  $U(\Lambda)$  в гильбертовом пространстве:

$$U(\Lambda)^+ \Phi(x) U(\Lambda) = D(\Lambda) \Phi(\Lambda^{-1}x), \quad (10.4)$$

где  $D(\Lambda)$  – некоторое конечномерное представление группы Лоренца.

Алгебра Ли группы  $SO(3,1)$  может быть записана как (комплексная) сумма двух коммутирующих операторов углового момента  $\vec{J}^{(+)}$  и  $\vec{J}^{(-)}$ . Неприводимое конечно-мерное представление группы можно обозначить двумя полуцелыми числами  $j_+$  и  $j_-$ , и его размерность  $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$ . Иногда записывают поля, формирующие базис неприводимого представления, как  $\Phi_{m_+, m_-}$ ,  $m_{\pm}$  – собственные значения  $J_z^{(\pm)}$ .

Величины  $(j_+, j_-)$  принимают значения  $(0,0)$  для скаляра;  $(0, 1/2)$  или  $(1/2, 0)$  для вейлевского спинора (в зависимости от киральности);  $(1/2, 1/2)$  – для 4-вектора;  $(1,1)$  – для симметричного тензора с нулевым следом и прямая сумма  $(1,0) \oplus (0,1)$  – для антисимметричного тензора. Комплексно-сопряженный набор полей, преобразующихся как  $(j_+, j_-)$ , преобразуется как  $(j_-, j_+)$ .

Для преобразования  $R(\vec{e}\theta)$  – вращения вокруг оси  $\vec{e}$  на угол  $\theta$  имеем:

$$D(R(\vec{e}\theta)) = \exp\left[-i\left(\vec{J}^{(+)} + \vec{J}^{(-)}\right)\vec{e}\theta\right]. \quad (10.5)$$

Для  $B(\vec{e}\phi)$  – лоренцевского сдвига в направлении  $\vec{e}$  на величину быстроты  $y$ :

$$D(B(\vec{e}\theta)) = \exp\left[\left(\vec{J}^{(+)} - \vec{J}^{(-)}\right)\vec{e}y\right]. \quad (10.6)$$

Наконец, для антиунитарного  $CPT$ -оператора  $\Omega$ :

$$\Omega^{-1}\Phi(x)\Omega = (-1)^{2j_+}\Phi^+(-x). \quad (10.7)$$

Как видно из соотношения (10.5), каждый вращательно-инвариантный член  $L'$  в лагранжиане должен принадлежать представлению, для которого  $j_+ = j_- = j$ . Элементарная теория углового момента дает вид этого члена:

$$L' \sim \sum_{m=-j}^j (-1)^m \Phi_{m,-m}. \quad (10.8)$$

Если состояние  $|\psi\rangle$  сдвинуто в  $z$ -направлении на быстроту  $y$ , то ожидаемое значение  $L'$  преобразуется следующим образом:



$$\begin{aligned} & \langle \psi | U^+ (B(\vec{e}_z y)) L'(0) U (B(\vec{e}_z y)) | \psi \rangle \sim \\ & \sim \exp(2jy) \langle \psi | \Phi_{j,-j}(0) | \psi \rangle + O(e^{(2j-2)y}). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Таким образом,  $\langle L' \rangle$  растет с энергией как  $E^{2j}$ . Как будет вскоре показано, наибольшее значение  $j$ , которое можно приписать операторам перенормируемого типа, равно  $j=1$  – симметричному тензору с нулевым следом, т.е.  $CPT$ -четной величине. Единственными вращательно-инвариантными возможностями являются  $j=1/2$  – вектор, который  $CPT$ -нечетный и  $j=0$  – лоренц-инвариантный скаляр.

Начнем рассмотрение только со скалярных полей. Без потери общности, их будем считать вещественными. Чтобы получить  $j=1$ , нам нужно иметь, по крайней мере, две операторных производных, а для перенормируемости нужно иметь не больше двух производных (и не больше двух скалярных полей). Таким образом, единственная возможность

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b} \partial_i \phi^a \epsilon_{ab} \partial^i \phi^b, \quad (10.10)$$

где  $\epsilon_{ab}$  – вещественная симметричная матрица, суммирование проводится по всем скалярным полям.

Обратимся теперь к спинорам. Будем считать фундаментальными полями набор из  $n$   $(1/2, 0)$  вейлевских спиноров  $u^a$ , сопряженные поля  $(0, 1/2)$   $u^{a+}$ . лоренц-инвариантные взаимодействия или связывают два спинора одного типа, или же связывают спинор, сопряженный спинор и производную. Наиболее общий свободный лагранжиан имеет следующий вид:

$$L = u^+ i (\partial_0 - \vec{\sigma} \vec{\partial}) Z u + \frac{1}{2} u^T \sigma_y M u + \frac{1}{2} u^+ \sigma_y M^+ u^*, \quad (10.11)$$

где  $Z$  – эрмитова  $n \times n$  матрица, а  $M$  – комплексная симметричная матрица. Всегда можно осуществить линейное преобразование, при котором  $Z$  становится единичной матрицей, а  $M$  – вещественной, положительной и диагональной. Таким образом, мы имеем свобод-

ную теорию из  $n$  частиц со спином  $1/2$ , каждая из которых совпадает со своей античастицей.

Единственный способ построения перенормируемого взаимодействия с  $j=1$  – связать вместе спинор, сопряженный спинор и производную:

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b} i \epsilon_{ab} u^{a+} \bar{\sigma} \bar{\partial} u^b, \quad (10.12)$$

где  $\epsilon_{ab}$  – эрмитова матрица.

В простом частном случае два  $(1/2, 0)$  вейлевских спинора несут противоположные заряды относительно  $U(1)$  внутренней группы симметрии. Тогда один вейлевский спинор и сопряженный спинор могут объединиться в дираковский биспинор, и наиболее общим свободным лагранжианом будет стандартный дираковский лагранжиан, а наиболее общее  $j=1$  взаимодействие будет иметь вид

$$\frac{1}{4} \bar{\psi} i \bar{\partial} \bar{\gamma} [\epsilon_+ (1 + \gamma_5) + \epsilon_- (1 - \gamma_5)] \psi, \quad (10.13)$$

где  $\epsilon_{\pm}$  – вещественные числа.

Теперь рассмотрим калибровочные бозоны. Связь калибровочных бозонов со скалярами и спинорами полностью определяется калибровочной инвариантностью, поэтому нужно обсудить только самовзаимодействие калибровочного поля. Начнем с единственного абелева калибровочного поля и выразим его в терминах электрического и магнитного поля:  $E^i = F^{0i}$ ,  $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$ . Из этих величин можно создать три независимых вращательных инварианта перенормируемого типа:  $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ ,  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  и  $\vec{B}^2$ . Отметим, что первые два обладают лоренц-инвариантностью.

Как известно, локально калибровочная группа является произведением простых и абелевых факторов. Калибровочная инвариантность подавляет перекрестные члены между калибровочными полями, относящимися к различным простым факторам. Поэтому для каждого простого фактора имеем одно взаимодействие вида

$\sum_a \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a$ , где суммирование производится по генераторам одного

фактора. Для абелевых факторов имеются перекрестные члены, но их можно исключить ортогональным преобразованием абелевых генераторов, т. е. опять получаем по одному  $B^2$  члену на каждый фактор.

В качестве примера построим  $j=1$  взаимодействия в стандартной модели с тремя поколениями кварков и лептонов. Имеется несколько членов в бозонном секторе модели: один  $\vec{B}^2$  для каждого фактора калибровочной группы и один член, смешивающий скорости для хиггсовского дублета. Таким образом, всего четыре вещественных параметра.

Число параметров гораздо больше в фермионном секторе модели. Каждое семейство спинорных полей преобразуется как прямая сумма пяти неэквивалентных неприводимых представлений калибровочной группы  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Калибровочная инвариантность исключает перекрестные члены между различными неприводимыми представлениями, но не между семействами. Таким образом, имеется пять  $3 \times 3$  эрмитовых матриц, смешивающих скорости типа (10.12), и дополнительно 45 вещественных параметров.

Небольшого сокращения числа параметров можно достичь за счет переопределения полей. Можно изменить масштаб пространственных координат, оставив временную координату неизменной, т.е. исключить один из  $\vec{B}^2$ -членов. Заметим, что минимальная стандартная модель сохраняет каждый лептонный аромат. Поэтому можно домножить лептонные поля на фазовый фактор, зависящий только от аромата, и добиться, чтобы два недиагональных элемента в одной из лептонных матриц, смешивающих скорости, оказались вещественными. При этом лоренц-инвариантность лагранжиана сохраняется.

Таким образом, стандартная модель содержит  $4 + 45 - 3 = 46$  независимых лоренц-нарушающих (но *CPT*-сохраняющих) параметров.

При нашем построении мы использовали калибровочную инвариантность, но это была калибровочная инвариантность классиче-

ского лагранжиана. Останется ли калибровочная инвариантность в квантовой теории? Иначе говоря, известно, что аномалии сокращаются в стандартной модели, но сокращаются ли они в присутствии 46 неинвариантных членов? Покажем, что это действительно так. Будем основываться на классическом анализе аномалий в лоренц-инвариантных неабелевых калибровочных теориях. На этом пути следует показать, что теория свободна от аномалий (во всех порядках теории возмущений), если соответствующая теория безмассовых спиноров, связанная с внешними  $C$ -числовыми калибровочными теориями, свободна от аномалий. Если свести все спинорные поля к вектор-столбцу  $u$ , то лагранжиан такой теории запишется в виде:

$$iu^+ (D_0 - \vec{\sigma} \vec{D}) u, \quad (10.14)$$

где ковариантная производная  $D_\mu$  определена как  $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ ,  $A_\mu$  – матричное поле, состоящее из калибровочных полей с ассоциированными с ними матрицами связей. Если обычным образом определить калибровочное преобразование полей:

$$\delta u = \delta \omega u; \quad \delta A_\mu = [\delta \omega, A_\mu] - \partial_\mu \delta \omega, \quad (10.15)$$

где  $\delta \omega$  – бесконечномалое калибровочное преобразование, то теория с лагранжианом (10.14) может оказаться калибровочно-инвариантной. Однако это не всегда так. Вычисление регуляризованного производящего функционала  $W(A)$  связанных функций Грина дает:

$$\delta W = -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \delta \omega F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}, \quad (10.16)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ . Только если выражение (10.16) обращается в ноль (аномалия), теория действительно калибровочно-инвариантна. Проекционные операторы на неприводимые представления калибровочной группы коммутируют с  $\delta \omega$  и  $F_{\mu\nu}$ , т. е. удобный способ вычислить след – просуммировать вклады по неприводимым мультиплетам. В стандартной модели такая сумма обращается в ноль. Мы хотели бы расширить теорию, включив ло-

ренц-нарушающее взаимодействие (10.12), т. е. заменить (10.14) на следующее выражение:

$$iu^+ \left( D^0 - \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \right) \vec{\sigma} \vec{D} \right) u, \quad (10.17)$$

где  $\alpha$  – эрмитова матрица, действующая только на индексы ароматов. Эта замена изменяет поведение спинорного пропагатора при больших импульсах, поэтому нужно изменить процедуру регуляризации. Если в качестве регуляторов используются массивные поля, члены с производными в лагранжиане должны иметь вид (10.17), а не (10.14).

Нам нужно просуммировать по неприводимым мультиплетам, которые можно выбрать собственными пространствами  $\alpha$ . В каждом собственном пространстве лагранжиан будет иметь вид (10.17), где  $\alpha$  – число. Введем новые переменные (обозначенные штрихами):

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \right) \vec{x}', & x_0 &= x'_0; \\ \vec{A}' &= \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \right) \vec{A}, & A'_0 &= A_0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

В этих переменных член с  $\alpha$  исчезает из лагранжиана (а также из процедуры регуляризации). Вклад каждого мультиплета в аномалию тот же самый, как и при нулевых  $\epsilon$ , за исключением нештрихованных переменных, замененных на штрихованные. Эта замена не влияет на (10.16), поскольку это выражение инвариантно относительно общих координатных преобразований. Таким образом, вклады неприводимых мультиплетов не зависят от  $\alpha$ . Если они сокращаются при нулевых  $\alpha$ , то они сокращаются и для других  $\alpha$ .

Свойства частиц, соответствующих свободным полям, тривиально следуют из лагранжиана. Ситуация труднее со взаимодействующими полями. Для простоты обсудим связь энергии и импульса для одного вещественного скалярного поля с ренормированной массой  $m$ . Если теория лоренц-инвариантна, то обратный ренормированный пропагатор имеет следующий вид

$$-iD^{-1} = (p^2 - m^2) A(p^2) \quad (10.19)$$

для некоторой функции  $A$ . Считаем, что поля нормированы так, что  $A(m^2)=1$ . Добавим теперь в теорию лоренц-нарушающее взаимодействие с некоторым малым коэффициентом  $\varepsilon$ , как в выражении (10.10). Начнем с линейного приближения, оставив члены только первого порядка по  $\varepsilon$ . Позже будет обсуждаться оправданность этого приближения. Добавка к  $D^{-1}$  должна преобразовываться как 00-компонента симметричного тензора с нулевым следом. Единственная возможность – умножение на  $4p^0p^0 - g^{00}p^2 = 4\vec{p}^2 + 3p^2$ . Член с  $p^2$  можно отнести к  $A$ , поэтому соотношение (10.19) принимает вид:

$$-iD^{-1} = (p^2 - m^2)A(p^2) + \varepsilon\vec{p}^2B(p^2), \quad (10.20)$$

где  $B$  – некоторая функция. Удобно нормировать лоренц-нарушающее взаимодействие так, чтобы  $B(m^2)=1$ . В первом порядке по  $\varepsilon$  сдвиг нулей  $D^{-1}$  составляет:

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 + \varepsilon\vec{p}^2. \quad (10.21)$$

Соотношение между энергией и импульсом можно переписать в более привычной форме  $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ , где  $c$  – максимально допустимая скорость и  $mc^2$  – энергия покоя частицы. Напомним, что  $c^2$  была изменена на фактор  $1+\varepsilon$ , а  $m^2$  – подавлена фактором  $(1+\varepsilon)^2$ . Конечно, очень малый сдвиг массы не представляет экспериментального интереса, но это не так для сдвига в  $c^2$ , как это обсуждалось выше. Резкие эффекты «включаются», когда безразмерный параметр  $\varepsilon \frac{\vec{p}^2}{m^2}$  становится порядка единицы. Постепенные же эффекты (как  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ ) и энергии, им соответствующие, могут быть на много порядков меньше.

Даже для «постепенных» эффектов  $E$  очень большая, и резонно спросить, не изменит ли новая лоренц-инвариантная физика наших предсказаний при высоких энергиях? Соотношение (10.21) показы-

вает, что это не так. Даже для больших  $E$   $p^2$  остается  $O(m^2)$ , и возможная «новая физика» несущественна.

В каких пределах можно доверять линейному приближению? Определенно можно доверять в свободной теории, где оно точное. Ему можно доверять в случае лептонов и электрослабых калибровочных бозонов. Для этих частиц все константы связи – малые, радиационные поправки также малы, а все пропагаторы близки к пропагаторам свободной теории поля.

Сложнее обстоит дело с адронами. Детальное исследование КХД с лоренц-инвариантными членами здесь не рассматривается, но мы приведем один простой пример, несколько проясняющий ситуацию. Выберем лагранжиан КХД и переопределим пространственные координаты (как в (10.18)), но оставим неизменной временную координату. В новых координатах, казалось бы, мы должны получить неинвариантную теорию, но на самом деле единственное, что происходит –  $p^2$  в соотношении (10.19) заменяется на  $p^2 - \epsilon \vec{p}^2$ . Таким образом, разложение по степеням  $\epsilon$  фактически является разложением по степеням  $\epsilon \vec{p}^2 / \Lambda^2$ ,  $\Lambda$  – массовый масштаб КХД. Поскольку типичные адронные массы  $\sim O(\Lambda)$ , то для «постепенных» эффектов линейное приближение – очень хорошее, для «резких» же эффектов – довольно грубое.

Перейдем теперь к конкретным проявлениям нарушения лоренц-инвариантности.

## **10.2. Кинематика распадов частиц в лоренц-неинвариантных теориях**

Проанализируем распад частиц на  $n$  других частиц в лоренц-неинвариантных теориях. Сделаем три упрощающих предположения: 1) все частицы – бесспиновые. Обобщение на спин 1/2 очевидно, и оно не влияет на обсуждение; 2) справедливо линейное приближение; 3) матричными элементами нарушающего инвариантность возмущения между двумя частицами с разными массами можно пренебречь.

Таким образом, мы имеем набор частиц, каждая из которых удовлетворяет соотношению между энергией и импульсом типа (10.21). Иначе говоря,  $a$ -я частица имеет, помимо собственно массы  $m_a$ , свою собственную максимально достижимую скорость («собственную скорость света»)  $c_a$  и удовлетворяет соотношению:

$$E_a^2 = \vec{p}_a^2 c_a^2 + m_a^2 c_a^4. \quad (10.22)$$

Будем относить значение  $a=0$  к распадающейся частице,  $a=1, \dots, n$  – к продуктам распада. Распад будет кинематически допустимым, если распадные частицы будут иметь полный импульс  $\vec{p}_0$ , а полную энергию  $-E_0$ . Пусть  $E_{\min}(\vec{p}_0)$  – минимальная полная энергия продуктов распада для заданного полного импульса  $\vec{p}_0$ . Распад возможен, если

$$E_0 \geq E_{\min}(\vec{p}_0), \quad (10.23)$$

поскольку при  $E_{\min} < E_0$  можно получить равенство, добавив противоположные поперечные компоненты для двух импульсов в распаде. Если исключить поперечные компоненты всех распадных импульсов, то мы понизим энергию конечного состояния без изменения полного импульса. Таким образом, в конфигурации с минимальной полной энергией все импульсы коллинеарны. Мы используем этот факт для упрощения анализа и заменим  $\vec{p}_a$  на  $p_a$  – продольную (отличную от нуля) компоненту  $\vec{p}_a$ .

$E_{\min}$  не должна изменяться при вариации распадных импульсов, оставляющей их сумму неизменной. Вводя множитель лагранжиана  $u$ , мы должны добиться того, чтобы выражение

$$\sum E_a - u(\sum p_a - p_0) \quad (10.24)$$

было стационарным (суммируется по всем продуктам распада). Дифференцируя (10.24) по  $p_a$ , находим

$$u = \frac{dE_a}{dp_a} = v_a, \quad (10.25)$$

где  $v_a$  – скорость  $a$ -й частицы. Таким образом, все частицы движутся с общей скоростью  $u$ . Кроме того, соотношение



$$dE_{\min} = u \sum dp_a = u dp_0 \quad (10.26)$$

показывает, что  $u = \frac{dE_{\min}}{dp_0}$ .

Рассмотрим теперь пределы малых и больших  $p_0$ . Для  $p_0 = 0$  конфигурация с минимальной энергией соответствует случаю, когда все распадные импульсы равны нулю. Распад допустим тогда (и только тогда), когда

$$m_0 c_0^2 \geq \sum m_a c_a^2. \quad (10.27)$$

Конечно, физика «почти» лоренц-инвариантна, т. е.  $c_a$  могут отличаться очень мало.

Для очень большого  $p_0$   $u$  должна быть ультрарелятивистской, т. е. можно аппроксимировать  $E_a$  как  $c_a p_a$ . Энергия будет минимальной, если приписать импульсам частицы наименьшее  $c$ . В этом пределе распад допустим, если

$$c_0 > \min_{a \neq 0} c_a \quad (10.28)$$

и подавлен, если  $c_0 < \min c_a$ .

Уравнения (10.27) и (10.28) являются независимыми. Распад при высоких энергиях допустим или подавлен независимо от того, допустим или подавлен он при низких энергиях. Что может происходить при промежуточных энергиях?

Начнем отвечать на этот вопрос сначала в предположении, что все продукты распада имеют ненулевые массы, а затем включим в анализ и безмассовые частицы. Перепишем условие для допустимости распада  $E_0 \geq E_{\min}$ :

$$m_0^2 c_0^4 \geq E_{\min}^2(p_0) - c_0^2 p_0^2 \equiv Y(p_0). \quad (10.29)$$

Нужно доказать, что каждая стационарная точка  $Y$  является локальным минимумом. Дифференцирование (10.29) дает:

$$\frac{1}{2} \frac{dY}{dp_0} = E_{\min} u - c_0^2 p_0 = \sum (c_a^2 - c_0^2) p_a, \quad (10.30)$$

где на последнем шаге использовано соотношение  $E_a = c_a^2 p_a / u$ . Производная обращается в ноль в стационарной точке, поэтому, по крайней мере, один член суммы должен быть отрицательным,

$c_0 > \min_{a \neq 0} c_a$ . Заметим, что это условие совпадает с (10.28) – условием

допустимости распада при высокой энергии.

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d^2 p_0} = \frac{du}{dp_0} \sum (c_a^2 - c_0^2) \frac{dp_a}{du} = \frac{du}{dp_0} \sum (c_a^2 - c_0^2) \frac{p_a c_a^2}{u(c_a^2 - u^2)}. \quad (10.31)$$

В стационарной точке можно использовать (10.30) и переписать вторую производную в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d^2 p_0} &= \frac{du}{dp_0} \sum (c_a^2 - c_0^2) \frac{p_a}{u} \left[ \frac{c_a^2}{c_a^2 - u^2} - \frac{c_0^2}{c_0^2 - u^2} \right] = \\ &= -u \frac{du}{dp_0} \sum \frac{p_a (c_a^2 - c_0^2)^2}{(c_a^2 - u^2)(c_0^2 - u^2)}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Если  $p_0$  монотонно возрастает от нуля до бесконечности,  $u$  монотонно возрастает от нуля до  $\min c_a$ . Таким образом,  $\frac{du}{dp_0}$  – положительна, как и факторы  $(c_a^2 - u^2)$  и  $(c_0^2 - u^2)$ . Этим и заканчивается доказательство.

Поскольку каждая стационарная точка  $Y$  является локальным максимумом,  $Y$  может иметь, по крайней мере, одну стационарную точку. Если  $Y$  не имеет стационарных точек, она будет монотонной функцией  $p_0$  и может пересечь  $m_0^2 c_0^4$  по крайней мере один раз. Это приводит к следующим четырем возможностям: 1) распад допустим при всех энергиях; 2) распад подавлен при всех энергиях; 3) распад допустим при всех энергиях, ниже определенной энергии и подавлен при больших энергиях; 4) распад подавлен для всех энергий, ниже определенной энергии, и допустим при больших энергиях.

Если  $Y$  имеет одну стационарную точку, то пересечение с  $m_0^2 c^4$  может происходить дважды – в первом случае снизу, и во втором случае – сверху. Это добавляет еще одну возможность: 5) распад подавлен для определенной полосы энергий, но разрешен для всех энергий выше и ниже этой полосы. Других возможностей нет.

Приведенные выше аргументы нарушаются, если среди продуктов распада есть безмассовые частицы. Например, нельзя записать энергию и импульс как функцию скорости. Покажем, однако, что и в этом случае заключения остаются неизменными.

Если среди продуктов распада имеется более чем одна безмассовая частица, то можно понизить  $E_{\min}$ , придавая всем импульсам, переносимым безмассовыми частицами, значения, соответствующие минимальным  $c$ . Поэтому без потери общности ограничимся случаем, когда имеется только одна безмассовая частица, которой припишем значение  $a = 1$ .

Рассмотрим конфигурацию с фиксированным  $p_1$ , а оставшиеся импульсы  $p_0 - p_1$  распределены среди массивных частиц так, чтобы минимизировать их полную энергию. Полная энергия этой конфигурации:

$$E = c_1 p_1 + E'_{\min}(p_0 - p_1), \quad (10.33)$$

где  $E'_{\min}$  – минимальная энергия массивных частиц. Тогда

$$\frac{dE}{dp_1} = c_1 - u'(p_0 - p_1), \quad (10.34)$$

где  $u'$  – общая скорость массивных частиц, это монотонно возрастающая функция их полного импульса. Можно выделить два случая: 1)  $u'(p_0) < c_1$ , т. е.  $E$  – монотонно возрастающая функция  $p_1$  и  $E_{\min} = E'_{\min}(p_0)$ . Безмассовая частица не несет импульса, поэтому анализ точно такой же, как и в массивном случае; 2)  $u'(p_0) > c_1$ . Это возможно, если

$$c_1 < \min_{a \neq 1} c_a, \quad (10.35)$$

иначе  $u'$  не может достигать  $c_1$ . В этом случае при возрастании  $p_1$  понижается  $E$  до тех пор, пока  $u'$  не достигает  $c_1$ . При этом

$$E_{\min} = c_1(p_0 - p'_0) + E'_{\min}(p'_0), \quad (10.36)$$

где  $p'_0$  определяется соотношением  $u'(p'_0) = c_1$ . Этот анализ производится так же, как и в массивном случае, однако возникает отличие при вычислении  $\frac{d^2 Y}{d^2 p_0}$ .

Так как  $p_1$  зависит только от  $p_0$ , то

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d^2 p_0} = (c_1^2 - c_0^2) \frac{dp_1}{dp_0} = (c_1^2 - c_0^2) c_1 < 0, \quad (10.37)$$

согласно соотношениям (10.28) и (10.35). Как и в случае массивных распадных продуктов, каждая стационарная точка  $Y$  является локальным максимумом.

Исследуем теперь эффекты *CPT*-сохраняющих отклонений от лоренц-инвариантности в поведении ультрарелятивистских частиц.

### 10.3. Проверка лоренц-инвариантность и условие стабильности фотона

Предположим, что скорость света превышает максимально допустимую (МД) скорость электронов:  $c_\gamma > c_e$ . Как показано Coleman и Glashow, фотоны определенной энергии оказываются нестабильными. В частности, распад

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^- \quad (10.38)$$

становится допустимым, когда энергия фотона превышает значение  $2m_e/\sqrt{\delta_{\gamma e}}$ , где  $\delta_{\gamma e} \equiv c_\gamma^2 - c_e^2$ . Скорость распада фотонов выше

этого порога составляет  $\Gamma_{ee} \approx \frac{1}{2} \alpha \delta_{\gamma e} E$ . Поскольку фотоны в космических лучах присутствуют вплоть до энергий в 20 ТэВ, получаем ограничение  $c_\gamma - c_e < 10^{-15}$ . Более строгие ограничения на нарушение лоренц-инвариантности можно было бы получить из стабильности фотона по отношению к распаду на два нейтрино. В этом процессе пороговая энергия зависит от массы нейтрино. Эта мода распада подавлена в стандартной модели, в которой нейтрино не обладают ни массой, ни магнитными моментами. Однако обнаруженные экспериментально нейтринные осцилляции свидетельствуют о наличии у нейтрино масс. Физика вне стандартной модели, «ответственная» за нейтринные массы, могла бы за счет петлевых вкладов формировать магнитные моменты нейтрино и сделать воз-

можными распады  $\gamma \rightarrow \nu + \nu'$  и  $\gamma \rightarrow \bar{\nu} + \bar{\nu}'$  ( $\nu$  и  $\nu'$  – нейтрино с различной киральностью).

Скорость распада фотона с энергией  $E$ , превышающей порог,  $\Gamma_{\nu\nu'} \approx \lambda^2 \mu_B^2 \delta_{\gamma e}^2 E^3$ , где магнитный момент нейтрино  $-\lambda \mu_B$ , причем  $\mu_B = \frac{e}{2m_e}$  (магнетон Бора). Предположим, что  $c_\nu = c_{\nu'}$  и  $\delta_{\gamma\nu} = c_\gamma^2 - c_\nu^2$ . Поскольку магнитное взаимодействие имеет размерность пять (а не четыре, как электрическое),  $\Gamma_{\nu\nu'}$  – квадратично по  $\delta_{\gamma\nu}$ . Отсюда получаем, что даже для экспериментального верхнего предела на магнитный момент нейтрино  $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ , интервал энергий фотонов – космологический, и никаких строгих ограничений на величину  $c_\gamma - c_\nu$  получить не удастся.

#### 10.4. Проверка лоренц-инвариантности в радиационных распадах мюона

Распадная мода  $\mu \rightarrow e + \gamma$  часто исследуется экспериментально, но пока не наблюдалась. Это и не удивительно: она подавлена в минимальной стандартной модели. Однако лоренц-нарушающие возмущения, которые недиагональны по ароматам, могли повысить симметрию, обычно препятствующую радиационному распаду.

Напомним, что при низких энергиях скорость собственных состояний лептонов высоких энергий, вообще говоря, не совпадает со скоростью их собственных массовых состояний. Для простоты в последующем рассмотрении пренебрежем возможным смешиванием электронов и мюонов с  $\tau$ -лептоном. Соответствующая часть лагранжиана в выделенной системе отсчета имеет вид:

$$(\bar{\mu}\bar{e})\bar{\gamma}(\vec{p}-e\vec{A})\left\{c_R\frac{1}{2}(1+\gamma_5)+c_L\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\right\}\begin{pmatrix}\mu\\e\end{pmatrix}, \quad (10.39)$$

где  $\mu$  и  $e$  – поля, которые соответствуют собственным массовым состояниям. Матрицы  $c_L$ ,  $c_R$  можно выразить через угол смеси-

вания  $\theta_\alpha$  (они были бы единичными матрицами, если бы лоренц-симметрия не была нарушена):

$$c_a \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\bar{c}_a + \delta c_a \cos 2\theta_a & \delta c_a \sin 2\theta_a \\ \delta c_a \sin 2\theta_a & 2\bar{c}_a - \delta c_a \cos 2\theta_a \end{pmatrix}, \quad (10.40)$$

где  $a = L, R$ . Угол смешивания  $\theta_L$  определяет скорость собственных состояний левых лептонов (или правых антилептонов), чьи максимально допустимые скорости  $\bar{c}_L \pm \frac{1}{2}\delta c_L$ . Аналогично,  $\theta_R$  определяет скорости собственных состояний правых лептонов (или левых антилептонов), чьи МД отличаются на  $\delta c_R$ . Все четыре максимальные скорости очень близки к  $c_\gamma$  – скорости света в вакууме.

Электрослабая калибровочная инвариантность подразумевает, что матрица  $c_L$  входит в кинетическую энергию, как нейтрино, так и заряженных лептонов.

Для последующего анализа удобно определить малые параметры:

$$\varepsilon_a^2 \equiv |\delta c_a \sin 2\theta_a|^2, \quad a = L, R. \quad (10.41)$$

Слагаемое в (10.39), изменяющее аромат:

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_R + \varepsilon_L)\bar{\mu}\bar{\gamma}(\vec{p} - e\vec{A})e + \frac{1}{2}(\varepsilon_R - \varepsilon_L)\bar{\mu}\bar{\gamma}(\vec{p} - e\vec{A})\gamma_5 e + \text{э.с.} \quad (10.42)$$

вызывает распад  $\mu \rightarrow e + \gamma$ . Как будет видно, зависящая от спиральности скорость распада  $\sim \alpha \varepsilon_a^2 M \gamma^3$ , где  $M$  – масса мюона,  $\gamma$  – лоренц-фактор в выделенной системе отсчета. Эта скорость распада растет как куб энергии мюона. Таким образом, лоренц-нарушения с изменением аромата при достаточно больших энергиях мюона могут вызывать распад  $\mu \rightarrow e + \gamma$ . Скорость радиационного распада мюона определяется энергией мюона и величиной лоренц-нарушающих параметров. С другой стороны, это электромагнитный эффект первого порядка, а не слабый распад. Его брэнчинг  $B \sim \alpha \varepsilon_a^2 \gamma^4 M \tau_0$ , где  $\tau_0$  – время жизни покоящегося мюона.

Отклонения от лоренц-инвариантности также модифицируют скорости распадов  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ ,  $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ , но это процессы сла-

бого взаимодействия. Они не включают огромный фактор усиления  $\alpha M\tau_0 \simeq 2.6 \cdot 10^{15}$ , который появляется в бренчинге для радиационного распада мюона. В этом-то и состоит причина, почему для исследования лоренц-инвариантности и поиска аномалий во времени жизни мюонов используются сверхвысокие энергии.

Взаимодействие (10.42) определяет скорость радиационного распада мюона в первом порядке. Учет следующих порядков приводит к следующему выражению для бренчинга покоящегося мюона:

$$B = \frac{\alpha M\tau_0}{4} (\varepsilon_L^2 + \varepsilon_R^2) \simeq 6.4 \cdot 10^{14} (\varepsilon_L^2 + \varepsilon_R^2). \quad (10.43)$$

Имеющееся экспериментальное ограничение  $B < 4.9 \cdot 10^{-11}$  дает возможность получить верхний предел на лоренц-нарушающий параметр:

$$\varepsilon_L^2 + \varepsilon_R^2 < 8 \cdot 10^{-26} \quad (10.44)$$

для покоящегося мюона.

Бренчинг лоренц-нарушающего радиационного распада мюона – быстро растущая функция энергии. Прямое исследование вряд ли возможно. Тем не менее, можно попытаться детектировать эту моду по ее влиянию на время жизни мюона, которое для ультрарелятивистских левых  $\mu^-$  (или правых  $\mu^+$ ):

$$\tau_L(\gamma) = \frac{\gamma\tau_0}{1 + b_L\gamma^4}, \quad b_L = \frac{\alpha M\tau_0}{30} (68\varepsilon_R^2 + \varepsilon_L^2), \quad (10.45)$$

а для ультрарелятивистских правых  $\mu^-$  (или левых  $\mu^+$ ):

$$\tau_R(\gamma) = \frac{\gamma\tau_0}{1 + b_R\gamma^4}, \quad b_R = \frac{\alpha M\tau_0}{30} (68\varepsilon_L^2 + \varepsilon_R^2). \quad (10.46)$$

При достаточно высокой энергии время жизни мюонов любой спиральности уменьшается как  $\sim \gamma^{-3}$ , а не растет  $\sim \gamma$ . Эксперимент по измерению соотношения  $(g-2)$ , проведенный в ЦЕРН, помимо измерения аномального магнитного момента мюона, способен исследовать зависимость от энергии его времени жизни. Этот эксперимент дает ограничение на

$$\epsilon_L^2 + \epsilon_R^2 < 5 \cdot 10^{-25}. \quad (10.47)$$

Космические мюоны наиболее высоких энергий возникают от распадов вторичных пионов. Эти мюоны – практически продольно поляризованные  $\mu_R^-$  и  $\mu_L^+$ . Поэтому поиски аномалий во времени жизни этих мюонов могут дать ограничение на  $b_R$ , который, в свою очередь, пропорционален линейной комбинации  $68\epsilon_L^2 + \epsilon_R^2$ . Хотя  $\epsilon_L$  можно ограничить из данных по нейтринным осцилляциям, возможно, что  $\epsilon_R \gg \epsilon_L$ . Отсутствие а priori знаний об отношении  $\epsilon_L/\epsilon_R$  дает для  $b_R + b_L$  более слабое ограничение, чем для  $b_R$ .

## 10.5. Лоренц-нарушающие нейтринные осцилляции

В работе [Coleman, Glashow, Phys. Lett. **В** 405 (1997), 249] показано, как *CPT*-сохраняющие, но лоренц-нарушающие возмущения приводят к нейтринным осцилляциям, даже если нейтрино безмассовые. Наблюдаемые экспериментально нейтринные осцилляции могут быть комбинацией эффектов массивности нейтрино и лоренц-нарушения.

Нейтрино – ультрарелятивистские частицы, поскольку масса нейтрино очень мала. Поэтому поиск нейтринных осцилляций можно рассматривать как тест на лоренц-инвариантность. Будем считать, что существует три киральных нейтрино с майорановскими массами, задаваемые комплексной симметричной матрицей  $m$  в диагональном базисе ароматов. Обычные нейтринные осцилляции описываются в терминах квадрата эрмитовой массовой матрицы  $m^2 = mm^+$ . В частности, наблюдаемые эффекты осцилляций зависят от двух разностей квадратов масс и четырех параметров – углов матрицы Кобаяши–Маскава и фазы в кварковом секторе. При учете нарушения лоренцевской симметрии описание нейтринных осцилляций становится гораздо сложнее. В дополнение к обычному слагаемому, описывающему смешивание скоростей и параметризуемому матрицей  $C$  –  $3 \times 3$  эрмитовой матрицей максимально достижимых скоростей, введем наиболее общее *CPT*-нечетное взаимодействие типа  $u^+bu$ , где  $b$  – тоже  $3 \times 3$  эрмитова матрица. Энергии



ультрарелятивистских нейтрино с определенным импульсом  $p$  являются собственными значениями матрицы:

$$Cp + \frac{m^2}{2p} + b. \quad (10.48)$$

Собственные состояния нейтрино в пределе высоких энергий являются собственными векторами матрицы  $C$ , а при низких энергиях – собственными векторами матрицы  $m^2$ .

Чтобы избежать чрезмерной сложности обозначений, ограничимся осцилляциями двух сортов нейтрино. Представим себе нейтрино, рожденное с определенным импульсом и сортом ( $\nu_l$ , где  $l = e$  или  $\mu$ ) и детектируемое после прохождения в пустом пространстве расстояния  $R$ . Осцилляции описываются обычной формулой:

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_l) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left\{ \frac{\Delta R}{4} \right\}, \quad (10.49)$$

где угол смешивания  $\theta$  и фазовый фактор  $\Delta$ , выраженные в базисе ароматов, задаются в терминах восьми независимых параметров:

$$\Delta \sin 2\theta = \delta m^2 \sin 2\theta_m / E + 2\delta b e^{i\eta} \sin 2\theta_b + 2\delta c e^{i\eta'} E \sin 2\theta_c; \quad (10.50)$$

$$\Delta \cos 2\theta = \delta m^2 \cos 2\theta_m / E + 2\delta b \cos 2\theta_b + 2\delta c E \cos 2\theta_c.$$

Параметрами, характеризующими осцилляции, являются: три угла смешивания  $\theta_m$ ,  $\theta_b$  и  $\theta_c$ ; две комплексные фазы  $\eta$  и  $\eta'$  и разности между собственными значениями  $b$  и  $c$  матрицы  $m^2$ , обозначенные через  $\delta m^2$ ,  $\delta b$  и  $\delta c$ . Чтобы проиллюстрировать возможности, заложенные в выражениях (10.49) и (10.50), отметим несколько специальных случаев лоренц-нарушающих осцилляций двух сортов нейтрино:

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_l) = 1 - \frac{\sin^2 \left\{ (\delta m^2 R / 4E) \sqrt{1 + (E/E_0)^2} \right\}}{1 + (E/E_0)^4} \quad (10.51)$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 \left\{ (\delta \nu R E / 2) \sqrt{1 + (E/E_0)^2} \right\}}{1 + (E_0/E)^4} \quad (10.52)$$

$$= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left\{ R \left( \delta m^2 / 4E + \delta b / 2 + \delta c E / 2 \right) \right\}, \quad (10.53)$$

где  $E_0 \equiv \delta m^2 / (2\delta c)$ . Соотношение (10.51) соответствует  $\theta_m = \frac{\pi}{4}$  и  $\delta b = \sin 2\theta_c = 0$ . Оно дает максимальные массовые осцилляции для  $E \ll E_0$ . Выражение (10.52) отвечает случаю  $\theta_c = \frac{\pi}{4}$ ,  $\delta b = \sin 2\theta_m = 0$  и максимальным осцилляциям скорости при высокой энергии.

Чтобы получить выражение (10.53), мы положим, что все три угла смешивания одинаковы и  $\eta = \eta' = 0$ . В этом случае собственные состояния энергии-импульса не зависят от энергии.

Обычные нейтринные осцилляции зависят только от отношения  $R/E$  – пролетной длины и энергии нейтрино. Если лоренц-инвариантность нарушена, то зависимость от этих параметров становится более сложной. Тем не менее, нейтринные эксперименты, проводимые при различных энергиях, могут дать ограничения на лоренц-нарушающие параметры. Приведем один пример, связанный с ускорительными поисками  $\nu_\mu - \nu_e$  осцилляций. Современное ограничение на  $\delta m^2 < 0.09 \text{ (эВ)}^2$  получено из экспериментальных данных при низких энергиях. Эксперименты при высоких энергиях дают менее строгие ограничения на  $\delta m^2$ , но они более приспособлены для поиска лоренц-нарушающих осцилляций скорости. Из экспериментальных данных (в предположении о  $\sin^2 \theta_m \sim 1$ ) получаем для разности максимальных скоростей двух собственных состояний:

$$|c' - c|_{\nu_e \nu_\mu} < 6 \cdot 10^{-22}. \quad (10.54)$$

## 10.6. Лоренц-нарушающие явления, включающие адроны

Для каждого сорта частиц, как было предположено, существует максимально достижимая скорость  $c_a$ . Дисперсионное соотношение

ние вида  $E^2 = c_a^2 p^2 + m_a^2 c_a^4$  описывает частицу типа  $a$ , свободно движущуюся в выделенной системе отсчета. Множество лоренц-нарушающих (но  $CPT$ -сохраняющих) явлений может быть описано в чисто кинематических терминах. Например, пренебрегается зависимостью от спиральности, хотя спиральность может быть достаточно просто учтена. Эффекты, связанные с изменением аромата, несущественны для рассмотрения эффектов, обсуждаемых ниже, поэтому ими пренебрегается.

### 10.6.1. Нейтральные каонные системы

Лоренц-нарушающие эффекты могут быть как резкими, так и постепенными. Выше уже обсуждалось внезапное появление черенковского излучения у протонов высокой энергии и зависящего от энергии поведения нейтральных каонов. Рассмотрим специальный случай, когда скоростные и массовые собственные состояния нейтральных каонов совпадают и при этом максимально допустимые скорости  $K_L$  и  $K_S$  неодинаковые:  $c_{K_L} - c_{K_S} \neq 0$ . Это приводит к энергетической зависимости их разности масс, определяемой по зависящим от времени интерференционным явлениям:

$$\Delta M = \Delta M|_{\text{покой}} + M\beta\gamma^2(c_{K_L} - c_{K_S}), \quad (10.55)$$

где  $\gamma$  и  $\beta$  – лоренц-фактор и скорость распадающихся каонов. Из анализа экспериментальных данных

$$|c_{K_L} - c_{K_S}| < 3 \cdot 10^{-21}. \quad (10.56)$$

### 10.6.2. Стабильные нейтральные пионы?

Обратимся теперь к резким явлениям. Простой пример включает нейтральные пионы и фотоны. Предположим, что  $c_\gamma - c_{\pi^0} > 0$ . Тогда процесс  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  становится кинематически подавленным для пионов, чьи энергии превышают значения  $E = m_\pi / \sqrt{c_\gamma^2 - c_\pi^2}$ . Соответственно, фотоны с энергией, превышающей это значение, спо-

способны распадаться  $\gamma \rightarrow \gamma + \pi^0$ . Этот пример, как оказывается, не чисто академический. Предположим, например,

$$c_\gamma - c_{\pi^0} = c_\gamma - c_e = c_\gamma - c_{\pi^0} = 10^{-22}. \quad (10.57)$$

В этом случае все моды распада  $\pi^0$  кинематически подавлены, если его энергии превышают  $10^{19}$  эВ. Таким образом, первичные космические лучи сверхвысоких энергий могут содержать пионы, а не фотоны.

### 10.6.3. Стабильный нейтрон?

Обычно распад нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  допустим, а протонный  $\beta$ -распад ( $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ ) кинематически подавлен. Как мы видели выше, отклонение от лоренц-инвариантности влияет на кинематику процессов распада. Нарушение лоренц-инвариантности может даже обращать процессы. Чтобы это увидеть, исследуем случай  $c_p = c_e = c_v < c_n$ .

Обычную релятивистскую кинематику можно использовать в этом примере (с  $c_p$  — как скорость света), если нейтрону приписать эффективную массу

$$m_{\text{эф}}^2 = m_n^2 - (c_p^2 - c_n^2) \vec{p}^2, \quad (10.58)$$

где  $\vec{p}$  — импульс нейтрона в выбранной системе отсчета. Нейтронный  $\beta$ -распад возможен, если  $m_{\text{эф}} > m_n + m_e$ . Выраженное в терминах энергии нейтрона в выбранной системе отсчета, это условие имеет вид:

$$E < E_1 = \sqrt{\frac{m_n^2 - (m_p + m_e)^2}{c_p^2 - c_n^2}} \approx 2.7 \cdot 10^{19} \left| \frac{10^{-24}}{c_p - c_n} \right|^{1/2} \text{ эВ}. \quad (10.59)$$

При соответствующем выборе лоренц-инвариантных параметров, нейтрон с энергией, превышающей  $E_1$ , является стабильной частицей, и должен присутствовать в космических лучах.

Аналогичным образом можно получить необходимое и достаточное условие кинематически разрешенного  $\beta$ -распада протона:

$$E > E_2 = \sqrt{\frac{m_n^2 - (m_p - m_e)^2}{c_p^2 - c_n^2}} \approx 4.1 \cdot 10^{19} \left| \frac{10^{-24}}{c_p - c_n} \right|^{1/2} \text{ эВ}, \quad (10.60)$$

где  $E$  – энергии протона в выбранной системе отсчета. Таким образом, в этом примере протоны с энергией, превышающей  $E_2$ , нестабильны и не могут присутствовать в космических лучах сверхвысоких энергий.

## 10.7. GZK-обрезание

Вскоре после открытия микроволнового излучения (СВМ), Грейзен, Зацепин и Кузьмин показали, как это излучение ограничивает распространение космических лучей сверхвысоких энергий. Первичные нуклоны достаточной энергии будут неупруго взаимодействовать с фотонами СВМ. Этот результат известен как GZK-обрезание: нуклоны с энергией  $> 5 \cdot 10^{19}$  эВ не могут достичь Земли с расстояний  $\sim 50$  Мпк. Однако спектр космических лучей распространяется и на значения энергий, большие  $10^{20}$  эВ. Механизм рождения космических лучей сверхвысоких энергий неизвестен. Были предложены различные механизмы, в том числе и «экзотические»: топологические дефекты, активные галактические ядра, гамма-всплески. Эти схемы ограничены или отвергнуты GZK-обрезанием.

Рассмотрим, как GZK-обрезание изменяется при учете лоренц-нарушения. Для этого выберем реакцию образования пион-нуклонного резонанса:

$$p + \gamma(\text{СВМ}) \rightarrow \Delta(1232). \quad (10.61)$$

Пусть в этой реакции нуклон с энергией  $E$  неупруго взаимодействует с фотоном СВМ с энергией  $\omega$ . Фотоны распределены по энергиям согласно тепловому распределению с температурой  $T = 2.73$  К или  $kT = \omega_0 = 2.35 \cdot 10^{-4}$  эВ. Для реакции (10.61) условие (10.23), определяющее возможность осуществления реакции, имеет вид

$$2\omega + \frac{M_p^2}{2E} \geq (c_\Delta - c_p)E + \frac{M_\Delta^2}{2E}, \quad (10.62)$$

где  $c_\Delta - c_p$  – лоренц-нарушающий параметр. Если  $c_\Delta = c_p$ , то условие (10.62) превращается в обычное соотношение для пороговой энергии в этом процессе:  $E_f = \frac{(M_\Delta^2 - M_p^2)}{4\omega}$ . Если же  $c_\Delta \neq c_p$ , то (10.62) дает квадратичное неравенство для  $E$ , которое удовлетворяется лишь для  $(c_\Delta - c_p) < \hat{\delta}(\omega) \equiv \frac{\omega}{2E_f}$ . Если  $c_\Delta - c_p$  растет, порог реакции растет к величине  $E_f$ . Однако, если  $(c_\Delta - c_p)$  превысит критическое значение

$$c_\Delta - c_p > \frac{2\omega^2}{M_\Delta^2 - M_p^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-25} \left[ \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2, \quad (10.63)$$

реакция (10.61) становится кинематически подавленной для всех  $E$ . Если  $c_\Delta - c_p \sim \hat{\delta}(\omega_0)$ , то GZK-обрезания за счет резонансного образования  $\Delta(1232)$  уже нет. Отметим, что реакция (10.61), как было отмечено Грейзенем, Зацепиным и Кузьминым, – основной процесс, приводящий к обрезанию спектра космических лучей сверхвысоких энергий. Однако, если образование  $\Delta(1232)$  резонанса невозможно, то «ослабленная версия» обрезания может возникать за счет нерезонансного фоторождения:

$$p + \gamma(\text{CMB}) \rightarrow p + \pi. \quad (10.64)$$

Если  $c_\pi = c_p$ , то пороговая энергия рождения пиона  $E_p = M_\pi(2M_p + M_\pi)/4\omega$ . Если же  $c_\pi - c_p$  возрастает от нуля, то пороговое значение энергии растет. При  $E \rightarrow \infty$  энергия пиона  $E_\pi$  должна оставаться конечной. Условие (10.23) дает кинематическое условие для реакции (10.64):

$$2\omega \geq (c_\pi - c_p)E_\pi + \frac{m_\pi^2}{2E_\pi}. \quad (10.65)$$

Это условие может быть удовлетворено только для значений

$$c_{\pi} - c_p < \tilde{\delta}(\omega) \equiv \frac{2\omega^2}{m_{\pi}^2} \simeq 5 \cdot 10^{-24} \left[ \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2. \quad (10.66)$$

Реакция (10.64), а также множественное рождение пионов, подавлена для всех энергий протонов, если  $c_{\pi} - c_p > \tilde{\delta}(\omega)$ . В настоящее время, в отсутствие детальных данных по космическим лучам и прецизионных проверок специальной теории относительности, вопрос об GZK-обрезании остается открытым: способны ли космические лучи с энергиями, выше обрезания, преодолевать космологические расстояния?

## 10.8. Барионная асимметрия Вселенной как результат нарушения лоренц-инвариантности?

Как известно, Вселенная содержит различное количество материи и антиматерии. В космологии Большого Взрыва разность в плотностях барионов антибарионов составляет  $\sim 10^{-10}$  по отношению к плотности фотонов. Однако физика ранней Вселенной в термодинамическом равновесии предполагает барионную симметрию. Чтобы допустить динамическую генерацию барионной асимметрии (БА) в симметричном сценарии, Сахаров сформулировал три необходимых условия: 1) существование взаимодействий, не сохраняющих барионное число; 2) нарушение  $C$ - и  $CP$ -симметрий (если считать сохраняющейся  $CPT$ , то это означает нарушение  $C$ - и  $T$ -симметрий); 3) отклонение от термодинамического равновесия. Очевидно, что первое условие означает возможность рождения разного числа барионов и антибарионов в симметричных условиях, в то время как эволюция от начального условия ( $B = 0$ ) в состояние с  $B \neq 0$  связано с  $C$ - и  $CP$ -нарушениями. Третье же условие необходимо для того, чтобы формируемая асимметрия не была «размыта» химическим равновесием. В состоянии химического равновесия химические потенциалы частиц и античастиц обращаются в ноль ( $CPT$ -инвариантность), а средние значения плотности барионов и антибарионов равны их значениям в состоянии термодинамического равновесия. Стандартный вариант бариогенезиса согласуется с

фазой Большого объединения в космологии Большого взрыва, в течение которой процессы с нарушением барионного числа осуществляются путем обмена калибровочными бозонами с очень большой массой. Существуют, однако, и другие возможности генерации ВА в равновесной фазе Вселенной за счет *CPT*-нарушения во взаимодействиях, описывающих состояние ранней Вселенной.

Рассмотрим модель, описывающую равновесный бариогенезис и основанную на модификации закона дисперсии в лоренц-инвариантных теориях. Действительно, если потребовать *CPT*-инвариантность, то в таких теориях связь между энергией и импульсом для частицы и античастицы будет отличаться. В результате даже в термодинамическом равновесии распределения барионов и антибарионов будут различными, стимулируя тем самым эффективный химический потенциал для них.

Как известно, лоренц-нарушение возникает в теориях Большого объединения, в струнных (бранных) теориях, в пространствах с нетривиальной топологией или с дискретной структурой на планковской длине, в теориях с некоммутативной геометрией и т.д. На возможное нарушение лоренц-инвариантности указывает наблюдение космических лучей с энергиями, выше GZK предела ( $\approx 4 \cdot 10^{19}$  В). Наиболее важное следствие лоренц-нарушения (LV) – модификация обычного закона дисперсии между энергией и импульсом  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$  за счет добавления дополнительных слагаемых, которые исчезают в пределе малых импульсов. Естественное обобщение стандартного дисперсионного соотношения

$$p \equiv |\vec{p}|, \quad (10.67)$$

$$E^2 = p^2 + m^2 + p^2 f(P/M),$$

где  $M \gg m$  характеризует масштаб масс лоренц-нарушения. Рассматривая разложение функции  $f$ , ограничимся низшим порядком

$$E^2 = p^2 + m^2 + \alpha p^2 f\left(\frac{p}{M}\right)^n, \quad (10.68)$$

где  $\alpha$  – безразмерная константа порядка единицы. При  $n = 1$



$$E^2 = p^2 + m^2 + \alpha \frac{p^3}{M}. \quad (10.69)$$

К такому закону дисперсии приводит целый ряд теорий, основанных на LV. В этих теориях для пространственно-временных переменных предполагается алгебра Ли

$$[x_i, t] = i\lambda x_i; \quad [x_i, x_k] = 0, \quad (10.70)$$

т.е. только подгруппа лоренцевских сдвигов деформирована, а подгруппа пространственных вращений  $SO(3)$  остается неизменной.

Если  $\lambda$  – очень малая длина и рассматривать только члены  $O(\lambda^2)$ , то

$$E^2 = p^2 + m^2 - \lambda E p^2. \quad (10.71)$$

Эта формула для ультрарелятивистского случая ( $p \gg m$ ) сводится к выражению

$$E^2 = p^2 + m^2 - \lambda p^3. \quad (10.72)$$

Заметим, что коммутатор неканонических некоммутативных теорий  $[x_i, t] = i\lambda x_i$  является нарушающим  $T$ -инвариантность

$$T: [x_i, t] = i\lambda x_i \rightarrow [x_i, -t] = i\lambda x_i, \quad (10.73)$$

т.е. нарушающим одно из условий Сахарова.

При преобразованиях пространственной четности

$$P: [x_i, t] = i\lambda x_i \rightarrow [-x_i, t] = i\lambda(-x_i). \quad (10.74)$$

Если потребовать  $CPT$ -инвариантности, то  $T$ -нарушение подразумевает  $C$ -неинвариантность, т.е. другое сахаровское условие. В результате можно ожидать изменения знака параметра  $\lambda$  при зарядовом сопряжении

$$C: [x_i, t] = i\lambda x_i \rightarrow [x_i, -t] = i(-\lambda)x_i. \quad (10.75)$$

Наконец, для преобразования  $CPT$  имеем

$$CPT: [x_i, t] = i\lambda x_i \rightarrow [x_i, -t] = i\lambda x_i. \quad (10.76)$$

Отметим, что нарушение  $T$ -симметрии связано с тем, что группа симметрии пространственных вращений сохраняется при лоренцевских нарушениях или деформациях.

Закон дисперсии (10.71)  $CPT$ -инвариантен из-за инверсии  $\lambda$  и энергии при  $C$  и  $T$  преобразованиях. Далее будем основываться на законе дисперсии (10.71). На первом шаге рассмотрим кварк-

антикварковое море в ранней Вселенной при температуре  $T \gg 1$  ГэВ, когда нуклоны еще не сформировались. В этом случае средняя энергия и импульс кварка (антикварка) гораздо больше массы частицы, т.е. применимо ультрарелятивистское приближение. Поскольку  $\lambda_q$  ожидается очень малым, то в первом порядке по этому параметру

$$E \approx p - \frac{1}{2} \lambda_q p^2. \quad (10.77)$$

Равновесная плотность для фермионов

$$n = g \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} + 1}, \quad (10.78)$$

где  $g$  – число внутренних степеней свободы рассматриваемых частиц.

Таким образом, из (10.78) получаем оценку для плотности кварков

$$\begin{aligned} n_q &= N_q \frac{T^3}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^\varepsilon + 1} \approx N_q \frac{T^3}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x + 1} \left[ 1 + \frac{\lambda_q T}{2} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)} \right] dx = \\ &= \frac{3\zeta(3)N_q T^3}{2\pi^2} + \frac{7\pi^2 N_q}{60} \lambda_q T^4, \end{aligned} \quad (10.79)$$

где  $N_q$  – число кварковых ароматов,  $x \equiv \frac{p}{T}$  и  $\varepsilon = \frac{E}{T}$ ,  $\zeta$  – римановская дзета-функция.

Аналогично вычисляется плотность антикварков. Предполагается, что для античастиц закон дисперсии имеет вид (10.72), но с противоположным знаком для  $\lambda_q$ , находим

$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q} \approx \frac{7\pi^4}{45\zeta(3)} \lambda_q T \approx 12.6 \lambda_q T. \quad (10.80)$$

Барионная асимметрия обычно характеризуется в терминах отношения барион / энтропия  $n_B / S$ . Если расширение изоэнтропийное и в отсутствии В-несохраняющих взаимодействий, то это отношение остается постоянным при эволюции Вселенной. При очень большой температуре кварки и антикварки находятся в термодина-

мическом равновесии с фотонами, т.е. их плотности примерно одинаковы. Если записать энтропию плазмы как  $S = g_* n_\gamma$ , т.е. в терминах эффективного числа степеней свободы  $g_*$  при данной температуре, то

$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q} \approx \frac{n_B}{3n_\gamma} = g_* \frac{n_B}{3s}, \quad (10.81)$$

поэтому окончательно имеем

$$\frac{n_B}{s} \approx \frac{7\pi^4}{15g_*\zeta(3)} \lambda_q T. \quad (10.82)$$

Таким образом, кварк-антикварковая асимметрия уменьшается с уменьшением температуры, т.е. в процессе эволюции Вселенной. Результирующая асимметрия, однако, не «вымывается» другими эффектами, если предположить, что нет  $V$  или  $CPT$ -нарушающих взаимодействий. Ситуация изменяется, когда температура достигает значений  $\sim 200$  МэВ, и имеет место кварк-адронный фазовый переход. Итак, при таком сценарии нуклоны начинают формироваться при начальной барионной асимметрии, «переносимой» кварками, но в течении короткого периода формирующиеся нейтроны и протоны достигают термодинамического равновесия с окружающей плазмой, т.е. величина ВА контролируется температурой плазмы. Этот период заканчивается при температуре  $T \sim 1$  МэВ, когда начинается нуклеосинтез легких элементов. С этого момента никакие равновесные условия, включая барионы, не меняются, поэтому значение ВА определяется нуклон- антинуклонным соотношением. Чтобы определить это значение, заметим, что формирующиеся нуклоны имеют при  $T \sim 1$  МэВ нерелятивистские скорости, т.е. при  $p \ll m$  для нуклонов соотношение (10.71) дает

$$E \approx M_n + \frac{p^2}{2m}, \quad (10.83)$$

где  $m = \frac{M_n}{1 - \lambda_n M_n}$ ,  $M_n$  – масса нуклона. Для антинуклонов следует

заменить  $m$  на  $\bar{m} = \frac{M_n}{1 - \lambda_n M_n}$ .

Подставляя (10.83) в выражение (10.78), в лидирующем порядке получаем наблюдаемую асимметрию

$$\frac{n_n - n_{\bar{n}}}{n_n} \approx 1 - \left(\frac{\bar{m}}{m}\right)^{3/2}, \quad (10.84)$$

которая не зависит от температуры нуклонной закалки ( $T \sim 1$  МэВ). Тогда отношение плотности барионов к энтропии

$$\frac{n_B}{s} \approx (g_*)^{-1} \left[ 1 - \left( \frac{1 - \lambda_n M_n}{1 + \lambda_n M_n} \right)^{3/2} \right]. \quad (10.85)$$

Поскольку  $n_B/s \sim 10^{-10}$ , а  $g_*(T \approx 1 \text{ МэВ}) \approx 10$ , то получаем ограничение на параметр лоренцевского нарушения

$$(\lambda_n)^{-1} \approx 10^{19} \text{ эВ}. \quad (10.86)$$

Таким образом, в рассматриваемом сценарии, малость ВА Вселенной связана с малостью нарушения лоренцевской симметрии. Ограничение (10.86) указывает на то, что явления нарушения лоренцевской инвариантности возникают при энергиях  $E \geq 10^{19}$  эВ (в районе GZK обрезания).

## 10.9. СРТ-нарушение в астрофизике и космологии

В 1905 году Эйнштейн ввел постулат о постоянстве скорости света в вакууме, основанный на отрицательном результате опытов Майкельсона и Морли. С тех пор ковариантность физических законов относительно лоренцевских преобразований в опытах на Земле и окружающем пространстве проверена с большой точностью. Современная версия опытов Майкельсона и Морли основана на сравнении частот резонансных полостей в двух ортогональных модах, вращающихся по отношению к системе отсчета космического микроволнового излучения (СМВ). Достигнутая точность ( $\sim 10^{-7}$ ), однако, не означает, что специальная теория относительности не могла бы быть приближением физической реальности. Еще в середине XX века развитие релятивистской квантовой теории поля указало на логическую связь между лоренц-инвариантностью и дуальностью между материей и антиматерией. Это и не удивительно, по-

сколькx существование антиматерии есть следствие релятивистской ковариантности уравнения Дирака. Паули ввел идею о том, что для каждого процесса в природе существует процесс, протекающий с той же вероятностью, в котором каждая частица заменена античастицей с противоположным спином и чья траектория получается отражением в пространстве и времени. Это выражение *CPT*-теоремы, которая включает в себя предположения о лоренц-инвариантности, локальности, унитарности и правильном соотношении между спином и статистикой. Greenberg в 2002 году доказал и «обратную» *CPT*-теорему. Если при некоторых условиях *CPT*-инвариантность нарушена, то лоренц-инвариантность тоже будет нарушенной. В определенном смысле *CPT*-инвариантность более фундаментальна, чем лоренцевская инвариантность. Как будет видно ниже, можно модифицировать гамильтониан фундаментальных взаимодействий так, что будет нарушаться специальная теория относительности, но сохраняться инвариантность относительно *CPT*-преобразований. *CPT*-теорема указывает на возможную причину нарушения лоренц-инвариантности. В частности, условие локальности требует, чтобы пространственноподобные разделенные события не влияли друг на друга.

Существует, по крайней мере, три теоретические причины предполагать, что условие локальности не выполняется на произвольно малых расстояниях:

1) неизбежные сингулярности общей теории относительности (ОТО), создающие чрезвычайно сложную пространственно-временную структуру на расстояниях порядка планковской длины

$$L_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.66 \cdot 10^{-35} \text{ м}.$$
 На этих масштабах пространство – время имеет «пенную» структуру, включающую рождение черных дыр и их испарения за время  $\Delta t \sim L_{Pl}/c$ .

2) струнная М-теория является нелокальной теорией, в которой обычная концепция точечных компонент материи заменяется представлением о двумерных объектах с очень малыми (планковскими) размерами. Пространственно-временная структура струнной теории оказывается прерывистой на масштабе  $\Delta t \cdot \Delta x \geq c l_s^2$ , где  $l_s$  – масштаб струны.

3) как известно, гравитон – одно из многих возбуждений струны, «живущее» в некотором фоновом метрическом пространстве. Существование такого фонового метрического пространства является необходимым элементом формулировки и интерпретации теории. В петлевой теории гравитации сделана попытка исключения этого фонового пространства-времени. В этой теории пространство-время имеет «полимерную» структуру с минимальной пространственной ячейкой, имеющей объем  $\Delta V \approx L_{Pl}^3$ .

В любом случае, принцип неопределенности утверждает, что для «разрешения» масштабов длины  $l$  необходимы энергии порядка

$$\Lambda = \frac{\hbar c}{l} = \left( \frac{L_{Pl}}{l} \right) M_{Pl}, \text{ где } M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.22 \cdot 10^{19} - \text{планковская масса.}$$

Наивные ожидания порядка величины для  $CPT$  нарушения из размерных соображений дают

$$\Delta H \approx \frac{E^2}{\Lambda}. \quad (10.87)$$

При низких энергиях гамильтониан по порядку величины равен массе частицы, поэтому  $CPT$  симметрия в лабораторных экспериментах может быть проверена путем измерения разности масс и других характеристик частиц и античастиц.

Астрофизические и космологические проверки  $CPT$  (лоренц)-инвариантности, рассматриваемые ниже, относятся к проверкам физических законов на пространственных масштабах вплоть до  $\sim 10^{26}$  м.

### 10.9.1. Параметризация $CPT$ нарушений

Предположим, что  $CPT$  (лоренц)-нарушающий гамильтониан свободной частицы или поля может быть записан в виде:  $H = H_{free} + \Delta H$ , где  $\Delta H$  – малое возмущение стандартного гамиль-

тониана  $H_{free} = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Пусть

$$E^2 - p^2 - m^2 = F(E, \vec{p}), \quad (10.88)$$

где правая часть может быть разложена в ряд Тейлора

$$F(E, \vec{p}) = F_{\mu}^{(1)} p^{\mu} + F_{\nu\rho}^{(2)} p^{\nu} p^{\rho} + F_{\delta\kappa\lambda}^{(3)} p^{\delta} p^{\kappa} p^{\lambda} + \dots \quad (10.89)$$

где  $p^{\mu} = \{E, \vec{p}\}$  – 4-х импульс.

С феноменологической точки зрения нет причин ожидать, что коэффициенты в разложении (10.89) универсальны. Очевидно, что коэффициенты зависят от энергии, а при малых импульсах – зависят от масс. В общем случае, коэффициенты способны зависеть от всех квантовых чисел частицы (спина, аромата и т.д.). Только нечетные слагаемые в разложении (10.89) нарушают *CPT* (*CPT* – нечетные). Четные же члены сохраняют *CPT* (*CPT* – четные), поэтому получаем

$$\bar{F}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)} = (-1)^n F_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}, \quad (10.90)$$

где  $\bar{F}^{(n)}$  – соответствующий коэффициент для свободной частицы.

Нечетные слагаемые нарушают также Р и Т-четность. Это означает, что различаются правые и левые компоненты спиновой частицы, так как при Р и Т-преобразованиях 4-х импульс изменяет направление, а спин – нет. Практически это означает, что

$$F_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)} = \eta^n \left| F_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)} \right|, \quad (10.91)$$

где  $\eta = \pm 1$  – поляризационный индекс частицы, причем  $\eta = +1$ , если спин  $\vec{s} \uparrow\uparrow \vec{p}$  и  $\eta = -1$ , если  $\vec{s} \uparrow\downarrow \vec{p}$ . Этот эффект проявляется в прецессии спина при распространении частицы в вакууме.

Из размерных соображений:

$$\left| F_k^{(1)} p^k \right| \approx \left| F_{ji}^{(2)} p^i p^j \right| \approx \left| F_{qrs}^{(3)} p^q p^r p^s \right| \sim O\left(\frac{|p|^3}{\lambda}\right). \quad (10.92)$$

Для  $n > 3$

$$\left| F_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \right| \sim O\left(\frac{|p|}{\Lambda^{n-2}}\right)^n. \quad (10.93)$$

Таким образом, в лидирующем порядке нужно рассматривать первые три члена в разложении дисперсионного соотношения, поскольку они одного порядка.

### 10.9.2. Проверки, основанные на возможном существовании выделенного направления пространства – времени

Коэффициент при правом члене в правой части соотношения (10.89) представляет собой 4-х вектор с размерностью массы, определяющий выделенное направление в пространстве – времени. Он иногда называется членом Черна – Саймона. Дисперсионное соотношение для фотона можно записать, сохранив только член с выделенным направлением

$$\omega = \sqrt{k^2 + 2\eta_\gamma(\xi_0\omega - \vec{\xi}\vec{k})}, \quad (10.94)$$

где учтено, что  $F_\mu^{(1)} \equiv \{\xi_{0/2}, -\vec{\xi}\}$ .

Решая уравнение (10.94), получаем точную форму модифицированного дисперсионного отношения

$$\omega = \eta_\gamma \xi_0 \pm \sqrt{k^2 + \eta_\gamma^2 \xi_0^2 - 2\eta_\gamma \vec{\xi} \vec{k}} \approx \pm k + \eta_\gamma (\xi_0 \pm |\vec{\xi}| \cos \theta), \quad (10.95)$$

где  $\theta$  – угол между  $\vec{k}$  и  $\vec{\xi}$ . Двухзначность ответа только кажущаяся, поскольку нижний знак имеет смысл только в случае  $k > 0$ , но тогда  $\cos \theta < 0$ . Поэтому физическое решение

$$\omega \approx k + \eta_\gamma (\xi_0 \pm |\vec{\xi}| \cos \theta). \quad (10.96)$$

Как отмечалось выше, поляризационный индекс  $\eta_\gamma = +1$  для правой циркулярной поляризации и  $(-1)$  для противоположной поляризации, т.е. этот эффект может быть детектирован при распространении поляризованного излучения.

Линейно поляризованная волна представляет собой суперпозицию двух циркулярно-поляризованных волн

$$\Psi = \Psi_0 \{e^{-i\alpha - i\omega_+ t} \vec{\epsilon}_+ + e^{i\alpha - i\omega_- t} \vec{\epsilon}_-\}, \quad (10.97)$$

где  $\alpha$  – угол первоначальной поляризации. Очевидно, что угол поляризации как функция времени ведет себя следующим образом:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + (\omega_+ - \omega_-)t. \quad (10.98)$$

Тогда плоскость поляризации источника излучения с космологическим красным смещением  $z$  будет изменяться за счет вращения Земли на угол:



$$\Delta\alpha = 2 \int_0^z (\xi_0(z) - |\vec{\xi}(z)| \cos \theta) \frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (10.99)$$

Интересно, что это вращение не зависит от длины волны излучения.

Данные по 160 радиогалактикам с красным смещением  $0.3 < z < 2/12$  позволили оценить

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (0.8 \pm 1.0) \cdot 10^{-41} h_0 \text{ ГэВ}, \\ |\vec{\xi}| &= (1.5 \pm 1.9) \cdot 10^{-41} h_0 \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (10.100)$$

Другие данные ограничивают значения

$$|\vec{\xi}| \leq 2 \cdot 10^{-14} \text{ ГэВ}. \quad (10.101)$$

Этот предел означает, что член, «ответственный» за выделенное направление подавлен даже по отношению к размерным оценкам  $(\hbar\omega)^2/M_p \sim 4 \cdot 10^{-37} \text{ ГэВ}$ .

### 10.9.3. Проверка *CPT*-нечетных нарушений в данных по поляризации космического микроволнового излучения (*CMBR*)

Если пренебречь эффектами «выделенного направления» (которые, как мы видели, малы), то дисперсионное соотношение для фотона в лидирующем порядке запишется в виде

$$\omega = \sqrt{k^2 + \delta_\gamma \frac{k^3}{M_{Pl}}} \approx k \left( 1 + \delta_\gamma \frac{k}{2M_{Pl}} \right), \quad (10.102)$$

где  $\delta_\gamma$  — обезразмеренная величина *CPT*-нечетных лоренцевских нарушений. Из дисперсионного соотношения получаем фазовую скорость света

$$C_\gamma(\omega, \eta_\gamma) = \frac{\omega}{k} + \eta_\gamma \frac{\delta_\gamma}{M_{Pl}} \frac{\omega}{2}, \quad (10.103)$$

причем при  $\omega \ll M_{Pl}$   $C_\gamma = 1$ , как и должно быть. Тогда две циркулярные поляризации фотона будут распространяться с разной фазовой скоростью

$$\Delta v(\omega) = C_\gamma(\omega, +1) - C_\gamma(\omega, -1) = \frac{\delta_\gamma}{M_{Pl}} \omega. \quad (10.104)$$

Как и в случае с рассмотренным выше «ориентированным» слагаемым, плоскость поляризации линейно поляризованной волны от источника с красным смещением  $z$  поворачивается на некоторый угол  $\Delta\alpha$ , который можно получить, подставив в (10.99)

$$\omega(z) = \frac{2\pi C_\gamma}{\lambda} (1+z), \quad (10.105)$$

где  $\lambda$  – длина волны детектируемого фотона

$$\Delta\alpha(z) = \frac{2\pi}{M_{Pl}} \lambda^{-1} \int_0^z \frac{\delta_\gamma(z)}{H(z)} dz. \quad (10.106)$$

По размерным соображениям, коэффициент  $\delta_\gamma \sim \hbar\omega/\Lambda$ , т.е. угол вращения зависит от длины волны по закону  $\sim \lambda^{-2}$ .

Экспериментальные данные WMAP позволяют оценить

$$\Delta\alpha = -6.2^\circ \pm 3.8. \quad (10.107)$$

Вращение плоскости поляризации (10.106), усредненные по спектру CMBR в предположении об эволюции  $\delta_\lambda(z) = \frac{\delta_\lambda(0)}{(1+z)}$ , дает

$$\Delta\alpha_{\text{CPT}} \approx 11.7^\circ h_0^{-1} \delta_\gamma. \quad (10.108)$$

#### 10.9.4. Проверка CPT–нечетных нарушений по гамма–всплескам (GRB)

Неполяризованное излучение можно представить суперпозицией двух волн одинаковой амплитуды с противоположными циркулярными поляризациями. Групповая скорость фотона в вакууме в лидирующем порядке

$$V_\gamma(\omega, \eta_\gamma) = \frac{\partial\omega}{\partial k} \approx 1 + \eta_\gamma \frac{\delta_\gamma}{M_p} \omega. \quad (10.109)$$

Эта величина несколько отличается от выражения (10.103). Это создает задержку распространения  $\Delta t \sim V_\gamma(\omega, +1) - V_\gamma(\omega, -1)$  для источника с красным смещением  $z$

$$\Delta t(z) \approx \frac{4\pi}{M_p} \lambda^{-1} \int_0^z \frac{\delta_\gamma(z)}{H(z)} dz, \quad (10.110)$$

где опять предполагается, что  $\delta_\gamma(z) = \delta_\gamma(0)/(1+z)$ . GRB можно использовать для получения ограничений на вакуумное дисперсионное соотношение излучения. Но современные пределы, полученные этим методом, не чувствительны к планковскому масштабу. Действительно, из соотношения (10.110) следует, что продолжительность всплеска

$$\Delta t(z=1) \approx 22.7 \left( \frac{\hbar\omega}{200 \text{ кэВ}} \right) \delta_\gamma h_0^{-1} \text{ мкс.} \quad (10.111)$$

Наиболее короткое время всплеска из когда-либо детектируемых – GRB 920229 составляет  $\tau = (220 \pm 30) \text{ мкс}$ . С помощью (10.111) получаем ограничение  $\delta_\gamma < (5-6)h_0$ , а это означает, что  $\Lambda > 0.2h_0^{-1}M_{Pl}$ .

#### 10.9.5. Проверка СРТ-нарушения по излучению крабовидной туманности

Дисперсионное соотношение заряженных частиц (электронов и протонов) в пространстве-времени изотропной вселенной можно записать в виде

$$E(p, \theta_p) = \sqrt{m^2 + (1 + \varepsilon_p) p^2 + (\eta'_p + \theta_p \eta_p) \frac{p^3}{M_p}}, \quad (10.112)$$

где  $\varepsilon_p$ ,  $\eta_p$  и  $\eta'_p$  – безразмерные коэффициенты, которые  $\sim \frac{M_{Pl}}{\Lambda}$ . В этой формуле введено различие между  $s$ -четной частью коэффициента при  $p^3$   $\eta_p$  и его  $s$ -нечетной частью  $\eta_p$ . Из выражения (10.112) очевидно, что максимально допустимая фазовая скорость частицы для  $E \ll M_{Pl}$

$$C_p \approx \sqrt{1 + \varepsilon_p} \neq 1. \quad (10.113)$$

В промежуточном ультрарелятивистском режиме  $m \ll E \ll \ll M_{Pl}$  предполагаем, что  $c$  – четный параметр  $\eta'_p = 0$ , т.е.

$$E \approx p C_p \left( 1 + \frac{m^2}{2p^2 c^2} + \frac{\theta_p \eta_p}{2M_{Pl} c_p^2} p \right). \quad (10.114)$$

Тогда групповая скорость де-бройлевской волны, ассоциированной с частицей

$$V(E, \theta_p) = \frac{\partial E}{\partial p} \approx 1 - \frac{m^2}{2E^2} + \theta_p \frac{\eta_p}{M_p c_p^2} E. \quad (10.115)$$

Лоренц-фактор частицы

$$\gamma(E, \theta_p) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_p^2}}} \approx \left( \frac{m^2}{E^2} - 2\theta_p \frac{\eta_p}{M_p c_p^2} E \right)^{-1/2}. \quad (10.116)$$

Особенность этой формулы состоит в том, что для  $\theta_p = +1$  (правых частиц) лоренц-фактор содержит расходимость, которая по-видимому, сокращается членами более высокого порядка. Для  $\theta_p = -1$  (левых частиц) лоренц-фактор имеет максимум при  $E \approx 14.7 / \eta_p^{1/3}$  ТэВ и  $\gamma_{\max} = 1.7 \cdot 10^7 / \eta_p^{1/3}$ .

Из приведенных выше формул следует несколько наблюдаемых модификаций процессов электромагнитного излучения.

Начнем с комптоновского рассеяния

$$e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma. \quad (10.117)$$

Рассмотрим это рассеяние в томпсоновском пределе  $\bar{\omega}' \approx \omega$  и в системе покоя электрона ( $\bar{\omega}$  и  $\bar{\omega}'$  – энергии фотона до и после рассеяния). Чтобы найти эти энергии, заметим, что из (10.102) при наличии  $CPT$  (лоренц)-нарушений следует

$$\omega^2 - k^2 C_\gamma^2(\omega, \eta_\gamma) = 0 \quad (10.118)$$

в любой инерциальной системе отсчета.

Тогда

$$\omega' = \omega \frac{C_\gamma - V \cos \theta}{\sqrt{C_\gamma^2 - V^2}}; \quad k' = \frac{\omega'}{C_\gamma}; \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{C_\gamma^2 - V^2} \sin \theta}{C_\gamma \cos \theta - V}. \quad (10.119)$$

Поэтому энергии фотона до и после рассеяния в системе покоя электрона

$$\bar{\omega} = \omega \frac{C_\gamma(\omega, \eta_\gamma) - V \cos \theta}{\sqrt{C_\gamma^2(\omega, \eta_\gamma) - V^2}}, \quad \omega' = \bar{\omega}' \frac{C_\gamma(\omega, \eta_\gamma) - V \cos \theta'}{\sqrt{C_\gamma^2(\bar{\omega}', \eta_\gamma) - V^2}}. \quad (10.120)$$

Максимальная энергия рассеянного фотона в лабораторной системе

$$\omega_{IC}^{\max} \approx \omega \frac{C_\gamma(\omega') + V}{C_\gamma(\omega) - V} \quad (10.121)$$

стремится в лоренц-инвариантном пределе к хорошо известному стандартному выражению  $\omega_{IC}^{\max} = \omega \gamma^2 (1 + \beta^2)$ .

Практически обычно считается, что  $C_e = 1$  и используется приближение

$$\omega_{IC}^{\max} \approx 4\omega \left( \frac{m^2}{E^2} + \eta_\gamma \frac{\theta_\gamma}{M} \omega - 2\eta_e \frac{\theta_e}{M_{Pl}} E \right)^{-1}. \quad (10.122)$$

Рассматривая магнитное поле как набор виртуальных фотонов со средней энергией  $\omega_B = \frac{eB}{m}$ , на котором рассеиваются быстрые электроны, можно эту технику применить к обратному комптоновскому рассеянию в присутствии лоренцовских нарушений. Тогда максимальная энергия синхротронного излучения из (10.122)

$$\omega_{\text{синх}}^{\max} \approx 4\omega_B \left( \frac{m^2}{E^2} + \eta_\gamma \frac{\theta_\gamma}{M_{Pl}} \omega_B - 2\eta_e \frac{\theta_e}{M_{Pl}} E \right)^{-1}. \quad (10.123)$$

В общем случае  $\omega_B < E$ , и можно пренебречь *CPT*-нечетными нарушениями в распространении фотона. Кроме того, учтем ограничение (10.108)  $\theta_\gamma < 0.14$  (для  $h_0 = 0.7$ ) и пренебрежем величиной  $\leq 2 \cdot 10^{-33}$  в скобках выражения (10.123). Тогда (10.123) в точности совпадает с лоренц-фактором электрона в соотношении (10.116).

Как уже отмечалось выше, эта формула имеет особенность для левых частиц, но в обычных условиях электрон является смесью левых и правых компонент. Однако для безмассовой частицы спиральность – «хорошее» квантовое число, поэтому при  $E \gg m$  электроны (позитроны), подобно нейтрину (антинейтрину) оказываются левыми (правыми) состояниями. Найдём максимум выражения

$$\omega_{\text{синх}}^{\text{max}} = \frac{eB}{E} \left( \frac{m^2}{E^2} + 2 \frac{\theta_{e^-}}{M_{Pl}} E \right)^{-3/2}, \quad (10.124)$$

считая  $E$  независимой переменной. Максимум достигается при энергии электрона  $E = 10 / \theta^{1/3}$  ТэВ при лоренц-факторе  $\gamma(E) = 1.58 \cdot 10^7 / \theta^{1/3}$ . Отсюда следует ограничение

$$\theta_{e^-} \leq \frac{M_{Pl}}{m} \left( \frac{0.35eB}{m\omega_{\text{синх}}^{\text{max}}} \right)^{3/2}. \quad (10.125)$$

Крабовидная туманность – замечательная астрофизическая лаборатория для проверки такого типа *CPT*-нечетных нарушений. Предполагая, что синхротронное излучение дает основной вклад в  $\gamma$ -спектр Крабовидной туманности вплоть до максимальной энергии  $\approx 100$  МэВ, получаем ограничение на *CPT*-нечетный параметр нарушения

$$\theta_{e^-} \leq 7 \cdot 10^{-8} \left( \frac{\omega_{\text{синх}}^{\text{max}}}{100 \text{ МэВ}} \right)^{-3/2} \left( \frac{B}{0.6mG} \right)^{3/2}. \quad (10.126)$$

При получении соотношения (10.122) мы пренебрегли величиной  $\epsilon_e$ . Заметим, что излучение Крабовидной туманности позволяет получить строгое ограничение на *CPT*-четные лоренцевские нарушения. Рассмотрим процесс рождения пары в вакууме

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-. \quad (10.127)$$

Этот процесс подавлен лоренц-инвариантностью, поскольку сохранение 4-импульса подразумевает

$$\omega^2 - k^2 = (E_+^2 - p_+^2) + 2(E_+ E_- - p_+ p_- \cos \theta) + (E_-^2 - p_-^2), \quad (10.128)$$

где левая часть должна быть равна нулю, а правая часть – больше  $2m^2$ . Если использовать дисперсионное соотношение (10.112), оставив только *CPT*-четный член, то соотношение (10.128) перепишется в виде

$$\omega^2 - k^2 = 2m^2 + \epsilon_e (p_+^2 + p_-^2) + 2(E_+ E_- - p_+ p_- \cos \theta). \quad (10.129)$$

Это соотношение справедливо, если  $\omega = k$  и  $\epsilon_e < 0$ . Таким образом, порог реакции (10.127) в присутствии *CPT*-четных лоренцовских нарушений

$$\omega = \frac{2m_e}{\sqrt{-\epsilon_e}}. \quad (10.130)$$

То, что из Крабовидной туманности наблюдается излучение с  $E_\gamma > 20$  ТэВ, дает ограничение

$$|C_e - 1| < 2.5 \cdot 10^{-15}. \quad (10.131)$$

Это значение сопоставимо с данными, полученными при регистрации  $\gamma$ -лучей от внегалактических источников.

## 10.10. Нарушение *CPT* и лоренц-инвариантности в высокоэнергетических нейтрино

*CPT*-инвариантность взаимосвязана с лоренц-инвариантностью, и неизвестно, являются ли эти симметрии ненарушенными при всех условиях, создаваемых Природой. Проверка сохранения этих симметрий требует как экстремально высоких энергий, так и очень больших пролетных расстояний. Обоим этим условиям удовлетворяет нейтринная астрономия. Действительно, большинство частиц не способно распространяться без каких-либо изменений на космологических масштабах. Частицы, которые рассеиваются на микроволновом излучении или других мишенях, не могут быть использованы в экспериментах с очень большой пролетной базой. Высокоэнергетические нейтрино могут распространяться на тысячи мегапарсек без потери энергии.

На больших расстояниях эффекты нарушения *CPT* и лоренцевской симметрии могут вызывать модификацию стандартных ней-

тринных осцилляций. С использованием нейтринных телескопов становится возможным измерение отношений нейтринных ароматов от удаленных источников и получить ограничения на возможные эффекты нарушения  $CPT$  и лоренцевской инвариантности с гораздо лучшей точностью, чем в других экспериментах.

### 10.10.1. Стандартные нейтринные осцилляции

Обычно нейтрино идентифицируются по их аромату ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ), а не по их массе. Нейтрино определенного аромата, однако, не является состоянием с определенной массой. Таким образом, состояние с определенным ароматом  $|v_\alpha\rangle$  оказывается линейной комбинацией массовых состояний

$$|v_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |v_i\rangle, \quad (10.132)$$

где  $U_{\alpha i}$  – компоненты унитарной лептонной матрицы смешивания. В шредингеровском представлении временная эволюция собственных массовых состояний имеет вид

$$i \frac{d}{d\tau} |v_i(\tau)\rangle = m_i |v_i(\tau)\rangle, \quad (10.133)$$

где  $\tau$  – время в системе покоя,  $m_i$  – массовые собственные значения. С помощью соотношения (10.133) можно найти вероятность осцилляции из состояния  $v_\alpha$  в состояние  $v_\beta$

$$\begin{aligned} P(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = & \delta_{\alpha\beta} - \\ & - \sum_{j>i} R(U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^*) \sin\left(\Delta m_{ji}^2 \left(\frac{L}{4E}\right)\right) + \\ & + 2 \sum_{j>i} F(U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^*) \sin\left(\Delta m_{ji}^2 \left(\frac{L}{2E}\right)\right), \end{aligned} \quad (10.134)$$

где  $\Delta m_{ji}^2 \equiv m_j^2 - m_i^2$ ,  $E$  – энергия нейтрино и  $L$  – пролетная база и нейтрино предполагаются релятивистскими. Для трех ароматов майорановских нейтрино  $3 \times 3$  матрица смешивания  $U = V \cdot M$ , где



$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (10.135)$$

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этих матрицах  $c_{ij}$  и  $s_{ij}$  – косинусы и синусы углов смешивания  $\theta_{ij}$ ,  $\delta_{CP}$  –  $CP$ -нарушающая фаза и фазы в матрице  $M$  – майорановские фазы. Для дираковских нейтрино ситуация похожая, однако майорановские фазы могут быть «поглощены» фазами массовых состояний. Практически, в силу того, что угол смешивания  $\theta_{23}$  мал, система включает только два сорта нейтрино. Тогда вероятность вакуумных осцилляций

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ 1.27 \Delta m^2 \frac{L}{E} \right], \quad (10.136)$$

где  $\Delta m^2$  измеряется в эВ<sup>2</sup>,  $L$  – в км,  $E$  – в ГэВ. Обычно считается, что  $\theta_{12}$  и  $\Delta m_{21}^2$  – «солнечные» осцилляционные параметры, описывающие переходы  $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu, \tau}$ , а  $\theta_{23}$  и  $\Delta m_{32}^2$  – атмосферные осцилляционные параметры, описывающие переход  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ .

### 10.10.2. Осцилляции в веществе

Ситуация усложняется, если нейтрино проходят через плотную материю, например, через Солнце. В этом случае гамильтониан в массовом базисе уже не будет диагональным, в результате возникает энергетическая зависимость в углах смешивания. Рассмотрим для простоты систему из двух нейтрино. Тогда гамильтониан в массовом базисе

$$H_m^i = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 + A \cos^2 \theta & A \sin \theta \cos \theta \\ A \sin \theta \cos \theta & m_2^2 + A \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (10.137)$$

где величина  $A$  учитывает эффекты, вносимые веществом:  $A = 2\sqrt{2}EG_F N_e$ ,  $G_F$  – фермиевская константа,  $N_e$  – электронная плотность. Тогда вероятность осцилляции

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 [\Omega_M L], \quad (10.138)$$

где 
$$\sin 2\theta_m = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{4E \Omega_M} \quad (10.139)$$

и 
$$\Omega_M = \frac{\Delta m^2}{4E} \sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}. \quad (10.140)$$

### 10.10.3. Феноменология нейтринных осцилляций в присутствии CPT и лоренцевских нарушений

#### 1. Нейтринные осцилляции и эффекты нарушения лоренцевской инвариантности.

Как уже отмечалось, нарушение лоренцевской инвариантности приводит к модификации дисперсионных соотношений (MDR). В лидирующем порядке по планковской массе  $M_{Pl}$  закон дисперсии можно записать в виде

$$E^2 = p^2 + m^2 + \eta p^2 \left( \frac{E}{M_{Pl}} \right)^\alpha, \quad (10.141)$$

где  $E$  – энергия нейтрино,  $p$  – импульс,  $m$  – массовое собственное значение,  $\eta$ ,  $\alpha$  – параметры нарушения лоренц-инвариантности. Предполагая, что параметр  $\eta$  не является универсальной величиной и зависит от массового собственного состояния, запишем гамильтониан для двух нейтрино в массовом базисе

$$H = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} + \frac{\eta_1 E^{\alpha+1}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} + \frac{\eta_2 E^{\alpha+1}}{2} \end{pmatrix}, \quad (10.142)$$

где пренебрежено кинетическим слагаемым и отождествлен импульс  $p$  с  $E$ , поскольку массовые собственные состояния и нарушающие лоренц-инвариантность члены гораздо меньше импульса нейтрино. Для простоты рассмотрения планковская масса включена в определение  $\eta$ . С гамильтонианом (10.142) вероятность осцилляции нейтрино

$$P[v_\alpha \rightarrow v_\beta] = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ \frac{\Delta m^2 L}{4E} + \frac{\Delta \eta E^n L}{4} \right], \quad (10.143)$$

где  $n = \alpha + 1$ ,  $\Delta \eta$  – разность между двумя значениями  $\eta$ . Если эффекты нарушения лоренц-инвариантности отсутствуют, то получается стандартная формула (10.136) для вероятности осцилляций. Мы предполагали, что параметр  $\eta$  имеет зависимость от массы собственного состояния. Если это не так, то вероятность осцилляции остается неизменной, даже если лоренц-инвариантность нарушена. Предполагая, что эффекты нарушения присутствуют в атмосферных осцилляциях нейтрино, получаем, что эти эффекты становятся существенными, если

$$1.27 \frac{\Delta m^2 L}{E} \sim 1.27 \cdot 10^{27} \Delta \eta E^2 L, \quad (10.144)$$

где мы для простоты положили  $\alpha = 1$ . Таким образом

$$\Delta \eta \sim \frac{\Delta m^2}{E^2 10^{27}} \sim 10^{-30} \text{ эВ}^{-1} \quad (10.145)$$

для характерных значений  $\Delta m^2$  и  $E = 1$  ГэВ, соответствующего пику потока атмосферных нейтрино.

#### 10.10.4. Нейтринные осцилляции и расширения стандартной модели (СМР)

Расширения стандартной модели хотелось бы рассматривать как низкоэнергетическую феноменологическую модель теории струн. Эффективный СМР-гамильтониан, описывающий распространение нейтринного аромата, записывается в виде

$$H_{\alpha\beta}^{\text{эф}} = |\vec{p}| \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2|\vec{p}|} \left[ \tilde{m}^2 + 2(a_L^\mu p_\mu - (C_L)^{\mu\nu} p_\mu p_\nu) \right]_{\alpha\beta}, \quad (10.146)$$

где  $\tilde{m}$  относится к стандартной массе нейтрино;  $\alpha, \beta$  – индексы ароматов,  $a_L$  и  $C_L$  – коэффициенты, характеризующие нарушение лоренцевской и  $CPT$ -инвариантности. Основное отличие между этой моделью и рассмотренной выше состоит в том, что гамильтониан не является диагональным. В случае двух нейтрино будем предполагать, что гамильтониан в массовом базисе имеет вид

$$H_{\text{эф}} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix}, \quad (10.147)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – вещественные недиагональные лоренц-нарушающие параметры (они не зависят от параметров  $a$  в соотношении (10.146)).

Для расчета вероятности будем использовать формализм матрицы плотности. Перепишем гамильтониан в терминах матриц Паули

$$h_{ij} = -2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta m^2}{4E} & -a_2 \\ \frac{\Delta m^2}{4E} & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.148)$$

где для простоты опущены нулевые компоненты, поскольку они тождественно равны нулю. Эта матрица имеет собственные значения  $\lambda_i$ , задаваемые набором  $\{\pm i\Omega, 0\}$ , где  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + a_1^2 + a_2^2}$  и  $\omega = \frac{\Delta m^2}{4E}$ . Матрица (10.148) диагонализуется с помощью унитарной матрицы

$$U = \frac{1}{\sqrt{2a_1^2 + 2a_2^2\Omega}} \begin{pmatrix} \omega a_1 - ia_2\Omega & \omega a_1 + ia_2\Omega & -a_1\sqrt{2a_1^2 + a_2^2} \\ \omega a_2 + ia_1\Omega & \omega a_2 - ia_1\Omega & -a_2\sqrt{2a_1^2 + a_2^2} \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 & \omega\sqrt{2a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix}. \quad (10.149)$$

Тогда компоненты матрицы плотности

$$\rho_i(L) = \sum_{j,k} U_{ij} e^{\lambda_{jk} L} U_{jk}^{-1} \rho_k(0), \quad (10.150)$$

где  $U_{ij}$  – компоненты матрицы (10.149),  $\rho(0)$  – начальная матрица плотности.

Предполагая, что имеется мюонное нейтрино, осциллирующее в  $\tau$ -нейтрино, находим вероятность осцилляции

$$P = \text{tr}[\rho_\mu(L) \rho_\tau(0)], \quad (10.151)$$

причем

$$\begin{aligned} \rho_\mu(0) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \cdot \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \\ \rho_\tau(0) &= \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.152)$$

Таким образом, вероятность осцилляции:

$$\begin{aligned} P[v_\mu \rightarrow v_\tau] &= \frac{1}{2} [\cos^2 2\theta \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} - \frac{|a|^2}{\Omega^2} \cos(2\Omega L) + \right. \\ &+ \sin^2 2\theta \left( 1 - \frac{a_1^2}{\Omega^2} - \frac{(\omega^2 + a_2^2)}{\Omega^2} \cos(2\Omega L) \right) \Big] - \\ &\left. - \frac{1}{2} \sin 4\theta \left( -\frac{4\omega q_1}{\Omega^2} \sin^2(\Omega L) \right) \right], \end{aligned} \quad (10.153)$$

причем  $a = a_1 + ia_2$ . По аналогии с диагональным случаем, лоренц-нарушающий параметр  $a$  может зависеть от энергии нейтрино. Для исследования этой энергетической зависимости заменим  $a \rightarrow aE^n$ , где  $n$  – дополнительный параметр теории. Интересно отметить, что если в соотношении (10.147) заметить

$$\begin{aligned} m_1^2 &\rightarrow m_1^2 + A \cos^2 \theta, \quad m_2^2 \rightarrow m_2^2 + A \sin^2 \theta, \\ a_1 &\rightarrow \frac{A}{2E} \sin \theta \cos \theta, \quad a_2 = 0, \end{aligned} \quad (10.154)$$

то возникают лоренц-инвариантные эффекты вещества, уже описанные выше.

Если бы мы хотели включить недиагональные лоренц-нарушающие эффекты для случая трех нейтрино, то ситуация оказалась бы очень трудной, так как возникло бы три угла смешивания, три разности масс и три лоренц-нарушающих параметра. Для исследования проявлений эффектов нарушения лоренц-инвариантности рассмотрим только лидирующее приближение по параметрам нарушения. В стандартном случае временная эволюция матрицы плотности задается уравнением

$$\frac{d\rho}{dt} = B\rho, \quad (10.155)$$

где  $B$  – гамильтониан в базисе Паули. Рассмотрим поправки к матрице плотности и матрице  $B$

$$\rho \rightarrow \rho_0 + \delta\rho_1, \quad B \rightarrow B + \delta C, \quad (10.156)$$

где величина  $\delta$  учитывает эффекты нарушения лоренц-инвариантности. Подставив (10.156) в (10.155) и приравняв соответствующие коэффициенты, получим

$$\delta\dot{\rho}_1 = B\delta\rho_1 + \delta C\rho_0. \quad (10.157)$$

Определяя векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$

$$\vec{\rho}_0 = U\vec{x}, \quad \delta\vec{\rho}_1 = U\vec{y}, \quad (10.158)$$

где компоненты  $\rho$  векторов являются компонентами матрицы плотности и унитарной матрицы, диагонализующей  $B$ . Тогда соотношение (10.157) переписывается в виде

$$\dot{\vec{y}} - U^{-1}BU\vec{y} = U^{-1}\delta CUx. \quad (10.159)$$

Так как  $U$ ,  $B$ ,  $\delta C$  – известны, то можно найти  $\vec{x}$  и решить уравнение (10.159) относительно возмущений матрицы плотности. После этого находятся и вероятности осцилляций. Выражения для вероятностей осцилляций очень сильно упрощаются, если предполагать очень большую пролетную базу. Считая параметр нарушения лоренц-инвариантности  $a$  вещественным, получаем для вероятностей осцилляций

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 0.564 - 4.39 \cdot 10^{9n+12} a E^{n+1}, \\
P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= 0.264 + 1.54 \cdot 10^{9n+12} a E^{n+1}, \\
P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= 0.180 + 2.93 \cdot 10^{9n+12} a E^{n+1}, \\
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) &= 0.365 - 1.30 \cdot 10^{9n+12} a E^{n+1}, \\
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= 0.367 - 1.16 \cdot 10^{9n+12} a E^{n+1}, \\
P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau) &= 0.449 - 1.56 \cdot 10^{9n+12} a E^{n+1}.
\end{aligned} \tag{10.160}$$

С помощью этих выражений можно найти соотношения, описывающие поток нейтрино от астрофизических источников. Если предположить, что рождаются только электронные и мюонные нейтрино, то начальный поток параметризуют в виде

$$\Phi_e = \varepsilon \Phi_{tot}, \quad \Phi_\mu = (1 - \varepsilon) \Phi_{tot}, \tag{10.161}$$

где  $\varepsilon \in [0, 1]$ , а  $\Phi_{tot}$  – полный поток. В терминах вероятностей (10.160) состав нейтринных ароматов в детекторе

$$\begin{aligned}
R_{\nu_e} &= (P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \Phi_{\nu_e} + P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \Phi_{\nu_\mu} + P(\nu_\tau \rightarrow \nu_e) \Phi_{\nu_\tau}) / \Phi_{tot}, \\
R_{\nu_\mu} &= (P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \Phi_{\nu_e} + P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \Phi_{\nu_\mu} + P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu) \Phi_{\nu_\tau}) / \Phi_{tot}, \\
R_{\nu_\tau} &= (P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) \Phi_{\nu_e} + P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \Phi_{\nu_\mu} + P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau) \Phi_{\nu_\tau}) / \Phi_{tot}.
\end{aligned} \tag{10.162}$$

Численные значения

$$\begin{aligned}
R_{\nu_e} &= 0.264 + 0.300\varepsilon - aE^{n+1} [0.593\varepsilon - 0.154] \cdot 10^{9n+13}, \\
R_{\nu_\mu} &= 0.365 - 0.101\varepsilon + aE^{n+1} [0.167\varepsilon - 0.013] \cdot 10^{9n+13}, \\
R_{\nu_\tau} &= 0.367 - 0.187\varepsilon + aE^{n+1} [0.409\varepsilon - 0.116] \cdot 10^{9n+13}.
\end{aligned} \tag{10.163}$$

В пределе больших  $a$  эти отношения  $R_{\nu_e} : R_{\nu_\mu} : R_{\nu_\tau} \approx 0.42 : 0.57 : 0.013$  для  $\varepsilon = 1/3$  и  $R_{\nu_e} : R_{\nu_\mu} : R_{\nu_\tau} \approx 0.70 : 0.27 : 0.027$  для  $\varepsilon = 1$ .

Численные оценки показывают, что переход между стандартной феноменологией осцилляций и феноменологией с достаточно большими значениями  $a$  довольно резкий. Если вы-

брать  $a = M_{Pl}^{-1}$  ( $n = 1$ ) или  $a = M_{Pl}^{-2}$  ( $n = 2$ ), то пороги для этих эффектов составляют  $\sim 1$  ТэВ и  $10^3$  ТэВ.

#### 10.10.5. Квантовая декогерентность в нейтринных осцилляциях

Вернемся к нарушению *CPT* в отсутствии лоренц-нарушений и рассмотрим влияние квантовой декогерентности на нейтринные осцилляции. Как уже обсуждалось, квантовая декогерентность приводит к изменению характера эволюции матрицы плотности

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + \delta H \rho, \quad (10.164)$$

где  $\delta H$  возникает за счет потери когерентности. Рассматривая два сорта нейтрино и записывая уравнение (10.164) в базисе матриц Паули, находим уравнение временной эволюции матрицы плотности

$$\frac{d\rho_\mu}{dt} = (h_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu})\rho_\nu, \quad (10.165)$$

где  $h$  характеризует стандартные осцилляции, а  $h'$  – эффекты декогерентности. Удобно  $h'$  параметризовать в виде

$$h' = -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & d \\ 0 & b & \alpha & \beta \\ 0 & d & \beta & \delta \end{pmatrix}, \quad (10.166)$$

причем первая строка и первый столбец содержат только нули в силу сохранения вероятности и второго закона термодинамики. Можно ввести ограничение на теорию, если предположить сохранение энергии в нейтринной системе. Для этого следует положить параметры  $d$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  равными нулю. Однако не ясно, нужно ли для этих целей привлекать гравитацию, поэтому необходимо рассматривать возможность ненулевых значений этих параметров. С помощью (10.165) и (10.166) получаем уравнения



$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_0 &= 0, \\
\dot{\rho}_1 &= -2a\rho_1 - 2\left(b - \frac{\Delta m^2}{4E}\right)\rho_2 - 2d\rho_3, \\
\dot{\rho}_2 &= -2\left(b + \frac{\Delta m^2}{4E}\right)\rho_1 - 2\alpha\rho_2 - 2\beta\rho_3, \\
\dot{\rho}_3 &= -2d\rho_1 - 2\beta\rho_2 - 2\delta\rho_3.
\end{aligned} \tag{10.167}$$

Чтобы найти вероятности осцилляций, надо решить эти уравнения при определенных начальных условиях. Рассмотрим эти решения в двух предельных случаях. Первый случай – параметры  $d$  и  $\beta$  равны нулю. Второй – все параметры декогерентности, за исключением  $d$ , равны нулю. В первом случае вероятность осцилляции

$$\begin{aligned}
P(v_\alpha \rightarrow v_\beta) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 2\theta (1 - e^{-2\delta L}) + \sin^2 2\theta \times \right. \\
&\times \left. \left[ 1 - e^{-(a+\alpha)L} \cos \left( 2L \left[ \left( \frac{\Delta m^2}{4E} \right) - \frac{1}{4}(\alpha - a)^2 - b^2 \right]^{1/2} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{10.168}$$

Если учесть условие положительности, то найдем простейшее расширение стандартных нейтринных осцилляций, вызванное декогерентностью. В этом случае  $a = \alpha$ , а все другие параметры равны нулю.

Если же все коэффициенты, кроме  $d$ , равны нулю, то вероятность осцилляции

$$\begin{aligned}
P(v_\alpha \rightarrow v_\beta) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 2\theta \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_d^2} \cos(2\Omega_d L) \right] + \right. \\
&+ \sin^2 2\theta \left[ 1 - \frac{d^2 - \omega^2}{\Omega_d^2} \cos(2\Omega_d L) \right] + \sin 4\theta \frac{d}{\Omega_d} \sin(2\Omega_d L) \left. \right\},
\end{aligned} \tag{10.169}$$

где  $\Omega_d = \sqrt{\omega^2 + d^2}$  и  $\omega = \frac{\Delta m^2}{4E}$ .

Завершая обсуждение *CPT* и лоренцевских нарушений в нейтринной физике, сделаем следующие выводы.

### 1. Отношения нейтрино различных ароматов.

Чтобы попытаться обнаружить проявления *CPT* и лоренц-нарушений в нейтринном секторе, сначала надо понять, что предсказывает «обычная» физика в отсутствие *CPT* и лоренц-нарушений. Для начального отношения нейтрино различных ароматов, возникающих в распаде  $\pi$  – имеем  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1/3 : 2/3 : 0$ .

После осцилляций на очень большой пролетной базе (характерной для нейтринной астрономии) отношения становятся следующими  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 0.36 : 0.33 : 0.30$ . Антинейтрино же, возникающие от распада нейтрона дают  $\bar{\nu}_e : \bar{\nu}_\mu : \bar{\nu}_\tau = 1 : 0 : 0$ . Вследствие осцилляций, эти отношения трансформируются в  $\bar{\nu}_e : \bar{\nu}_\mu : \bar{\nu}_\tau = 0.56 : 0.26 : 0.18$ .

Эти отношения могут измениться очень значительно, если присутствуют эффекты *CPT* и лоренц-нарушений. В случае лоренц-нарушений, отношения нейтринных ароматов от распада  $\pi$ -мезона модифицируются следующим образом:  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1/3 : 2/3 : 0 \rightarrow 0.42 : 0.57 : 0.013$ . Отношение же нейтринных ароматов от распада нейтрона  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 0 : 0$  трансформируется в отношение  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 0.70 : 0.27 : 0.027$ . В случае квантовой декогерентности все отношения, независимо от источника нейтрино, сдвигаются к отношению  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1/3 : 1/3 : 1/3$ .

### 2. Лоренцевские нарушения.

Эти нарушения имеют два проявления в отношениях различных ароматов. Если нейтрино генерируется за счет распада  $\pi$ -мезонов, то усиливается доля мюонных нейтрино. Кроме того, независимо от механизма генерации нейтрино, очень мала доля  $\tau$ -нейтрино. Если эффекты нарушения лоренц-инвариантности рассматриваются в нейтрино от распада  $\pi$ -мезонов, то нейтринный поток примерно на 60% состоит из мюонных нейтрино.

### 3. Квантовая декогерентность

Квантовая декогерентность в космических нейтрино приводит к равной доле нейтрино каждого аромата. Так как для нейтрино от распада  $\pi$ -мезонов это соотношение генерируется после осцилля-

ций и в отсутствие квантовой декогерентности, то эти нейтрино оказываются в это отношении не слишком информативными. Потенциально этот эффект декогерентности мог бы наблюдаться для нейтрино, возникающих от распада нейтрона.

### 10.11. CPT и лоренц-инвариантность в системах мезонов

Выше уже говорилось о том, что сравнение свойств материи и антиматерии очень информативно, поскольку *CPT* связывает частицы и античастицы. Эта идея допускает проверку в системе мезонов.

Как известно, осцилляции нейтральных мезонов определяются разностью энергий между мезоном и антимезоном. Хотя расширения *СМР* содержат одинаковый массовый параметр для кварков и антикварков, на эти частицы по-разному влияет нарушающий *CP* и лоренц-инвариантность фон. Поэтому дисперсионные соотношения для мезонов и антимезонов оказываются различными, т.е. мезоны и антимезоны имеют отличающиеся энергии. Это явление, в принципе, наблюдаемо с помощью интерферометрических методов.

Любое состояние нейтральных мезонов является линейной комбинацией шредингеровских волновых функций мезона  $p^0$  и антимезона  $\overline{p^0}$ . Если это состояние рассматривать как двухкомпонентный объект  $\psi(t)$ , то его временная эволюция определяется  $2 \times 2$  эффективным гамильтонианом  $\Lambda$ :  $i\partial_t \psi = \Lambda \psi$ . Хотя эффективный гамильтониан  $\Lambda$  различен для каждой системы нейтральных мезонов, для простоты мы ограничимся одним символом. Собственные состояния  $|p_a\rangle$  и  $|p_b\rangle$  гамильтониана  $\Lambda$  соответствуют распространяющимся физическим состояниям системы нейтральных мезонов. Они проявляют обычную временную эволюцию

$$\begin{aligned} |p_a(t)\rangle &= \exp(-i\lambda_a t) |p_a\rangle, \\ |p_b(t)\rangle &= \exp(-i\lambda_b t) |p_b\rangle, \end{aligned} \tag{10.170}$$

где комплексные параметры  $\lambda_a$  и  $\lambda_b$  являются собственными значениями гамильтониана  $\Lambda$ . Эти параметры можно записать в терминах физических масс  $m_a$ ,  $m_b$  и скоростей распада  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$  распространяющихся частиц

$$\lambda_a = m_a - \frac{1}{2}i\gamma_a, \quad \lambda_b = m_b - \frac{1}{2}i\gamma_b. \quad (10.171)$$

В целях удобства обычно работают в терминах суммы и разности собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \lambda_a + \lambda_b = m - \frac{1}{2}i\gamma, \\ \Delta\lambda &\equiv \lambda_a - \lambda_b = -\Delta m - \frac{1}{2}i\Delta\gamma, \end{aligned} \quad (10.172)$$

где использованы обозначения  $m = m_a + m_b$ ,  $\Delta m = m_b - m_a$ ,  $\gamma = \gamma_a + \gamma_b$  и  $\Delta\gamma = \gamma_a - \gamma_b$ . Эффективный гамильтониан  $\Lambda$  является комплексной  $2 \times 2$ -матрицей, и поэтому для рассматриваемой системы нейтральных мезонов содержит восемь вещественных параметров. Четыре из них соответствуют двум массам и двум скоростям распада. Среди оставшихся четырех параметров можно выделить три параметра, определяющие масштаб косвенного нарушения  $CP$  в системе нейтральных мезонов, и одну ненаблюдаемую фазу. Косвенное нарушение  $CPT$  в этой системе происходит только в том случае, если разность  $\Delta\Lambda = \Lambda_{11} - \Lambda_{22}$  двух диагональных элементов отлична от нуля. Таким образом, гамильтониан  $\Lambda$  содержит два вещественных параметра  $CPT$  нарушения. С другой стороны, косвенное нарушение  $T$ -инвариантности происходит только тогда, когда отношение  $|\Lambda_{21}/\Lambda_{12}|$  недиагональных элементов отлично от единицы. Эффективный гамильтониан содержит один вещественный параметр  $T$ -нарушения. Для гамильтониана  $\Lambda$  возможны различные параметризации. Очевидно, что для тяжелых мезонных систем  $D$ ,  $B_d$ ,  $B_s$  гораздо меньше известно о  $CPT$  и  $T$ -нарушениях, чем для  $K$ -систем. Поэтому желательно выбрать параметризацию эффективного гамильтониана, которая была бы модельно-независимой и пригодной для любой величины нарушений  $CPT$  и  $T$ -симметрий. Такая параметризация возможна, если записать два

диагональных элемента  $\Lambda$  как сумму и разность двух комплексных чисел, а два недиагональных элемента – как произведение и отношение комплексных чисел

$$\Lambda = \frac{1}{2}\Delta\lambda \begin{pmatrix} U + \zeta & VW^{-1} \\ VW & U - \zeta \end{pmatrix}. \quad (10.173)$$

В этом определении  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\zeta$  – безразмерные комплексные числа. Условия равенства следа  $\text{tr}\Lambda = \lambda$  и  $\det\Lambda = \lambda_a\lambda_b$  фиксируют комплексные параметры  $U$  и  $V$

$$U = \lambda/\Delta\lambda, \quad V = \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (10.174)$$

Таким образом,  $CPT$  и Т-свойства эффективного гамильтониана (10.173) определяются комплексными числами  $W = \omega \exp(i\omega)$  и  $\zeta = \text{Re}\zeta + i\text{Im}\zeta$ . Из четырех вещественных компонент фазы  $\omega$  и  $W$  – физически не наблюдаемы. Три оставшиеся компоненты – физические, причем  $\text{Re}\zeta$  и  $\text{Im}\zeta$  описывают  $CPT$ -нарушение, а  $\omega = |W|$  – Т-нарушение. При этом они связаны с компонентами  $\Lambda$  следующим образом:

$$\zeta = \Delta\Lambda/\Delta\lambda, \quad \omega = \sqrt{|\Lambda_{21}/\Lambda_{12}|}. \quad (10.175)$$

$CPT$ -сохранение подразумевает  $\text{Re}\zeta = \text{Im}\zeta = 0$ , а Т-сохранение требует  $\omega = 1$ . Заметим, что  $\omega\zeta$  – формализм, рассмотренный выше, можно связать с другими используемыми в литературе подходами, если принять определенные фазовые условия и учесть малость СР-нарушения. Например, в К-системах широко используется формализм, включающий  $\varepsilon_k$  и  $\delta_k$  и применимый при малости  $CPT$  и Т-нарушения. При этих предположениях  $\varepsilon_k \simeq 2\delta_k$ .

До сих пор мы обсуждали феноменологическое описание осцилляций нейтральных мезонов с точки зрения  $CPT$  нарушения. Обсудим теперь, как феноменологические параметры  $CPT$ -нарушения связаны с коэффициентами СМР. Поскольку минимальное СМР является релятивистской унитарной квантовой теорией поля, то это расширение удовлетворяет «анти- $CPT$  теореме» Гринберга:  $CPT$  нарушение должно сопровождаться нарушением лоренц-инвариантности. Таким образом, даже не проводя никаких

вычислений, мы можем заключить, что  $\delta_k$ , например, не может быть константой.

Лидирующие *CPT*-нарушающие вклады в  $\Lambda$  можно вычислить по теории возмущений, используя коэффициенты *CPT* и лоренц-нарушения, появляющиеся в СМР. Чтобы определить соотношение для параметра  $\varepsilon_k \simeq 2\delta_k$ , нужно найти разность  $\Delta\Lambda = \Lambda_{11} - \Lambda_{22}$  диагональных элементов  $\Lambda$ . В SME

$$\Delta\Lambda = \beta^\mu \Delta a_\mu, \quad (10.176)$$

где  $\beta^\mu = \gamma(1, \vec{\beta})$  – 4-скорость мезонного состояния в системе покоя наблюдателя. В (10.176) введено определение  $\Delta a_\mu = r_{q_1} a_\mu^{q_1} - r_{q_2} a_\mu^{q_2}$ , где  $a_\mu^{q_1}$  и  $a_\mu^{q_2}$  – коэффициенты *CPT* и лоренц-нарушения для двух валентных кварков в  $p^0$ -мезоне. Эти коэффициенты имеют размерность массы в первой степени и они возникают за счет членов в лагранжиане  $- a_\mu^q \bar{q} \gamma^\mu q$ , где  $q$  – обозначает кварковый аромат. Величины же  $r_{q_1}$ ,  $r_{q_2}$  характеризуют нормировку волновой функции, описывающей связанное состояние кварка и антикварка.

Следствием нарушения *CPT* и лоренц-инвариантности является зависимость наблюдаемых от 4-скорости и, следовательно, от 4-импульса. Стандартное предположение о постоянстве параметра  $\zeta$  для *CPT*-нарушения при весьма общих условиях унитарной квантовой теории поля оказывается несправедливым. В частности, присутствие 4-скорости в (10.176) подразумевает, что *CPT* наблюдаемые будут изменяться с величиной и ориентацией импульса мезона. Это имеет очень важное значение для экспериментальных исследований.

Отметим, что зависимость от 4-импульса способна вызывать временные вариации некоторых *CPT* наблюдаемых: вектор  $\Delta\vec{a}$  постоянен, Земля же вращается в экваториальной плоскости. Поскольку при выводе (10.176) использована лабораторная система координат, которая испытывает вращение, то наблюдаемые могут

испытывать временные вариации. Это явление можно проиллюстрировать с помощью рис. 10.1.

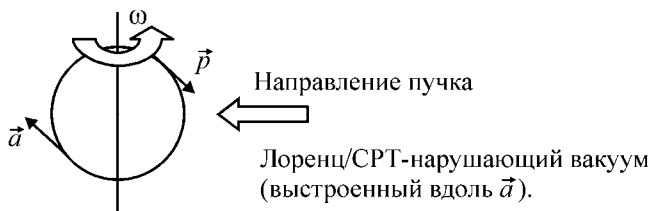


Рис. 10.1

Наблюдаемые, пропорциональные  $\sim (\vec{a} \cdot \vec{p})$ , будут иметь временные вариации (рис. 10.2).

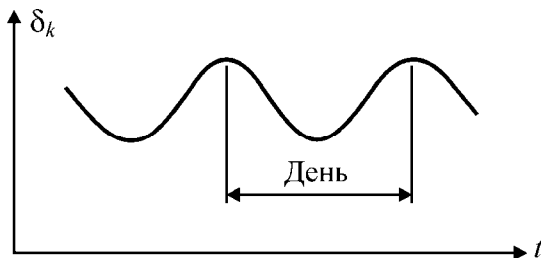


Рис. 10.2

Чтобы обнаружить временную вариацию, преобразуем выражение (10.176) для  $\Delta\Lambda$  из лабораторной системы координат в невращающуюся систему. Для этого обозначим пространственный базис лабораторной системы через  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , а невращающейся системы — через  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ . Далее, пусть в невращающейся системе ось  $\hat{Z}$  выстроена вдоль оси вращения Земли. Для наблюдателя временных вариаций необходимо, чтобы  $\cos\chi = \hat{z}\hat{Z} \neq 0$ . Но ось  $\hat{z}$  прецессирует вокруг  $\hat{Z}$  с частотой  $\Omega$ . При этом любой коэффициент  $\vec{a}$  лоренцевского нарушения с компонентами в лабораторной системе координат  $(a^1, a^2, a^3)$  имеет в невращающейся системе компоненты

$(a^X, a^Y, a^Z)$ . Преобразование между этими компонентами определяет временную зависимость  $\Delta \vec{a}$ , следовательно, и временные вариации  $\Delta \Lambda$ . Таким способом можно получить зависимость от импульса и времени *CPT*-нарушающего параметра  $\zeta$ . Для этого определим углы  $\theta$  и  $\varphi$  – полярные координаты относительно оси  $\hat{z}$  в лабораторной системе. В общем случае, лабораторную 3-скорость мезона  $p$  можно записать в следующей форме  $\vec{\beta} = \beta(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Тогда модуль импульса

$$p = |\vec{p}| = \beta m_p \bar{\gamma}(p), \quad (10.177)$$

$$\text{где } \bar{\gamma}(p) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_p^2}}.$$

В терминах этих величин

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \zeta(\hat{t}, \vec{p}) \equiv \zeta(\hat{t}, p, \theta, \varphi) = \\ &= \frac{\bar{\gamma}(p)}{\Delta \lambda} (\Delta a_0 + \beta \Delta a_z (\cos \theta \cos \chi - \sin \theta \cos \varphi \sin \chi) + \\ &+ \beta (\Delta a_Y (\cos \theta \sin \chi + \sin \theta \cos \varphi \cos \chi) - \Delta a_X \sin \theta \sin \varphi) \sin \Omega \hat{t} + \\ &+ \beta (\Delta a_X (\cos \theta \sin \chi + \sin \theta \cos \varphi \cos \chi) + \Delta a_Y \sin \theta \sin \varphi) \cos \Omega \hat{t}). \end{aligned} \quad (10.178)$$

Экспериментальная задача заключается в измерении четырех независимых коэффициентов  $\Delta a_\mu$  *CPT*-нарушения в квантовой теории поля. Заметим, что для каждой системы нейтральных мезонов эти коэффициенты могут отличаться. Для полного изучения *CPT*-нарушения требуется четыре независимых измерения для каждой системы мезонов.

Как было показано выше, ключевым моментом при изучении *CPT* нарушения является величина импульса мезона и его ориентация относительно *CPT* и лоренц-нарушающего коэффициента  $\Delta a^\mu$ . Ориентация же зависит от условий эксперимента, поэтому разные эксперименты чувствительны к различным комбинациям  $\Delta a^\mu$  компонент. Важным параметром оказывается направление пучка, который обычно фиксирован. Поскольку Земля, т.е. лабораторная



система, вращается по отношению к  $\Delta a^\mu$ , то направление пучка относительно  $\Delta a^\mu$  зависит от даты наблюдения и времени суток.

В экспериментах при высоких энергиях с фиксированной мишенью импульсы рожденных мезонов выстроены в направлении пучка. В этих экспериментах рождаются некоррелированные мезоны, и это упрощает их дальнейший анализ. В этом случае  $\beta_\mu \Delta a^\mu = (\beta^0 \Delta a^0 - \Delta \vec{a}_{11} \vec{\beta}_{11}) - (\Delta \vec{a}_\perp \vec{\beta}_\perp)$ , где параллельные ( $\parallel$ ) и перпендикулярные ( $\perp$ ) направления отсчитываются относительно оси вращения Земли. Согласно соотношению (10.178), в принципе, можно определить все четыре компоненты  $\Delta a^\mu$ : перпендикулярные компоненты – посредством измерения временных вариаций; другие же компоненты – путем измерения их зависимости от величины импульса. Однако при высоких энергиях изменение  $|\vec{\beta}|$  с энергией очень слабое, и это приводит к трудностям разделении компонент  $\Delta a^0$  и  $\Delta \vec{a}_\parallel$ .

Эти идеи были использованы при проведении экспериментов с К и D-мезонами. Для К-мезонов было проведено два независимых эксперимента по поиску различных комбинаций коэффициентов  $\Delta a^\mu$ . Один из этих экспериментов ограничил линейную комбинацию  $\Delta a_0$  и  $\Delta a_z$  на уровне  $10^{-20}$  ГэВ, а линейную комбинацию  $\Delta a_x$  и  $\Delta a_y$  – на уровне  $10^{-21}$  ГэВ. Эти эксперименты проведены на мезонах, сколлимированных в лабораторной системе. В этом случае величина  $\zeta$  упрощается, поскольку 3-скорость имеет вид  $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$ .

Для D-мезонов в эксперименте FOCUS получены два независимых ограничения. Линейная комбинация  $\Delta a_0$  и  $\Delta a_z$  ограничена на уровне  $10^{-16}$  ГэВ, а для  $\Delta a_y$  получено ограничение  $10^{-16}$  ГэВ.

CPT-измерения возможны и для коррелированных мезонных пар на симметричных коллайдерах. Эти эксперименты (KLOE и KLOE-II) проведены в лаборатории Фраскати (Италия), и они по своей сути заметно отличаются от экспериментов с фиксированной

мишенью. В частности, в этих экспериментах не важна энергетическая зависимость. Действительно, каонные пары рождаются при распаде  $\phi$ -мезона. На пороге рождения образуются моноэнергетические каоны. При этом широкое угловое распределение каонов в лабораторной системе требует точного определения угловых характеристик каонов для реконструкции направления  $\beta_\mu$  по отношению к  $\Delta a^\mu$ . Кроме того, дают дополнительную информацию корреляции мезонных пар.

Эти две особенности позволяют извлечь независимые ограничения на четыре компоненты  $\Delta a^\mu$ . Рассмотрим  $\phi$ -состояние  $J^{PC} = 1^{--}$ , распадающееся в момент времени  $t$  на коррелированную  $K\bar{K}$  пару. При этом один из каонов распадается в момент времени  $t + t_1$  на состояние  $f_1$ , а другой в момент времени  $t + t_2$  – на состояние  $f_2$ . Тогда для скорости двойного распада имеем

$$R_{12}(\vec{p}, t, \vec{t}, \Delta t) = |\hat{N}|^2 e^{-\bar{\gamma}\bar{t}/2} \left[ |\eta_1|^2 e^{-\Delta\gamma\Delta t/2} + |\eta_2|^2 e^{\Delta\gamma\Delta t/2} - \right. \\ \left. - 2|\eta_1\eta_2| \cos(\Delta m\Delta t + \Delta\phi) \right]. \quad (10.179)$$

В этом соотношении  $\eta_\alpha$  обозначает отношение амплитуд  $\frac{A(K_L \rightarrow f_\alpha)}{A(K_S \rightarrow f_\alpha)}$ ,  $\hat{N}$  – нормировочный фактор, содержащий отношение  $A(K_L \rightarrow f_1)/A(K_S \rightarrow f_2)$ . В выражении (10.179), также введены определения  $\vec{t} = t_1 + t_2$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma_S + \gamma_L$ ,  $\Delta\gamma = \gamma_L - \gamma_S$  и  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ . Амплитуды  $A(K_{L/S} \rightarrow f_\alpha)$  могут зависеть от импульса  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}$  и времени  $t$ . Очевидно, что эффекты  $CPT$ -нарушения  $R_{12}(\vec{p}, t, \vec{t}, \Delta t)$  содержатся в величинах  $\eta_\alpha$ ,  $\hat{N}$ .

Детальное изучение  $CPT$ -сигналов в экспериментах на симметричных коллайдерах с коррелированными каонами требует анализа соотношения (10.179) для различных конечных состояний.

Рассмотрим пример двойных полулептонных распадов коррелированных каонных пар на симметричном коллайдере. Предполагая

правило  $\Delta S = \Delta Q$ , можно показать, что скорость распада  $R_{\ell^+\ell^-}$  пропорциональна выражению, зависящему от отношения

$$\left| \frac{\eta_{\ell^+}}{\eta_{\ell^-}} \right| \simeq 1 - \frac{4 \operatorname{Re}(i \sin \hat{\phi} e^{i\hat{\phi}})}{\Delta m} \bar{\gamma}(\vec{p}) \Delta a_0. \quad (10.180)$$

В этом выражении величину  $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\Delta m}{\Delta \gamma} \right)$  называют супер-слабым углом. Отметим отсутствие угловых и временных зависимостей в выражении (10.180). Это следствие симметричности коллайдера, для которого  $\vec{\beta}_1 \Delta \vec{a} = -\vec{\beta}_2 \Delta \vec{a}$ . В форме (10.180) для любого  $R_{\ell^+\ell^-}$  угловая зависимость и зависимость от импульса входит лишь через общий фактор  $|\hat{N}\eta_{\ell^-}|^2$ . Очень важно измерить этот нормировочный фактор экспериментально.

Кроме двойного полулептонного канала, существуют и другие возможности для двух каонов. Среди них – смешанные двойные распады, для которых только один из двух каонов имеет  $\zeta_k$  – чувствительную моду. Для таких асимметричных распадных продуктов уже не происходит сокращение пространственных вкладов  $\Delta a^\mu$ , поэтому возможны независимые ограничения на три компоненты. В качестве примера рассмотрим детектор, аксептанс которого не зависит от азимутального угла  $\phi$ . Распределение мезонов от распада кваркония симметрично по  $\phi$ , поэтому зависимость  $\zeta_k$  от  $\phi$ -усредненных данных определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta_k^{av}(|\vec{p}|, \theta, t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \zeta_k(\vec{p}, t) = \frac{i \sin \hat{\phi} e^{i\hat{\phi}}}{\Delta m} \gamma [\Delta a_0 + \\ &+ \beta \Delta a_Z \cos \chi \cos \theta + \beta \Delta a_Y \sin \chi \cos \theta \sin \Omega t + \\ &+ \beta \Delta a_X \sin \chi \cos \theta \cos \Omega t]. \end{aligned} \quad (10.181)$$

Измеряя  $\theta$  и  $t$  – зависимость (10.181), в эксперименте с асимметричными двойными модами распада, можно, в принципе, извлечь отдельные ограничения на каждую из трех компонент параметра

$CPT$ -нарушения  $\Delta\bar{a}$ . Заметим, что этот результат не будет зависеть от параметров  $CP$ -нарушения, поскольку эти параметры не обладают ни угловой, ни энергетической зависимостью. Таким образом, комбинируя данные по асимметричным двойным распадным модам и двойным полулептонным модам, можно получить независимые ограничения на каждую из четырех компонент  $\Delta a_\mu$ .

Отметим, наконец, еще одну экспериментальную возможность. Предположим, что кварконий рождается не в покое, а с некоторым импульсом, как на асимметричном коллайдере. Тогда сумма  $\zeta_1 + \zeta_2$  не сокращается, и может быть чувствительна ко всем четырем коэффициентам  $\Delta a_\mu$ . Существующие асимметричные  $B_d$ -фабрики BaBar и Belle способны осуществить подобного типа эксперименты. Предварительные результаты эксперимента BaBar ограничивают различные комбинации компонент  $\Delta a^\mu$  для  $B_d$ -мезонов на уровне  $10^{-13}$  ГэВ.

Хотя  $CPT$  и лоренц-инвариантность являются необходимыми элементами общепризнанных законов физики, существует множество кандидатов на более «фундаментальную» теорию, в которых эти симметрии нарушаются. При этом исследование лоренц-симметрии открывает новые возможности для  $CPT$ -измерений, поскольку  $CPT$ -нарушение подразумевает нарушение лоренц-инвариантности. Потенциальный источник нарушения  $CPT$  и лоренц-инвариантности – спонтанное нарушение симметрии в струнных теориях. Поскольку этот механизм наиболее теоретически притягательный, а струны – кандидат на «фундаментальную» теорию, этот источник нарушения лоренц-инвариантности выглядит многообещающим.  $CPT$  и лоренц-нарушение возникает в схеме со скалярами с зависящими от пространственно-временных координат: градиент скаляров «выбирает» преимущественное направление в эффективном вакууме.

Интерферометрия нейтральных мезонов – блестящий метод исследования физики на планковских масштабах. В рамках унитарной квантовой теории поля  $CPT$ -нарушение связано с нарушением лоренц-инвариантности и характеризуется зависимостью от направления и энергии  $CPT$ -нарушающих наблюдаемых.

В схемах расширения стандартной модели для каждой мезонной системы имеется четыре независимых коэффициента  $CPT$ -нарушения. Экспериментальные ограничения на эти коэффициенты изменяются от  $10^{-13}$  до  $10^{-21}$  ГэВ.

## 10.12. Электрические дипольные моменты как «пробы» $CPT$ -инвариантности

Нерелятивистский гамильтониан нейтральной частицы со спином  $S$  в электромагнитном поле можно записать в виде комбинации двух слагаемых:

$$H = -\mu \vec{B} \frac{\vec{S}}{S} - d \vec{E} \frac{\vec{S}}{S}. \quad (10.182)$$

При отражении пространственных координат  $P(\vec{B} \cdot \vec{S}) = \vec{B} \cdot \vec{S}$ . Однако  $P(\vec{E} \cdot \vec{S}) = -\vec{E} \cdot \vec{S}$ . При отражении времени  $T(\vec{B} \cdot \vec{S}) = \vec{B} \cdot \vec{S}$  и  $T(\vec{E} \cdot \vec{S}) = -\vec{E} \cdot \vec{S}$ . Таким образом, присутствие ненулевого  $d$  означает существование как нарушения  $P$ , так и  $T$ . Если  $CPT$  сохраняется, то поиск  $d$  означает проверку  $CP$ -симметрии. Как мы уже отмечали, сохранение  $CPT$  в теории поля подразумевает унитарность, локальность и лоренц-инвариантность.

Покажем, что электрические дипольные моменты частиц (EDM) являются чувствительными пробниками  $CPT$ -нарушения. Точнее говоря, мы откажемся от лоренц-инвариантности, допуская тем самым возможность нарушения  $CPT$  и исследуем EDM, вызванные  $CPT$ -нечетными и  $CPT$ -четными взаимодействиями.

Предположим, что нарушение  $CPT$ -симметрии вызвано неизвестной физикой на очень малых масштабах, и оно проявляется во взаимодействии полей стандартной модели с внешними фоновыми полями, которые преобразуются как векторы и тензоры относительно лоренцевской группы. Простейшая возможность – ввести времениподобный конденсат вектора  $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$ , определяющий выделенную систему отсчета. Предположим, что  $n_\mu$  совпадает с лабораторной системой отсчета, хотя результат легко обобщается

на произвольную систему отсчета. В присутствии такого вектора EDM-часть гамильтониана (10.182) для частицы со спином  $1/2$  записывается в виде

$$L_{EDM} = -\frac{i}{2} d_{CP} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi + d_{CPT} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi F_{\mu\nu} n^\nu, \quad (10.183)$$

причем  $d_{CP} + d_{CPT} = d$ .

Таким образом, отрицательный результат по поиску EDM нейтрона позволяет получить ограничение на величину  $d_{CP} + d_{CPT}$ .

Вводя аксиальный 4-вектор спина  $a^\mu$  и 4-скорость  $u^\mu$ , обобщим (10.183) на частицу с произвольным спином:

$$L_{EDM} = F_{\mu\nu} a^\nu (d_{CP} u^\mu + d_{CPT} n^\mu). \quad (10.184)$$

Что касается более сложных фоновых полей, то следует заметить, что  $CPT$ -нечетные EDM-типа корреляции могут возникать из-за взаимодействия с неприводимым тензором  $D^{\mu\nu\rho}$ , симметричным по индексам  $\nu\rho$ :  $F_{\mu\nu} a^\rho D^{\mu\nu\rho}$ . Проанализируем структуру  $CPT$ -нечетных и  $CPT$ -четных эффективных лагранжианов, исходя из данных по EDM нейтронов и тяжелых атомов.

### 10.12.1. $CP$ -нечетные, $CP$ -четные операторы

Если  $CPT$ -нарушение связано с нарушением лоренц-инвариантности, то  $CPT$ -нечетные члены во взаимодействиях появляются в операторах нечетных размерностей. Трехмерные  $CPT$ -нечетные операторы

$$L_3 = -\sum \bar{\psi} (a^\mu \gamma_\mu + b^\mu \gamma_\mu \gamma_5) \psi, \quad (10.185)$$

где  $a_\mu$  и  $b_\mu$  – лоренц ( $CPT$ )-нарушающие связи с возможной зависимостью от ароматов. Что касается операторов размерности 5, то известны лишь некоторые типы  $CPT$ -нарушающих членов:

$$L_5 = -\sum \left[ c^\mu \bar{\psi} \gamma^\lambda F_{\lambda\mu} \psi + d^\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 F_{\lambda\mu} \psi + \right. \\ \left. + f^\mu \bar{\psi} \gamma^\lambda \gamma^5 \tilde{F}_{\lambda\mu} \psi + g^\mu \bar{\psi} \gamma^\lambda \tilde{F}_{\lambda\mu} \psi \right], \quad (10.186)$$

где включены линейные по напряженности калибровочного поля слагаемые.

В сумму (10.186) входят различные фермионы стандартной модели, причем  $F_{\mu\nu}$  – напряженность калибровочного поля. Предполагая, что векторные фоновые поля времениподобны и инвариантны относительно  $C$ -,  $P$ -,  $T$ -отражений, проведем классификацию свойств операторов (10.185), (10.186) относительно этих дискретных симметрий (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Коэффициент	Оператор	$C$	$P$	$T$
$a^0$	$\bar{\Psi}\gamma_0\Psi$	–	+	+
$b^0$	$\bar{\Psi}\gamma_0\gamma_5\Psi$	+	–	+
$c^0$	$F_{\lambda 0}\bar{\Psi}\gamma^\lambda\Psi$	+	+	–
$d^0$	$F_{\lambda 0}\bar{\Psi}\gamma^\lambda\gamma^5\Psi$	–	–	–
$f^0$	$\tilde{F}_{\lambda 0}\bar{\Psi}\gamma^\lambda\gamma^5\Psi$	–	+	+
$g^0$	$\tilde{F}_{\lambda 0}\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$	+	–	+

Имеется только один оператор, который нечетен относительно  $P$  и  $T$ , поэтому в анализе мы сконцентрируемся только на  $d^\mu$ .

Удобно классифицировать эти операторы на масштабе 1 ГэВ, где остаются только поля легких кварков, глюонов, фотонов, электронов и фотонов, а слабые калибровочные бозоны и тяжелые кварки уже «отщепились». Считая, что кварковое поле  $\psi_q$  несет электрический заряд  $Q_q$  и используя уравнения движения в электромагнитном и сильном фоновых полях:

$$iD_\mu\gamma^\mu\psi_q \equiv (i\partial_\mu - g_S t^a A_\mu^a - eQ_q A_\mu)\gamma^\mu\psi_q = m_q\psi_q, \quad (10.187)$$

получим тождество, связывающее кварковые операторы, содержащие глюоны и фотоны:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_q \left[ eQ_q F_{\mu\nu} + g_S t^a G_{\mu\nu}^a \right] \gamma^\nu \gamma_5 \Psi_q &= -i \bar{\Psi}_q \left[ D_\mu, D_\nu \gamma^\nu \gamma_5 \right] \Psi_q = \\ &= 2m_q \bar{\Psi}_q D_\mu \gamma_5 \Psi_q = m_q \bar{\Psi}_q \left[ D_\nu \gamma^\nu, \gamma_\mu \gamma_5 \right] \Psi_q = 0. \end{aligned} \quad (10.188)$$

В этом выражении квадратные скобки обозначают коммутатор. Соотношение (10.188) эффективно сокращает число независимых кварковых операторов, поэтому для исключения слагаемого  $\bar{\Psi}_q g_S t^a G_{\mu\nu}^a \gamma_5 \Psi_q$  его следует выразить через  $\bar{\Psi}_q eQ_q F_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma_5 \Psi_q$ . Интересно отметить, что для дираковской частицы нет  $CPT$ -нечетных,  $CP$ -четных операторов, имеющих только электромагнитные взаимодействия, поскольку в этом случае соотношение (10.188) превращается в тождество  $\bar{\Psi}_e F_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma_5 \Psi_e = 0$ . Исчезновение это эффективного оператора – хорошо известный факт при вычислении  $CP$ -нечетных EDM. Поправка к гамильтониану электрона, вызванная оператором  $\bar{\Psi}_e F_{0\nu} \gamma^\nu \gamma_5 \Psi_e$  пропорциональна произведению электрического поля и релятивистского спинового оператора  $\vec{E} \cdot \vec{\Sigma}$ . Это произведение можно представить как коммутатор другого оператора с полным дираковским гамильтонианом  $\vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = \left( \frac{1}{e} \right) [\vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla}, \vec{H}]$ . Поэтому среднее от  $\vec{E} \cdot \vec{\Sigma}$  по любым собственным состояниям оператора  $H$  обращается в ноль, т.е. действительно слагаемое  $\bar{\Psi}_e F_{0\nu} \gamma^\nu \gamma_5 \Psi_e$  на массовой поверхности обращается в ноль.

Учитывая эти тождества, запишем эффективный  $T$ ,  $P$ ,  $CPT$ -нечетный лагранжиан на ГэВ-ном масштабе в довольно простом виде:

$$L_{CPT} = \sum_{i=u,d,s} d_i^\mu \bar{q}_i \gamma^\lambda \gamma^5 F_{\lambda\mu} q_i. \quad (10.189)$$

Важное отличие между  $CP$ -нечетными и  $CPT$ -нечетными EDM возникает за счет  $SU(2) \times U(1)$ -свойств соотношения (10.189).  $CP$ -нечетные эффекты включают изменение спиральности, и, таким образом, соответствуют на масштабах, больших электрослабого масштаба, операторам размерности 6. При этом они ведут себя



$\sim 1/\Lambda_{CP}^2$ , если масштаб  $CP$ -нарушения становится больше.  $CPT$ -нечетные члены в выражении (10.189) соответствуют операторам размерности 5, например,  $\bar{q}_{R(L)}\gamma^\lambda\gamma^5 F_{\lambda\mu} q_{R(L)}$  и  $\bar{q}_L\gamma^\lambda\gamma^5\tau^a F_{\lambda\mu}^a q_L$  и не требуют изменения спиральности. Следовательно,  $CPT$ -нечетная физика «отщепляется» линейно и  $d_{CPT} \sim \frac{1}{\Lambda_{CPT}}$ .

Комбинация экспериментального предела на EDM нейтрона с этим условием дает значение масштаба  $CPT$ -нарушения

$$\Lambda_{CPT} \sim (10^{11} \div 10^{12}) \text{ ГэВ}. \quad (10.190)$$

Будущее поколение ускорителей могло бы быть чувствительным к  $CPT$ -нарушающей физике.

### 10.12.2. Проявления $CPT$ -нечетных EDM

Существует три основные группы наблюдаемых EDM, включающие EDM нейтронов, диамагнитных атомов (Hg, Xe, ...) и парамагнитных атомов (Tl, Cs,...). Довольно простая структура  $CPT$ -нечетного лагранжиана дает возможность определить зависимость этих наблюдаемых от различных  $d_i^\mu$  в выражении (10.189).

КХД вычисления  $CP$ -нечетных EDM близки к предсказаниям модели конституентных кварков:  $d_n \approx \frac{4}{3}d_d - \frac{1}{3}d_u$  с нулевым вкладом  $s$ -кварка. Если в  $CPT$ -нечетном случае использовать матричные элементы аксиально-векторных зарядов легких кварков в нулевом состоянии, то для EDM нейтрона получим

$$d_n \approx 0.8d_d^0 - 0.4d_u^0 - 0.1d_s^0. \quad (10.191)$$

Если взять экспериментальное ограничение  $|d_n| < 3 \cdot 10^{-26} e \cdot \text{см}$ , то можно сделать вывод о том, что EDM легких кварков  $\sim O(10^{-25} e \cdot \text{см})$ .

Измерение EDM диамагнитных атомов вполне конкурентноспособно с измерением  $d_n$  из-за вкладов цветовых EDM в

$CP$ -нечетную пион-нуклонную константу связи  $\bar{g}_{\pi NN}$ . Как уже отмечалось, взаимодействия (10.190) сохраняют кварковую киральность и включают фотонное поле, приводя таким образом к подавлению  $\bar{g}_{\pi NN}(d_q^\mu)$  и делая  $T$ -нечетный пионный обмен неэффективным. Следовательно, EDM диамагнитных атомов вызван EDM валентных нуклонов.

Для Hg EDM:

$$\begin{aligned} d_{\text{Hg}} &= -5 \cdot 10^{-4} (d_n + 0.1 d_p) \simeq \\ &\simeq -5 \cdot 10^{-4} (0.74 d_d^0 - 0.32 d_u^0 - 0.11 d_s^0). \end{aligned} \quad (10.192)$$

Разделение на  $CP$ -нечетные и  $CPT$ -нечетные EDM члены в соотношении (10.184) возникает из-за различия в их релятивистских эффектах.  $CP$ -нечетный EDM взаимодействует с магнитным полем, и это приводит к прецессии спина относительно  $[\vec{B}, \vec{v}]$ .

$CPT$ -нечетная компонента не дает вклада в прецессию частицы на круговой орбите. Таким образом, измерение EDM дейтрона в накопительном кольце способно разделить эти эффекты, если в экспериментальной установке обеспечена перпендикулярность  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ . Оказывается, что сигнал прецессии спина, вызванный  $CPT$ -нечетным EDM, отличен от нуля, но подавлен дейтронной аномалией  $|a_D| = 0.143$ , поскольку  $|\vec{E}| = |a_D \vec{B}|$ .

Существует множество других наблюдаемых, чувствительных к лоренц( $CPT$ )-нарушению, задаваемому операторами размерности три в (10.185). Могут ли операторы размерности 5 влиять на наблюдаемые посредством квантовых петель? Легко видеть, что последний оператор размерности 5 в соотношении (10.186)  $g^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\nu \psi$  приводит к квадратичной расходимости в одной петле к оператору размерности 3:  $b^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ . Тогда вклад  $b^\mu$  будет значительно превышать экспериментальную границу ( $\sim 10^{-31}$  ГэВ), вызывая тем самым необходимость “fine tuning”. Оказывается, что EDM операторы  $d^\mu$  препятствуют трансмутации  $a_\mu$  и  $b^\mu$  в выс-

ших порядках. Причина – различие в  $CP$ -свойствах. Таким образом, только петли с «внутренним»  $CP$ -нарушением способны трансформировать  $d^\mu$  в  $a^\mu$  или  $b^\mu$ . В стандартной модели этого достичь достаточно трудно, поскольку нарушение  $CP$  в сохраняющем аромат канале происходит в трех петлях, подавленных углами смешивания Кобаяши-Маскава и юкавскими константами.

Грубая оценка операторов размерности 3, полученная из многопетлевых  $CP$ -нарушающих поправок, дает для легкого кварка:

$$a^\mu, b^\mu \sim d^\mu \cdot (10^{-20} \div 10^{-18}) \text{ ГэВ}^2. \quad (10.193)$$

Это условие определяет уровень чувствительности для  $d_\mu \approx 10^{-12} \text{ ГэВ}^{-1}$ , аналогичный (10.190). Поэтому детектируемый сигнал  $CPT$ -нечетных EDM, индуцируемый векторным фоном, должен сопровождаться  $b^\mu$ . Различие между down и strange  $a_\mu$  членами можно обнаружить в нейтральных каонах, для которых типичное ограничение  $|a_s^0 - a_d^0| \approx 10^{-19} \div 10^{-20} \text{ ГэВ}$ .

#### 11.1. Введение

Нарушение  $CP$ -симметрии, где  $C$ - и  $P$ -операторы зарядового сопряжения и преобразования четности – одно из фундаментальных и наиболее интересных явлений в физике элементарных частиц. Как было установлено в 1957 году, слабые взаимодействия не инвариантны относительно  $P$ - и  $C$ -преобразований, однако в течение ряда лет сохранялась надежда, что  $CP$ -инвариантность не нарушается.

Рассмотрим, например, процесс распада  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  и применим к нему последовательно преобразования  $C$  и  $P$ :

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e \xrightarrow{C} \pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \xrightarrow{P} \pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e, \quad (11.1)$$

где левое состояние  $\bar{\nu}_e$  не наблюдается в природе. Только после применения дополнительного преобразования пространственной четности получается обычное правое электронное антинейтрино. Поэтому кажется, что  $CP$ -сохраняется в слабых взаимодействиях.

Однако в 1964 году было показано, что в слабых распадах  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$   $CP$ -инвариантность нарушается. В течение длительного времени считалось, что  $CP$ -нарушение наблюдается только в системе нейтральных каонов. Однако в 2001 году  $CP$ -нарушение было обнаружено в распадах нейтральных  $B$ -мезонов, и это открытие ознаменовало новую эпоху в исследовании  $CP$ -нарушения.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на значительные экспериментальные и теоретические усилия, механизм  $CP$ -нарушения в рамках стандартной модели до конца не осознан. Одна из популярных точек зрения состоит в том, что  $CP$ -нарушение связано с «новой физикой» вне стандартной модели. Например, с суперсимметричными моделями ( $SUSY$ ), лево-право-симметричными моделями, моделями с расширенным хиггсовским сектором. Кроме того, существование ненулевых масс нейтрино, обнаруженное в последнее время, также связывают с физикой вне стандартной модели.

Косвенные указания о нарушении  $CP$ -инвариантности следуют из космологических наблюдений. Одна из характерных особенностей Вселенной – космологическая барионная асимметрия на уровне  $O(10^{-10})$ . Как отмечал А.Д. Сахаров, необходимым условием генерации такой асимметрии Вселенной, помимо нарушения барионного числа и неравновесности, является нарушение  $CP$ -симметрии.

Расчеты показывают, что  $CP$ -нарушение в стандартной модели слишком мало, чтобы объяснить наблюдаемую асимметрию Вселенной. Следовательно, нужно предположить, что «новая физика» начинает проявляться на очень малых масштабах. К тому же мы не понимаем происхождения кварковых и лептонных масс, их смешивания. К этим явлениям могла быть причастна «новая физика».

## 11.2. $CP$ -нарушение в стандартной модели

Как известно, стандартная модель включает калибровочные поля:

глюоны  $G_{\mu\nu}^k, k = 1, \dots, 8$ .

$SU(2)_L$  – бозоны  $W_\mu^a, a = 1, 2, 3$ .

$U(1)_Y$  – бозон  $B_\mu$ .

А также:

кварки  $q_L = \begin{pmatrix} p_L \\ n_L \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad p_R \begin{bmatrix} 0, \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad n_R \begin{bmatrix} 0, -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$

лептоны  $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad e_R \begin{bmatrix} 0, -1 \end{bmatrix},$

хиггсовский бозон  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix},$

где в квадратных скобках представлены электрослабые квантовые числа  $[T, Y]$ .

Нарушение симметрии  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_{cm}$  вызвано хиггсовским потенциалом

$$U(\phi^+\phi) = -\mu^2(\phi^+\phi) + \lambda(\phi^+\phi)^2 = -L_{Higgs}, \quad (11.2)$$

$$\text{имеющим минимум} \quad \langle \phi^+\phi \rangle = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (11.3)$$

Электрослабая часть лагранжиана стандартной модели

$$L_{EW} = L_{gauge} + L_{Higgs} + L_{Kinet} + L_{Yukawa}, \quad (11.4)$$

где первое слагаемое содержит только калибровочные бозоны

$$L_{Kinet} = i\bar{g}_L\gamma D_\mu^{qL} q_L + i\bar{p}_R\gamma^\mu D_\mu^{pR} p_R + i\bar{n}_R\gamma^\mu D_\mu^{nR} n_R + \\ + i\bar{C}_R\gamma_\mu D_\mu^{C_R} C_R + \left| \left( i\partial_\mu - \frac{g}{2}\bar{\tau}\vec{W}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \phi \right|^2, \quad (11.5)$$

$$\text{причем} \quad iD_\mu = i\partial_\mu - \frac{g}{2}\bar{\tau}\vec{W}_\mu - g'YB_\mu, \quad iD_\mu = i\partial_\mu - g'YB_\mu, \quad (11.6)$$

для  $SU(2)_L$  дублетов и синглетов.

Юкавское взаимодействие

$$L_{Yukawa} = -i\bar{q}_L Y_d n_R \phi - \bar{q}_L Y_\mu p_R (i\tau_2 \phi^*) - \bar{L}_L Y_L C_R \phi + \text{э.с.}, \quad (11.7)$$

где  $Y_n$ ,  $Y_d$  и  $Y_l$  – комплексные  $3 \times 3$  матрицы констант связи.

Будем использовать матричное представление, в котором поля  $q_L$ ,  $n_R$  и т.д. являются  $3 \times 1$  векторами в пространстве поколений:

$$q_L = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{L1} \\ n_{L1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{L2} \\ n_{L2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{L3} \\ n_{L3} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad q_L = \begin{bmatrix} n_{R1} \\ n_{R2} \\ n_{R3} \end{bmatrix}. \quad (11.8)$$

$$\text{Тогда} \quad Y_n = \begin{bmatrix} Y_{n11} & Y_{n12} & Y_{n13} \\ Y_{n21} & Y_{n22} & Y_{n23} \\ Y_{n31} & Y_{n32} & Y_{n33} \end{bmatrix}, \quad i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (11.9)$$

В обозначениях, приведенных выше, круглые скобки соответствуют пространству  $SU(2)_L$ , а квадратные скобки – пространству поколений.

Калибровочные бозоны взаимодействуют с кварками в слабом базисе:

$$-L_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{p}_L \gamma^\mu n_L W_\mu^+ + \text{э.с.}, \quad (11.10)$$

$$-L_Z = \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \left\{ C_L^{up} \bar{p}_L \gamma^\mu p_L + C_L^{down} \bar{n}_L \gamma^\mu n_L + (L \leftrightarrow R) \right\}, \quad (11.11)$$

где  $C = T_3 - Q \sin^2 \theta_W$ .

Под слабым базисом понимается такой выбор  $q_L$ ,  $p_R$  и  $n_R$ , при котором разность  $L_{EW} - L_{Yukawa}$  остается инвариантной.

Два таких базиса связаны «преобразованием слабого базиса»:

$$\begin{pmatrix} p_{L'} \\ n_{L'} \end{pmatrix} = q'_L = W_L q_L = W_L \begin{pmatrix} p_L \\ n_L \end{pmatrix}, \quad (11.12)$$

$$p'_R = w_{p_R} p_R, \quad n'_R = w_{n_R} n_R.$$

Этим базисам соответствует глобальная группа симметрии ароматов

$$F = U(3)_{q_L} \otimes U(3)_{p_R} \otimes U(3)_{n_R}, \quad (11.13)$$

которая нарушает  $L_{Yukawa}$  до

$$F' = U(1)_B, \quad (11.14)$$

сохраняющей барионное число.

К сожалению, в любом базисе взаимодействия с хиггсовскими полями недиагональны. Эту проблему можно решить, выбрав кварковые состояния в массовом базисе  $u_L$ ,  $u_R$ ,  $d_L$ ,  $d_R$  посредством преобразований:

$$\begin{aligned} \bar{p}_L &= \bar{u}_L U_{u_L}^+, \quad \bar{n}_L = \bar{d}_L U_{d_L}^+, \\ p_R &= U_{u_R} u_R, \quad n_R = U_{d_R} d_R, \end{aligned} \quad (11.15)$$

где унитарные матрицы  $U$  выбраны так, чтобы диагонализировать юкавские константы:

$$M_U = \text{diag}(m_u, m_c, m_t) = \frac{v}{\sqrt{2}} U_{u_L}^+ Y_u U_{u_R}, \quad (11.16)$$

$$M_D = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) = \frac{v}{\sqrt{2}} U_{d_L}^+ Y_d U_{d_R}.$$

В этом базисе

$$\begin{aligned} -L_{Higgs} &= \left(1 + \frac{H^0}{v}\right) \{\bar{u} M_U u + \bar{d} M_D d\}, \\ -L_W &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_L (U_{u_L}^+ U_{d_L}) \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \text{э.с.}, \\ -L_Z &= \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \{C_L^{up} \bar{u}_L (U^+ U) \gamma^\mu u_L + \\ &+ C_L^{down} \bar{d}_L (U^+ U) \gamma^\mu u_L + (L \leftrightarrow R)\}, \end{aligned} \quad (11.17)$$

где  $H^0$  – хиггсовское поле, а матрица

$$V = U_{u_L}^+ U_{d_L} \quad (11.18)$$

называется матрицей Кабиббо-Кобаяши-Маскава (СКМ).

Заметим, что отсутствие нейтральных токов с изменением аромата является следствием унитарности матрицы СКМ.

Действительно, так как  $U_{u_L}$  и  $U_{d_L}$  – унитарны, то унитарной будет и матрица  $V$ . Как видно из (11.17), в этом случае взаимодействия диагональны по ароматам. К сожалению, возникает дополнительное усложнение из-за того, что матрицы  $U$  не определяются единственным образом выражением (11.16), т.е. массовый базис в (11.16) не достаточно определен.

В самом деле, при введении диагональных матриц

$$\begin{aligned} \theta_u &= \text{diag}(e^{i\theta_{u1}}, e^{i\theta_{u2}}, e^{i\theta_{u3}}), \\ \theta_d &= \text{diag}(e^{i\theta_{d1}}, e^{i\theta_{d2}}, e^{i\theta_{d3}}) \end{aligned} \quad (11.19)$$

и переопределении собственных массовых состояний

$$\begin{aligned} u'_L &= u_L \theta_u^+, \quad \bar{d}'_L = d_L \theta_d^+, \\ u'_R &= \theta_u u_R, \quad d'_R = \theta_d d_R \end{aligned} \quad (11.20)$$



выражения (11.17) не меняются.

Число параметров матрицы СКМ можно определить двумя способами. Сначала заметим, что унитарная  $3 \times 3$  матрица  $V$  имеет три угла и шесть фаз. Однако кварковые преобразования (11.20) не меняют  $L_W$  в (11.17), если матрица  $V$  изменяется при этом следующим образом:

$$V' = \theta_u V \theta_d^+. \quad (11.21)$$

Эта процедура позволяет исключить из матрицы  $V$  пять фаз.

Таким образом, остаются три вещественных параметра (угла) и одна ( $CP$ -нарушающая) фаза матрицы СКМ.

При другом подходе к оценке числа параметров и фаз матрицы СКМ отметим, что в двух юкавских матрицах  $Y_u$  и  $Y_d$  содержатся  $N_{Yuk} = 18$  величин и  $N_{Yuk} = 18$  фаз. При нарушении глобальной симметрии (11.13)  $F \rightarrow F'$  остается

$$N = N_{Yuk} - N_F + N_{F'} \quad (11.22)$$

параметров, где  $N_F$  и  $N_{F'}$  — число параметров в  $F$  и  $F'$ . Заметим, что (11.22) справедливо как для величин, так и фаз. Применяя (11.22) к стандартной модели, получаем  $9 = 2 \times 9 - 3 \times 3$  вещественных параметров (6 масс и три угла смешивания) и только одну фазу ( $CP$ -нарушающую фазу). Очевидно, что  $CP$ -нарушающей фазы нет, если имеются только два поколения кварков.

Поскольку имеется только одна нарушающая  $CP$ -фаза, то в стандартной модели любые две  $CP$ -нарушающие наблюдаемые пропорциональны друг другу.

Нарушение  $CP$ -связано с юкавскими константами, которые возникают при взаимодействии со скалярами, т.е.  $CP$  имеет прямое отношение к сектору спонтанного нарушения симметрии.

Для нарушения  $CP$  (или  $T$ ) необходимо иметь комплексные структуры в теории. Это легко понять, поскольку при  $CP$ -преобразовании операторы заменяются на эрмитово-сопряженные. Например, для заряженного  $SU(2)$  калибровочного поля  $W_+^\mu$  при  $CP$ -преобразовании

$$W_+^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{CP} \eta(\mu) W_-^\mu(-\vec{x}, t), \quad (11.23)$$

где  $\eta(0) = -1$  и  $\eta(i) = +1$ .

Таким образом, при  $CP$ -преобразовании оператор  $O(\vec{x}, t)$  заменяется на следующий оператор

$$O(\vec{x}, t) \xrightarrow{CP} O^+(-\vec{x}, t). \quad (11.24)$$

Поскольку лагранжианы должны быть эрмитовы, то член лагранжиана, содержащий оператор  $O$ , должен иметь структуру

$$L = aO + a^* O^+, \quad (11.25)$$

где  $a$  – комплексное число. Отсюда очевидно, что лагранжиан  $L$  будет  $CP$ -инвариантным, если  $a^* = a$ . Поэтому  $CP$ -нарушение связано с комплексной структурой теории. Однако наличия комплексной структуры, самой по себе, может оказаться недостаточно для  $CP$ -нарушения. Хорошо известным примером, подтверждающим это утверждение, является стандартная модель с двумя поколениями, в которой фазы в комплексных юкавских связях всегда путем вращения полей можно исключить. Существуют и примеры, когда в теории возникают  $CP$ -нарушающие члены без появления комплексных структур. Пример – знаменитый  $\theta F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$  член КХД, «ответственный» за сильную  $CP$ -проблему. Однако этот член связан с комплексной суперпозицией состояний, характеризующих вакуум теории.

Хотя  $CP$ -нарушение наблюдается экспериментально, в определенном отношении представляется естественным, чтобы  $CP$  сохранялась. Так в 10-мерной гетеротической струнной теории  $CP$  можно идентифицировать с произведением лоренц-преобразований в 10-мерном пространстве-времени и калибровочного преобразования. В этой теории фермионы и калибровочные поля находятся в присоединенном представлении группы  $E_8$ , и преобразование  $CP$  действует как инверсия 6-мерного компактного пространства 10-мерной теории. Таким образом, если 4-мерный мир должен возникнуть в этой теории, то наблюдаемые  $CP$ -нарушающие эффекты возникают при  $10d \rightarrow 4d$  компактификации. В теориях такого типа 4-мерные  $CP$ -нарушающие фазы возникают из геометрических соображений.

Даже в 4-х измерениях нарушить  $CP$  совсем непросто. В частности, теория, содержащая только фермионы и калибровочные поля,

сохраняет  $CP$  с точностью до  $\theta$ -члена. Такие теории содержат только вещественные константы  $g_i$ , поскольку соответствующие калибровочные поля  $A_i^\mu$  преобразуются по присоединенному представлению группы. Как известно, топологическая природа вакуума неабелевой калибровочной теории стандартной модели допускает присутствие  $\theta$ -членов:

$$L_{\text{КХД}} = \theta_W \frac{\alpha_2}{8\pi} W_a^{\mu\nu} \tilde{W}_{a\mu\nu} + \theta_S \frac{\alpha_3}{8\pi} F_a^{\mu\nu} \tilde{F}_{a\mu\nu}. \quad (11.26)$$

Однако из-за киральной природы электрослабой теории  $\theta_W$  можно исключить путем переопределения полей.  $\theta_S$ -член ограничен данными по электрическому дипольному моменту нейтрона ( $d_n < 6.3 \cdot 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{см}$ ):  $\theta_S < 10^{-10}$ . Малость  $\theta_S$  известна как сильная  $CP$ -проблема, которая подробно обсуждалась в главе 5. Строго говоря, эта проблема не решена, но существуют несколько способов, которые могли бы привести к ее разрешению:

А. Может оказаться, что  $\theta_S$  оказалась малой случайно, подобно другим параметрам стандартной модели (например, отношению  $m_e/m_t$ ). Но это объяснение, очевидно, не является удовлетворительным.

Б. Сильные взаимодействия (подобно электрослабым) обладают киральной симметрией, связанной с очень малой массой  $u$ -кварка и приводящей к тому, что  $\theta_S$  можно исключить переопределением полей. Однако такая возможность, по-видимому, противоречит адронному спектру.

В. Лагранжиану стандартной модели приписывается дополнительная киральная глобальная симметрия  $U(1)_{PQ}$ , которая приводит к  $\theta_S \rightarrow 0$ . В этом случае параметр  $\theta_S$  эффективно заменяется динамическим аксионным полем ( $\theta_S \rightarrow a(x)/f_a$ ). Однако аксионы не наблюдались, а масштаб нарушения  $f_a \gg (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ . Тем не менее, аксионы остаются кандидатами на темную материю Вселенной.

Г.  $CP$  является спонтанно нарушенной симметрией.

Очевидно, что  $\theta_S < 10^{-10}$  не может быть причиной нарушения  $CP$  в системах  $K$ - и  $B$ -мезонов.  $CP$ -нарушение в мезонах связано с переходами, изменяющими аромат, а член  $\theta_S F \tilde{F}$  диагонален по аромату.

Чтобы описать наблюдаемое  $CP$ -нарушение в отсутствие элементарных скалярных полей, нужны  $CP$ -нарушающие фермионные конденсаты. В качестве фермионных полей можно рассматривать не обычные кварки и лептоны, а технифермионы. Однако образование  $CP$ -нарушающих конденсатов  $\langle \bar{T}T \rangle \sim e^{i\delta_{TC}} \Lambda_{TC}^3$  с  $\Lambda_{TC} \sim G_F^{-1/2}$  весьма проблематично. На это впервые обратили внимание Зельдович, Кобзарев и Окунь, показавшие, что при спонтанно нарушенной  $CP$ -симметрии во Вселенной возникают домены с различными значениями  $CP$ . Эти домены разделены стенками, которые медленно диссипируют с понижением температуры, и это приводит к катастрофическим космологическим последствиям. Действительно, плотность энергии доменных стенок уменьшается линейно с температурой  $\rho \sim \sigma T$ . Если  $\sigma \sim G_F^{-3/2}$ , то плотность энергии стенок превышает плотность энергии Вселенной. Спонтанное нарушение  $CP$ -симметрии допустимо лишь в том случае, если масштаб этого нарушения превышает масштаб, на котором происходит инфляция, поскольку инфляция способна исключить доменные стенки. Однако этого не происходит в моделях, в которых фермионные конденсаты необходимы для нарушения  $SU(2) \times U(1)$ .

### 11.3. $CP$ -нарушение в скалярном секторе

Кажется естественным предположить, что экспериментально наблюдаемое  $CP$ -нарушение связано с присутствием скалярного сектора в теории. Пожалуй, можно сказать, что существование  $CP$ -нарушения при низких энергиях свидетельствует в пользу существования хиггсовского поля. Во всяком случае, все данные по  $K$ - и  $B$ -распадам согласуются с  $CKM$ -механизмом: наличием комплексных юкавских связей хиггсовского поля с кварками. Как хо-

рошо известно, с тремя поколениями кварков эта модель содержит только одну физическую фазу  $\delta_{CKM} \approx (59 \pm 13)^\circ$ .

Возможно ли идентифицировать источники, сохраняющие аромат, но нарушающие  $CP$ , в чисто хиггсовском секторе теории? Как мы увидим ниже, эти источники очень нелегко обнаружить, даже используя все наши знания о структуре слабых взаимодействий!

Стандартная модель с одним хиггсовским дублетом – очень специальный случай. Требование эрмитовости хиггсовского потенциала приводит к вещественным параметрам потенциала:

$$V = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (11.27)$$

Итак, в стандартной модели нет других  $CP$ -нарушающих фаз, кроме  $\delta_{CKM}$ . Однако, при наличии более одного хиггсовского дублета, хиггсовский потенциал может содержать  $CP$ -нарушающие фазы. Но и в этом случае имеются ограничения. Изучим природу этих ограничений на примере двух хиггсовских дублетов:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^0 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

Наиболее общий хиггсовский потенциал 2-дублетной модели можно записать как сумму трех членов, отражающих, помимо  $SU(2) \times U(1)$ -симметрии, специфические симметрии. Чтобы понять структуру слагаемых в потенциале, напомним, как дублет (11.26) преобразуется при действии операторов слабого гиперзаряда:

$$\chi \rightarrow e^{i\xi/2} \chi, \quad \phi \rightarrow e^{-i\xi/2} \phi. \quad (11.29)$$

Имеется и дополнительная абелева симметрия  $U(1)_{PQ}$ :

$$\chi \rightarrow e^{i\alpha} \chi, \quad \phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi. \quad (11.30)$$

Такая симметрия допускает киральное преобразование кварков, т.е. динамически  $\theta_S \rightarrow 0$ . Наконец, рассмотрим возможные дискретные симметрии  $\chi$  и  $\phi$  полей. В частности, чтобы избежать нейтральных токов с изменением аромата  $FCNC$ , можно рассмотреть дискретную симметрию  $D$ , которая позволяет иметь полю  $\phi$  связь

только с  $u_R$ , а полю  $\chi$  — только с  $d_R$ . При действии преобразования  $D$ :

$$\chi \rightarrow -\chi, \quad \phi \rightarrow \phi, \quad d_R \rightarrow -d_R, \quad u_R \rightarrow u_R. \quad (11.31)$$

Полный хиггсовский потенциал, как уже говорилось, есть сумма трех членов:  $V = V_1 + V_2 + V_3$ . Первый член ( $V_1$ ) инвариантен относительно  $SU(2) \times U(1) \times U(1)_{PQ} \times D$ ,  $V_2$  инвариантен относительно  $SU(2) \times U(1) \times D$ , а  $V_3$  инвариантен только относительно электро-слабой группы. Итак,

$$V_1 = \mu_1^2 \chi^+ \chi + \mu_2^2 \phi^+ \phi + \lambda_1 (\chi^+ \chi)^2 + \lambda_2 (\phi^+ \phi)^2 + \lambda_3 (\phi^+ \chi)(\chi^+ \phi) + \lambda_4 (\chi^+ \chi)(\phi^+ \phi), \quad (11.32)$$

$$V_2 = \lambda_5 e^{i\delta_5} (\chi^T C \phi)^2 + \lambda_5 e^{-i\delta_5} (\chi^T C \phi)^{2+}, \quad (11.33)$$

$$V_3 = \mu_{12}^2 e^{i\delta_{12}} (\chi^T C \phi) + \mu_{12}^2 e^{-i\delta_{12}} (\chi^T C \phi)^+ + \left[ \lambda_6 e^{i\delta_6} (\chi^T C \phi) + \lambda_6 e^{-i\delta_6} (\chi^T C \phi)^+ \right] \chi^+ \chi + \left[ \lambda_7 e^{i\delta_7} (\chi^T C \phi) + \lambda_7 e^{-i\delta_7} (\chi^T C \phi)^+ \right] \phi^+ \phi. \quad (11.34)$$

Как можно видеть, полный  $SU(2) \times U(1)$ -инвариантный потенциал содержит 4 фазы:  $\delta_5$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_6$  и  $\delta_7$ . Если же потребовать, чтобы  $V$  был  $U(1)_{PQ}$  инвариантным (т.е.  $V = V_1$ ), то все  $CP$ -нарушающие фазы хиггсовского сектора исключаются. Если присутствует только дискретная  $D$ -симметрия ( $V = V_1 + V_2$ ), то только одна фаза  $\delta_5$  имеется в хиггсовском секторе. Однако эта фаза не дает наблюдаемых  $CP$ -нарушающих эффектов. Фаза  $\delta_5$  в этом случае скоррелирована с фазой  $\theta$  хиггсовского вакуумного среднего:

$$\langle \chi^0 \rangle = v_\chi, \quad \langle \phi^0 \rangle = v_\phi e^{i\theta}. \quad (11.35)$$

Минимизация потенциала  $V = V_1 + V_2$  приводит к условию  $\sin(\delta_5 + 2\theta) = 0$ . Легко проверить, что все  $CP$ -нарушающие явления, подобные связи аксиального хиггсовского поля  $A$  с  $H^+H^-$ , пропорциональны фазовой комбинации  $\delta_5 + 2\theta$ , т. е.

$$g_{AH^+H^-} \sim \sin(\delta_5 + 2\theta) = 0. \quad (11.36)$$

Замечательно, что в случае двух хиггсовских дублетов требование отсутствия FCNC (т.е.  $D$ -симметрии) исключает образование других  $CP$ -нарушающих фаз, помимо  $\delta_{CKM}$ . Следует отметить несколько следствий этого результата. Так, в аксионных моделях, в которых  $U(1)_{PQ}$  нарушена на масштабе  $f_a \gg v \sim G_F^{-1/2}$ , не возникает дополнительного нарушения в хиггсовском секторе. В таких моделях спонтанное нарушение  $U(1)_{PQ}$  осуществляется за счет комплексного синглетного поля  $\sigma$ ,  $VEV$  которого  $\langle \sigma \rangle = f_a$ .  $U(1)_{PQ}$ -инвариантный потенциал

$$V_a = ke^{i\delta_a} \sigma^2 (\chi^T C \phi) + ke^{-i\delta_a} [\sigma^2 (\chi^T C \phi)]^+, \quad (11.37)$$

где  $kf_a^2 \equiv \mu_a^2 \sim v^2$  генерирует дополнительный (помимо  $V_1$ ) комплексный член к хиггсовскому потенциалу. Однако фаза  $\delta_a$  (как и  $\delta_5$  в предыдущем случае) сокращает фазу  $\theta$  дублетного хиггсовского  $VEV$  и не приводит к  $CP$ -нарушению.

Конечно, возможно получить  $CP$ -нарушение в хиггсовском секторе путем усложнения теории. Простейший способ – ввести дополнительный вещественный синглет  $\eta$ , нечетный относительно  $D$ -преобразования ( $\eta \rightarrow -\eta$ ). Тогда полный потенциал  $V = V_1 + V_2 + V_4$ , где  $V_4$  содержит дополнительную фазу  $\delta_4$ :

$$V_4 = k'(\eta^2 - f^2)^2 + \mu_4^2 e^{i\delta_\eta} \eta (\chi^T C \phi) + \mu_4^2 e^{-i\delta_\eta} \eta (\chi^T C \phi)^+. \quad (11.38)$$

Поскольку  $\eta$  приобретает  $VEV$ :  $\langle \eta \rangle = f$ , потенциал имеет три фазы:  $\delta_4$ ,  $\delta_5$  и  $\theta$ -фаза, связанная с  $VEV$  поля  $\phi$ . При этом линейная

комбинация этих фаз приводит к  $CP$ -нарушающим эффектам. Однако условие  $\langle \eta \rangle \neq 0$  спонтанно нарушает  $D$ -симметрию, т. е. образуются доменные стенки, и теория имеет проблемы с космологией.

В общем случае, если ввести достаточно сложный хиггсовский сектор, то возникают нетривиальные  $CP$ -нарушающие фазы. В модели Вайнберга [Phys. Rev. Lett. 37, 657 (1976)] с тремя хиггсовскими дублетами  $CP$ -нарушающие фазы возникают в связях заряженных хиггсов  $H^\pm$  с лептонами и кварками. Эта модель предсказывает существование новых явлений, например, поляризацию мюона в  $K_{l3}$  распаде:

$$\langle p_\perp^\mu \rangle \sim \frac{M_K^2}{M_H^2} \text{Im}(g_{H\mu\nu} g_{Hds}^*). \quad (11.39)$$

Этот эффект интересен тем, что он может быть больше, чем индуцированная поляризация за счет взаимодействия в конечном состоянии в распаде  $K^+ \rightarrow \mu^+ \pi^0 \nu_\mu$ , и этот эффект отсутствует в СКМ-модели.

## 11.4. Суперсимметрия и $CP$ -нарушение

Трудно относиться к  $CP$ -нарушающим моделям со многими хиггсами серьезно, поскольку нет какой-либо физической мотивации для этих моделей. В этом отношении суперсимметричные ( $SUSY$ ) расширения гораздо более оправданны. К сожалению,  $CP$ -нарушение в этих моделях определяется способом  $SUSY$ -нарушения. Поэтому эти модели весьма ограничены в своих предсказательных возможностях. Как будет видно, в этих моделях имеются трудности как с  $CP$ -нарушением, так и с сохранением аромата.

Как известно, суперсимметричное расширение стандартной модели требует появления двух хиггсовских дублетов  $\chi$  и  $\phi$ . Хиггсовский потенциал в суперсимметричной стандартной модели ( $SUSY SM$ ) не содержит  $V_2$  и  $V_3$  членов, т. е.  $V = V_1$ , причем различные параметры в  $V_1$  связаны с  $SU(2) \times U(1)$ -константами. Без  $SUSY$  на-



рушения, однако, не только потенциал  $V$  сохраняет  $CP$ , но и не нарушает  $SU(2) \times U(1)$ -симметрию, поскольку  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . В результате, введение мягко нарушающих  $SUSY$  членов оказывается необходимым как для расщепления по массам частиц и счастии, так и для нарушения электрослабой симметрии. В простейшей схеме  $SUSY$ -нарушения это нарушение осуществляется гравитацией, причем это нарушение не зависит от аромата. При этом  $CP$ -нарушающие фазы возникают по четырем причинам:

- 1) в комплексном массовом члене глюино:  $m_{1/2} \lambda_i \lambda_i$ ;
- 2) в комплексном коэффициенте  $A$  юкавских взаимодействий в скалярном секторе:  $A \Gamma_u \tilde{Q}_L \phi \tilde{f}_R + A \Gamma_d \tilde{Q}_L \chi \tilde{d}_R + \text{э.с.}$ ;
- 3) в комплексном коэффициенте  $B$  билинейных скалярных членов:  $B \mu (\chi^T C \phi) + \text{э.с.}$ ;
- 4) в комплексном коэффициенте  $\mu$ , характеризующем сохраняющий массовый член хиггсина:  $\mu (\tilde{\chi}^T C \tilde{\phi})$ .

Можно проверить, что только две из этих четырех фаз приводят к физическим эффектам. Например, член  $B \mu$  эквивалентен  $\mu_{12}^2 e^{i\delta_{12}}$  в обозначениях (11.34), однако эта фаза сама по себе не дает вклада в  $CP$ -нарушающие эффекты.

Тем не менее, как показывает рассмотренный выше простой пример, если в теории имеется  $SUSY$ -нарушение, то в ней легко получить  $CP$ -нарушение. Трудность состоит в другом: как согласовать  $SUSY$ -нарушающие и  $CP$ -нарушающие вклады с экспериментальными ограничениями? В  $SUSY$ -расширениях стандартной модели существуют два типа ограничений. Первый тип ограничений связан с  $CP$ -нарушающими явлениями, которые сохраняют аромат. Еще 20 лет назад было предсказано, что электрический дипольный момент нейтрона (ЭДМН) ограничивает  $CP$ -нарушающие фазы, возникающие в  $SUSY$ -расширениях стандартной модели. Электрический дипольный момент нейтрона

$$d_n \sim \left[ 300 \left( \frac{100 \text{ ГэВ}}{\tilde{m}} \right)^2 \sin \phi_{A,B} \right] \cdot 6.3 \cdot 10^{-26} \text{ е} \cdot \text{см}. \quad (11.40)$$

В этом выражении  $\tilde{m}$  – типичная масса суперпартнера,  $\phi_{A,B}$  – две независимые  $CP$ -нарушающие фазы, входящие в простейшую  $SUSY$ -нарушающую схему, описанную выше. Чтобы удовлетворить современным ограничениям на  $d_n$ , для  $\tilde{m} \sim 100$  ГэВ фазы должны быть  $\sim O(10^{-3})$ .

Другой тип ограничений на аромат и  $CP$ -структуру  $SUSY$ -нарушающих членов следует из-за возникновения  $FCNC$ -взаимодействий вследствие петлевых вкладов  $SUSY$ -материи. Эти петлевые поправки могут приводить к процессам нейтральных токов с изменением аромата, запрещенным экспериментальными данными.

В результате  $SUSY$   $CP$ -нарушающие эффекты в секторе ароматов зависят от того, как описываются  $SUSY$ -индуцируемые процессы нарушения аромата. Известны три возможности разрешения этой проблемы:

а)  $FCNC$ -процессы подавлены в предположении универсальности масс скварков:  $\Delta\tilde{m}^2 \ll \tilde{m}^2$ ;

б)  $FCNC$ -процессы подавлены в предположении о динамической «выстроенности» кварк-скварковых связей с глюино:  $g_{\tilde{g}ij} \sim \delta_{ij}$ ;

в) все петлевые поправки подавлены, если считать тяжелыми глюино и скварки:  $\tilde{m} \gg \text{ТэВ}$ .

## 11.5. Комплексная СКМ из спонтанного нарушения $CP$ и отсутствие $FCNC$

Является ли наблюдаемое  $CP$ -нарушение спонтанно нарушенным по своей сути или связано со структурой юкавских связей теории? Этот вопрос имеет важное космологическое значение, поскольку спонтанное  $CP$ -нарушение приводит к образованию доменных стенок с бесконечной плотностью энергии. Чтобы этого избежать, следует считать, что масштаб нарушения  $CP$  превышает характерный масштаб инфляции.

При практическом построении моделей спонтанного нарушения  $CP$  обычно выбирают одно или больше хиггсовских полей с комплексными вакуумными средними. Очевидно, что этот способ спонтанного нарушения  $CP$  требует расширения стандартной мо-

дели, поскольку в стандартной модели вакуумное среднее от хиггсовского поля не является комплексным. Кроме того, спонтанное нарушение  $CP$  связано с ограничениями на реалистические модели, и это приводит к таким нежелательным эффектам, как  $FCNC$ . Таким образом, построение реалистических моделей спонтанного  $CP$ -нарушения должно включать:

а) действительное  $CP$ -нарушение, приводящее к нетривиальной комплексной  $CKM$ -матрице. Этого достичь не так просто, поскольку  $CP$ -инвариантность лагранжиана приводит к вещественным юкавским связям;

б) естественный механизм подавления  $FCNC$  в хиггсовском секторе. Это опять-таки нетривиальная задача, поскольку появление  $FCNC$  коррелировано с генерацией комплексной  $CKM$ -матрицы посредством  $CP$ -нарушающих вакуумных фаз.

Обсудим условия, при которых можно избежать отмеченные трудности. Будут рассмотрены два класса моделей: 1) содержащие расширение только хиггсовского сектора стандартной модели; 2) расширения фермионного сектора. Во втором случае, как мы увидим, возникают отклонения от унитарности  $CKM$ -матрицы.

### 11.5.1. Модель с двумя хиггсовскими дублетами для спонтанного $CP$ -нарушения и $FCNC$

Простейшим расширением стандартной модели, содержащим спонтанное  $CP$ -нарушение ( $CCPH$ ), является модели с двумя хиггсовскими дублетами. Если обозначить два хиггсовских дублета через  $\phi_{1,2}$  и определить величину  $V_0(x, y) = -\mu_1^2 x - \mu_2^2 y + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 xy$ , то потенциал

$$V(\phi_1, \phi_2) = V_0(\phi_1^+ \phi_1, \phi_2^+ \phi_2) + V_{12}, \quad (11.41)$$

где

$$\begin{aligned} V_{12}(\phi_1, \phi_2) = & \mu_{12}^2 \phi_1^+ \phi_2 + \lambda_4 (\phi_1^+ \phi_2)^2 + \lambda_5 \phi_1^+ \phi_2 \phi_1^+ \phi_1 + \\ & + \lambda \phi_1^+ \phi_2 \phi_2^+ \phi_2 + \text{э.с.} + \lambda'_3 \phi_1^+ \phi_2 \phi_2^+ \phi_1. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Запишем теперь потенциал в терминах электрически нейтральных компонент дублетов. Он выглядит точно так же, как (11.42),

если понимать различные поля как нейтральные компоненты полей. Для обсуждения спонтанного *CP*-нарушения выберем вакуумные средние в виде:

$$\langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \langle \phi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (11.43)$$

Тогда потенциал в минимуме

$$\begin{aligned} V(v_1^2, v_2^2, \delta) = & V_0(v_1^2, v_2^2) + \frac{1}{4} \lambda'_3 v_1^2 v_2^2 + \mu_{12} v_1 v_2 \cos \delta + \\ & + \frac{1}{2} \lambda_4 v_1^2 v_2^2 \cos 2\delta + \frac{1}{2} (\lambda_5 v_1^2 + \lambda_6 v_2^2) v_1 v_2 \cos \delta. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Тогда получаем три уравнения для экстремума

$$\begin{aligned} & \left[ -\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda'_3) v_2^2 + \lambda_4 v_2^2 \sin 2\delta \right] v_1 + \\ & + v_2 \left[ \mu_{12}^2 \cos \delta + \frac{1}{2} (3\lambda_5 v_1^2 + \lambda_6 v_2^2) \cos \delta \right] = 0, \end{aligned} \quad (11.45)$$

$$\begin{aligned} & \left[ -\mu_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda'_3) v_1^2 + \lambda_4 v_1^2 \sin 2\delta \right] v_2 + \\ & + v_1 \left[ \mu_{12}^2 \cos \delta + \frac{1}{2} (\lambda_5 v_1^2 + 3\lambda_6 v_2^2) \cos \delta \right] = 0, \end{aligned} \quad (11.46)$$

$$-\sin \delta \left[ \mu_{12}^2 v_1 v_2 + 2\lambda_4 v_1^2 v_2^2 \cos \delta + v_1 v_2 (\lambda_5 v_1^2 + \lambda_6 v_2^2) \right] = 0. \quad (11.47)$$

Обсудим применение этих уравнений для *CCPH* и *FCNC*. Записывая юкавские связи в виде  $L_Y = \sum_{a,b,i} h_{ab}^{u,i} (\bar{Q}_{La} \phi_i u_{R,b} + u \leftrightarrow d) + \text{э.с.}$ ,

увидим, что в общем случае существуют *FCNC* за счет нейтральных компонент хиггсовских бозонов. Существуют две возможности подавления этих *FCNC*. Одна из возможностей включает введение дополнительных симметрий для сохранения аромата (*FC*) в хиггсовском секторе. Вторая возможность состоит в том, что нейтральный хиггсовский бозон, осуществляющий *FCNC*, очень тяжелый.

### 11.5.2. Исключение FCNC с помощью дополнительных симметрий

Хорошо известно, что можно избежать FCNC путем введения, например,  $Z_2$ -симметрии, ограничивающей юкавские связи таким образом, что только один хиггсовский дублет формирует массы кварков  $d$ -типа, а другой дублет приводит к массам  $u$ -кварков. Однако именно эта симметрия препятствует спонтанному нарушению CP. Возможный путь избежать эту трудность – введение третьего хиггсовского дублета. Однако в этом случае СКМ-матрица оказывается вещественной, что противоречит экспериментальным данным. Причина вещественности СКМ-матрицы состоит в том, что вакуумная фаза, возникающая в кварковой массовой матрице, может быть исключена путем переопределения кварковых полей.

### 11.5.3. Подавление FCNC большими хиггсовскими массами

Если диагонализировать юкавские связи  $h^{u,d,1}$ , то можно обнаружить, что нейтральный хиггс ( $h$ ) дублета  $\phi_1$  имеет сохраняющую аромат связь, а хиггс ( $H$ ) дублета  $\phi_2$  имеет нарушающую аромат связь. В общем случае два нейтральных хиггсовских поля смешиваются, т. е.  $h^{u,2}$ -связь, которая в симметричном пределе содержит только хиггсовское поле  $H$ , будет смешивать  $H$  с легким хиггсом  $h$ , но это смешивание пропорционально  $m_h^2/M_H^2$ .

Таким образом, FCNC процессы будут возникать на древесном уровне за счет обмена  $H$ -бозоном, и их вклад  $\sim M_H^{-2}$ . Вклад же эффектов смешивания тоже пропорционален  $M_H^{-2}$ . Поэтому для подавления FCNC-взаимодействий следует считать  $M_H$  очень большой. Этого можно добиться, если  $-\mu_2^2 > 0$  и  $|\mu_2^2| \gg v_{\text{слаб.}}$ . Обратимся к уравнению (11.46): это уравнение определяет масштаб вакуумного среднего  $v_2$ , который зависит от «смешанного» слагаемого

$\mu_{12}$ . Возможны два случая: 1)  $\mu_{12}^2 \sim v_{\text{слаб.}}^2$ ; 2)  $\mu_{12}^2 \sim M_H^2 \sim |\mu_2^2| \gg v_{\text{слаб.}}^2$ .

В первом случае из (11.46) получаем

$$v_2 \sim \lambda_5 \frac{v_1^3}{|\mu_2^2|} \ll v_1, \quad (11.48)$$

т.е. вакуумное среднее поля  $\phi_2$  при отсутствии  $FCNC$  сильно подавлено. Заметим, что масса второго нейтрального хиггсовского бозона  $\sim v_2$ . Подставляя это значение  $v_2$  в (11.46), получаем, что для «естественных» значений  $(\lambda_i)$  единственное решение для  $CP$ -нарушающей фазы  $\delta = 0, \pi, \dots$

С другой стороны, для случая (11.42)  $v_2 \sim v_{\text{слаб.}}$ , однако уравнение (11.47) не приводит к ненулевым значениям  $\delta$ , поскольку  $\mu_{12}^2 v_1 v_2 \gg 2\lambda_4 v_1^2 v_2^2$ . При этом член в скобках не обращается в ноль, т.е.  $\sin \delta = 0$ , и спонтанное нарушение  $CP$ -отсутствует. Таким образом, в рассматриваемой простой модели требование отсутствия эффекта нейтральных токов означает отсутствие спонтанного нарушения  $CP$ . Чтобы получить достаточно большую фазу спонтанного нарушения  $CP$ , надо в соотношении (11.47) иметь величину  $v_2$ , сравнимую с  $v_1$ . Чтобы это обеспечить, нужно иметь  $|\mu_2^2| \sim v_{\text{слаб.}}^2$ , а это означает большие эффекты  $FCNC$  при малых энергиях. Этот результат можно пояснить и следующим образом. В модели с двумя хиггсовскими дублетами можно изменить базис хиггсовских бозонов, переходя к новым дублетам  $\Phi_1 = (v_2 e^{i\delta} \phi_1 - v_1 \phi_2) / \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ , а  $\Phi_2$  выбирается как ортогональная комбинация к  $\Phi_1$ . Тогда очевидно, что  $\langle \Phi_1 \rangle = 0$ , а  $\langle \Phi_2 \rangle \neq 0$ , при этом кварковые массовые матрицы остаются неизменными. Далее, выберем параметры хиггсовского потенциала таким образом, чтобы масса  $\Phi_1$  оказалась очень большой, и чтобы  $FCNC$ -эффекты были подавленными. В этом случае эффективная теория на мас-

штабе масс, ниже массы  $M_{\Phi_1}$ , оказывается стандартной моделью (в нулевом порядке по  $M_W/M_{\Phi_1}$ ). В этом порядке вакуумное среднее поля  $\Phi_2$  (эквивалентное стандартной модели Хиггса) будет вещественным, и спонтанное нарушение  $CP$  в теории будет отсутствовать (с точностью до  $M_W/M_{\Phi_1}$ ). Таким образом, в пределе нулевых FCNC снова нет спонтанного нарушения  $CP$ . Этот результат можно обобщить на произвольное число хиггсовских дублетов.

#### 11.5.4. Спонтанное нарушение $CP$ на большом масштабе

Покажем, что проблему  $FCNC$  можно избежать, если спонтанное нарушение  $CP$ -симметрии возникает на большом масштабе. Сначала обсудим модель с двумя  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  хиггсовскими дублетами  $\phi_{1,2}$  и комплексным дублетом  $\sigma$ . В этой модели потенциал

$$V_{\phi_{1,2},\sigma} = V(\phi_{1,2}) + V(\sigma) + V(\phi, \sigma), \quad (11.49)$$

где  $V(\phi_{1,2})$  определяется соотношениями (11.1), (11.3), а два других слагаемых задаются выражениями:

$$V(\sigma) = -M_0^2 \sigma^* \sigma + M_1^2 \sigma^2 + \lambda_6 (\sigma^* \sigma)^2 + \lambda'_\sigma \sigma^4 + \lambda''_\sigma \sigma^3 \sigma^* + \text{э.с.} \quad (11.50)$$

$$\text{и} \quad V(\phi, \sigma) = M_{2,ab} \phi_a^+ \phi_b \sigma + k_{1,ab} \phi_a^+ \phi_b \sigma^2 + k_{2,ab} \phi_a^+ \phi_b \sigma^* \sigma + \text{э.с.} \quad (11.51)$$

Очевидно, что минимуму потенциала  $V(\sigma)$  соответствуют  $\langle \sigma \rangle = \Lambda e^{i\alpha}$ , где  $\Lambda \sim M_{0,1,2} \gg v$ , а величина  $\alpha$  может быть большой. Подставляя это вакуумное среднее в потенциал, запишем эффективный потенциал для  $\phi_{1,2}$  при низких энергиях:

$$V_{\text{эф}}(\phi_1, \phi_2) = V(\phi_{1,2}) + V_{\text{нов}}, \quad (11.52)$$

где

$$\begin{aligned} V_{\text{нов.}} &= (M_{2,ab} \Lambda e^{i\alpha} + k_{1,ab} \Lambda^2 e^{2i\alpha} + k_{2,ab} \Lambda^2) \phi_a^+ \phi_b + \text{э.с.} \equiv \\ &\equiv \Lambda^2 (\lambda_{11} \phi_1^+ \phi_1 + \lambda_{22} \phi_2^+ \phi_2 + \lambda_{12} e^{i\beta} \phi_1^+ \phi_2) + \text{э.с.} \end{aligned} \quad (11.53)$$

Оставляя только нейтральные компоненты хиггсовских дублетов, получаем

$$V_{\text{эфф}} = \Lambda^2 \left( \lambda_{11} \phi_1^+ \phi_1 + \lambda_{22} \phi_2^+ \phi_2 + \lambda_{12} e^{i\beta} \phi_1^+ \phi_2 + \text{э.с.} \right) + \sum \lambda_{abcd} \phi_a^+ \phi_b \phi_c \phi_d + \text{э.с.}, \quad (11.54)$$

где  $\Lambda \gg v$ . Очевидно, что  $CP$  спонтанно нарушена на большом масштабе  $\Lambda$ . При малых энергиях  $CP$  нарушена за счет билинейных членов по  $\lambda_{12}$ . Заметим, что оба поля  $\phi_{1,2}$  имеют юкавские связи, и мы можем переопределить фазу одного дублетного поля (скажем,  $\phi_2$ ):  $\phi_2 \rightarrow e^{-i\beta} \phi_2$  так, чтобы все билинейные и  $O(\Lambda^2)$ -члены в потенциале стали независимыми от фазы, а юкавские связи стали комплексными. Эта эффективная теория при низких энергиях выглядит как  $CP$ -нарушающая теория. При этом юкавские связи в лагранжиане

$$L_Y = \bar{Q}_{L_a} \left( h_{ab}^{u,1} \phi_1 + h_{ab}^{u,2} e^{-i\beta} \phi_2 \right) u_{R,b} + \bar{Q}_{L_a} \left( h_{ab}^{d,1} \tilde{\phi}_1 + h_{ab}^{d,2} e^{i\beta} \tilde{\phi}_2 \right) d_{R,b} + \text{э.с.} \quad (11.55)$$

До сих пор не использовалась комплексность  $CKM$  матрицы. Чтобы обнаружить эту комплексность, нужно показать, что вакуумное среднее  $\phi_2$ , содержащее фазу, не оказывается слишком малым при требовании подавления  $FCNC$ . Чтобы это показать, снова запишем условия экстремума потенциала. Для простоты оставим только  $\lambda_{1111}$ ,  $\lambda_{2222}$  и  $\lambda_{1122}$  члены потенциала:

$$\left( -\mu_1^2 + \Lambda^2 \lambda_{11} + \lambda_{1111} v_1^2 + \lambda_{1122} v_2^2 \right) v_1 + v_2 \left( \Lambda^2 \lambda_{12} \right) = 0, \quad (11.56)$$

$$\left( -\mu_2^2 + \Lambda^2 \lambda_{22} + \lambda_{2222} v_2^2 + \lambda_{1122} v_1^2 \right) v_2 + v_1 \left( \Lambda^2 \lambda_{12} \right) = 0. \quad (11.57)$$

Из этих уравнений следует, что  $v_1$  и  $v_2$  — одного порядка по отношению к массам нейтральных хиггсов, и это приводит к  $CKM$ -механизму  $CP$ -нарушения. Если массы нейтральных хиггсов возрастают, нужно подобрать параметры так, чтобы один из них был легким с массой  $\ll \Lambda$ , а другой (для подавления  $FCNC$ ) оставался тяжелым. Очевидно, что в этом случае нет необходимости изменения фазы  $\phi_2 \rightarrow e^{-i\beta} \phi_2$  и исключения фазы в билинейных



членах. Если не изменять фазу, то условие экстремума хиггсовского потенциала будет выглядеть следующим образом:

$$-\Lambda^2 \lambda_{12} v_1 v_2 \sin(\beta + \delta) - \sin \delta \left[ 2\lambda_4 v_1^2 v_2^2 \cos \delta + v_1 v_2 (\lambda_5^2 v_1^2 + \lambda_6^2 v_2^2) \right] = 0. \quad (11.58)$$

Поскольку  $\Lambda^2 \gg v^2$ , то очень хорошим приближением является  $\beta = -\delta$ . (11.59)

Фазы  $\delta$  при этом появляются в кварковых массовых матрицах, которые становятся комплексными.

### 11.5.5. Спонтанное нарушение $CP$ без $FCNC$ в фермионных расширениях стандартной модели

Расширим стандартную модель, введя синглетный вектороподобный фермион  $D$ -типа:  $(D_{L,R})$  с  $U(1)_Y$  квантовым числом  $\left(-\frac{2}{3}\right)$ , а также синглетное комплексное хиггсовское поле  $\sigma$ . При этом потенциал поля  $\sigma$  выберем в виде (11.51). Поле  $\sigma$  будет иметь комплексное вакуумное среднее, приводящее к спонтанному нарушению  $CP$ :  $\langle \sigma \rangle = \Lambda \gg v$ .  $CP$ -нарушение трансформируется на слабый масштаб посредством связей, задаваемых лагранжианом:

$$L_\sigma = \sum_a \bar{D}_L d_{a,R} (g_a \sigma + g'_a \sigma^*) + (f \sigma + f' \sigma^*) \bar{D}_L D_R + \text{э.с.}, \quad (11.60)$$

где  $g_a$ ,  $g'_a$ ,  $f$  и  $f'$  – вещественные числа в силу  $CP$ -сохранения. Однако после нарушения  $CP$ -симметрии массовые матрицы содержат члены, смешивающие  $D$ -кварки с легкими  $d$ -кварками. Это можно обнаружить, записывая полную кварковую массовую матрицу (в обозначении  $\bar{\Psi}_L M_{dD} \Psi_R$ ):

$$M_{dD} = \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ \Lambda (g e^{i\delta} + g' e^{-i\delta}) & \Lambda (f e^{i\delta} + f' e^{-i\delta}) \end{pmatrix}, \quad (11.61)$$

где  $g$  и  $g'$  обозначают строки векторов  $(g_1, g_2, g_3)$  и  $(g'_1, g'_2, g'_3)$ . Диагонализировав  $M_{dD} M_{dD}^+$ , можно получить обобщенную  $4 \times 4$

*СКМ*-матрицу, которая действительно имеет комплексную фазу в  $3 \times 3$ -секторе, содержащем кварки стандартной модели в пределе больших масс *D*-кварков. Очевидно, если имеется только один нейтральный хиггсовский бозон, связанный с массовой матрицей down кварка, то эффекты *FCNC* отсутствуют в стандартной модели на древесном уровне. Если бы массы вектороподобных кварков оказались порядка электрослабого масштаба, то смешивание легких *d*-кварков и *D*-кварков было бы значительным, и это приводило бы к заметным *FCNC*-эффектам при низких энергиях. Этот подход обеспечивает спонтанное нарушение *CP* и подавление эффектов *FCNC*.

## 11.6. Модель геометрического *CP*-нарушения в дополнительных измерениях

### 11.6.1. Комплексные фазы и *CP*-нарушение

Обычно считается, что наличие комплексных фаз в теории означает *CP*-нарушение в этой теории. Проиллюстрируем это утверждение на примере вещественного скалярного поля  $\eta$  и комплексного скалярного поля  $\phi$ . Лагранжиан теории имеет вид:

$$L(\phi_1) = \lambda \eta \phi_1^* \phi_1 + m^2 \phi_1^* \phi_1 + (h \eta \bar{e}_L e_R + m_e \bar{e}_L e_R + \text{э.с.}). \quad (11.62)$$

Заметим, что даже в отсутствие  $\lambda$  комплексные фазы в  $h$  нельзя исключить, сохранив при этом вещественной массу  $m_e$ . Это свойство связано с электрическим дипольным моментом (*EDM*) электрона, генерируемым на однопетлевом уровне (с  $\eta$  в петле), пропорциональным  $\text{Im}(h^2 m_e)$ . Однако есть одно исключение, когда  $h$  — чисто мнимая величина. В этом случае в отсутствие  $\lambda$  лагранжиан обладает *CP*-инвариантностью, а  $\eta$  поле оказывается *CP*-нечетным. Если же  $\lambda$  отлична от нуля, то теория становится *CP*-нарушающей, поскольку  $\lambda$  вследствие эрмитовости должна быть вещественной, и  $\lambda$ -взаимодействие требует *CP*-четного  $\eta$ , в то время как юкавский член требует *CP*-нечетного  $\eta$ . Это *CP*-нарушение сказывается в двухпетлевом вкладе в *EDM*, пропорциональном  $\lambda \text{Im}(h)$  (рис. 11.1).

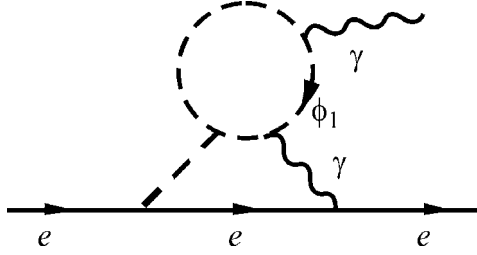


Рис. 11.1

Обобщим эту модель, введя другое комплексное скалярное поле  $\phi_2$  :

$$L(\phi_1, \phi_2) = \lambda \eta (\phi_1^* \phi_1 - \phi_2^* \phi_2) + m^2 (\phi_1^* \phi_1 + \phi_2^* \phi_2) + (h \eta \bar{e}_L e_R + m_e \bar{e}_L e_R + \text{э.с.}). \quad (11.63)$$

Сначала предположим, что  $h$  — чисто мнимая величина. Тогда, если определить  $CP$ -преобразование обычным образом:  $\phi_i \rightarrow \phi_i^*$ , то окажется, что в рассматриваемой модели (11.63) нарушается  $CP$ . Однако, если определить  $CP$ -преобразование более общим способом:  $\phi_1 \rightarrow \phi_2^*$ , то лагранжиан (11.63) окажется  $CP$ -инвариантным. Юкавское взаимодействие требует, чтобы  $\eta$  было  $CP$ -нечетным. Однако, как и в случае одного скалярного поля, это  $CP$ -свойство несовместимо с хиггсовским самовзаимодействием. Но с двумя вырожденными  $\phi_i$  в (11.63) оказывается возможным подобрать  $CP$ -свойства  $\phi_i$  таким образом, что  $\eta$  останется  $CP$ -нечетным. При этом двухпетлевая диаграмма для EDM (рис. 11.1) будет содержать два вклада от  $\phi_{1,2}$  с противоположными знаками, приводя к нулевому EDM электрона.

Как очевидно из этого примера, если два скалярных поля имеют разные массы, то теория будет нарушать  $CP$ -симметрию. Это обстоятельство следует рассматривать как новый способ введения  $CP$ -нарушения в калибровочные теории. Эта идея будет использована ниже при построении  $CP$ -нарушающих теорий в пространствах с дополнительными измерениями. Другое проявление  $CP$ -нару-

шения, связанное с вырожденностью полей  $\phi_i$ , можно обнаружить следующим образом. Предположим, мы выбрали потенциал  $CP$ -нечетного поля  $\eta$  в виде:

$$V(\eta) = m_\eta^2 \eta^2 + \lambda_\eta \eta^4, \quad (11.64)$$

причем  $m_\eta^2 > 0$  и  $\langle \eta \rangle = 0$ . Как видно, вакуум обладает  $CP$ -симметрией. Если вычислить петлевые поправки при наличии вырождения по массе, то снова вклады от  $\phi_{1,2}$  будут сокращаться, а вакуумное среднее  $\langle \eta \rangle = 0$  окажется стабильным по отношению к радиационным поправкам.

Если же исключить вырождение по массе между  $\phi_{1,2}$ , то петлевые вклады сокращаться не будут и возникнет нарушение  $CP$ -симметрии. Заметим, что несмотря на то, что вакуумное среднее  $\eta$  нарушает  $CP$ -симметрию,  $CP$ , строго говоря, не нарушена спонтанно.  $CP$ -симметрия нарушается из-за отсутствия вырождения по массе скалярных полей. Это обстоятельство дает возможность связать  $CP$ -нарушение с другими явлениями в физике. Например, если расщепление по массам между  $\phi_1$  и  $\phi_2$  возникает вследствие нарушения четности, то нарушение четности оказывается связанным с  $CP$ -нарушением. Аналогично, можно связать расщепление по массе с геометрическими эффектами в дополнительных измерениях, т. е. обнаружить геометрическую основу нарушения  $CP$ .

Подчеркнем, что в рассмотренных выше примерах константы связи можно считать вещественными независимо от  $CP$ -свойств лагранжианов. Однако вещественность констант связи является достаточным условием  $CP$ -симметрии, но не необходимым. Ниже будут приведены примеры, в которых  $CP$  сохраняется даже в теориях, в которых некоторые константы связи содержат комплексные фазы.

### 11.6.2. Фермионный пример

Сначала рассмотрим модель с четырьмя левыми киральными фермионами  $f_1, f_2, f_3, f_4$  с зарядами  $+, -, +, -$  соответственно, а

также с вещественным скаляром  $\eta$ . Определим  $C$ -сопряженное к  $f$  поле  $f^C = C^+ \gamma_0^T f^{+T}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (f_2^T C f_1)^+ &= f_1^{CT} C f_2^C = f_2^{CT} C f_1^C, \\ (f_2^T C \sigma_{\mu\nu} f_1)^+ &= f_1^{CT} C \sigma_{\mu\nu} f_2^C = -f_2^{CT} C \sigma_{\mu\nu} f_1^C. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Пусть лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} L_f &= \lambda \eta (f_1^T C f_2 - f_3^{CT} C f_4^C) + \lambda^* \eta (f_1^{CT} C f_2^C - f_3^T C f_4) + \\ &+ \mu (f_1^T C f_2 - f_3^{CT} C f_4^C) + \mu^* (f_1^{CT} C f_2^C + f_3^T C f_4) + \\ &+ \Delta (f_1^T C f_4 + f_3^{CT} C f_2^C) + \Delta (f_1^{CT} C f_4^C + f_3^T C f_2). \end{aligned} \quad (11.66)$$

Относительно преобразований  $CP$ :

$$f_1 \rightarrow f_3^C, \quad f_2 \rightarrow f_4^C, \quad \eta \rightarrow -\eta, \quad (11.67)$$

т.е.  $\eta$  —  $CP$ -нечетно. Параметры  $\mu$  и  $\Delta$  можно считать вещественными, изменяя фазы фермионных полей. В этом базисе, очевидно, комплексная фаза  $\lambda$  является физическим параметром. Однако она не имеет отношения к  $CP$ -симметрии. Интересно отметить существование однопетлевой поправки к оператору дипольного момента  $\mu f_2^T C \sigma_{\mu\nu} f_1$  (рис. 11.2) с комплексным коэффициентом, пропорциональным  $\lambda^2 \mu^* e$ .

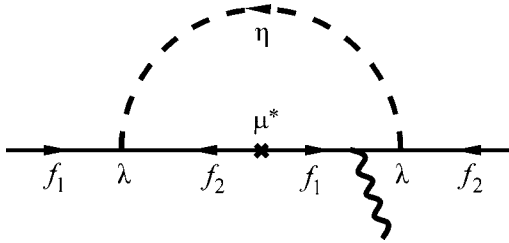


Рис. 11.2

Существует и подобная диаграмма, в которую входит  $\Delta$ -вставка вместо  $\mu$ , определяемая оператором  $b f_2^T C \sigma_{\mu\nu} f_1$  с вещественным однопетлевым коэффициентом  $b$  и пропорциональная  $\lambda \lambda^* \Delta e$ .

Аналогично, имеются вклады диаграмм с  $f_1$ ,  $f_2$ , замененными на  $f_3$ ,  $f_4$ . Их вклады пропорциональны  $a^* f_4^T C \sigma_{\mu\nu} f_3$  и  $b f_2^T C \sigma_{\mu\nu} f_3$ . Таким образом, однопетлевой вклад в магнитный дипольный момент

$$\begin{aligned} & \text{Re}(a) \left( f_2^T C \sigma_{\mu\nu} f_1 + f_1^{CT} C \sigma_{\mu\nu} f_2^C \right) + \\ & + b \left( f_4^T C \sigma_{\mu\nu} f_1 + f_1^{CT} C \sigma_{\mu\nu} f_4^C \right) + (1,2) \leftrightarrow (3,4) \end{aligned} \quad (11.68)$$

вклад же в электрический дипольный момент

$$\begin{aligned} & i \text{Im}(a) \left[ \left( f_2^T C \sigma_{\mu\nu} f_1 - f_1^{CT} C \sigma_{\mu\nu} f_2^C \right) - \right. \\ & \left. - \left( f_4^T C \sigma_{\mu\nu} f_3 - f_3^{CT} C \sigma_{\mu\nu} f_4^C \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Заметим, что в пределе  $\Delta \rightarrow 0$  лагранжиан имеет  $U(1) \times U(1)$ -симметрию ароматов. В этом пределе  $(f_1, f_2)$  образуют дираковскую пару, как и  $(f_3, f_4)$ , причем две пары вырождены по массе. В этом отношении EDM операторы полностью идентичны операторам обычных фермионов (напр. электрона). Отличие состоит в том, что вследствие вырождения, эти EDM не являются сигнатурой  $CP$ -нарушения, поскольку можно определить сохраняющуюся  $CP$ -симметрию, преобразуя EDM дираковской пары  $(f_1, f_2)$  в EDM пары  $(f_3, f_4)$ . Ситуация напоминает молекулу аммония, которая имеет двойное вырождение основного состояния с противоположными четностями. Вырождение точное, если пренебречь туннелированием между двумя вырожденными состояниями. В отсутствие туннелирования, оба состояния имеют ненулевые EDM противоположного знака и ненарушенную  $CP$ -симметрию. В присутствии туннелирования вырождение снимается, и первоначальный EDM становится переходным моментом между двумя невырожденными состояниями. Когда  $\Delta$  отлична от нуля, собственные массовые состояния

$$F_{\pm} = \frac{(f_1 \pm f_3)}{\sqrt{2}}, \quad G_{\pm} = \frac{(f_2 \pm f_4)}{\sqrt{2}}. \quad (11.70)$$

Они обладают невырожденными массовыми членами

$$(\mu + \Delta) F_+^T C G_+ + (\mu - \Delta) F_-^T C G_- + \text{э.с.} \quad (11.71)$$

Поэтому  $(F_+, G_+)$  и  $(F_-, G_-)$  образуют две дираковские пары  $H$  и  $K$  с массами  $\mu + \Delta$  и  $\mu - \Delta$ :

$$\begin{aligned} H &= F_+ + G_+^C, \quad K = F_- + G_-^C, \\ -\bar{H}H &= -\bar{F}_+ G_+^C - \bar{G}_+^C F_+ = G_+^T C F_+ + \text{э.с.}, \\ -\bar{K}K &= -\bar{F}_- G_-^C - \bar{G}_-^C F_- = G_-^T C F_- + \text{э.с.} \end{aligned} \quad (11.72)$$

Первоначальные EDM-операторы, пропорциональные  $\text{Im}(a)$  в соотношении (11.68), можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} i \text{Im}(a) &\left[ (G_-^T C \sigma_{\mu\nu} F_+ - F_+^{CT} C \sigma_{\mu\nu} G_-^C) + \right. \\ &\left. + (G_+^T C \sigma_{\mu\nu} F_- - F_-^{CT} C \sigma_{\mu\nu} G_+^C) \right]. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Воспользовавшись свойством  $\gamma_5 H = -F_+ + G_+^C$ ;  $\gamma_5 K = -F_- + G_-^C$ , запишем (11.73) как переходный электрический дипольный момент между двумя невырожденными дираковскими полями:

$$i \text{Im}(a) \left[ \bar{K} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 H + \bar{H} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 K \right]. \quad (11.74)$$

Полезно также переписать в новом базисе слагаемое в лагранжиане с юкавской связью  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} L_Y &= \text{Re}(\lambda) \eta \left[ (F_+^T C G_- + F_-^T C G_+) + \text{э.с.} \right] + \\ &+ i \text{Im}(\lambda) \eta \left[ (F_+^T C G_+ + F_-^T C G_-) - \text{э.с.} \right] = \\ &= -\text{Re}(\lambda) \eta (\bar{K} H + \bar{H} K) + \text{Im}(\lambda) \eta (\bar{H} i \gamma_5 H + \bar{K} i \gamma_5 K). \end{aligned} \quad (11.75)$$

Из (11.75) следует, что  $\eta$  —  $CP$ -нечетный скаляр.

### 11.6.3. Связь $P$ - и $CP$ -нарушений

Рассмотрим лево-право симметричное расширение стандартной модели, в котором  $CP$ - и  $P$ -нарушения связаны между собой. Начнем с теории, которая до спонтанного нарушения симметрии  $P$ - и  $CP$ -инвариантна. Покажем, что в этой модели нарушение  $P$ -четности влечет за собой нарушение  $CP$ .

Рассмотрим лево-право симметричную модель, основанную на калибровочной группе  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  с фермионными дублетами  $Q \equiv (u, d)$  и  $\psi \equiv (v, e)$ . Для нарушения симметрии выберем дублеты  $\chi_L$  (2,1,1) и  $\chi_R$  (1,2,1) и антидублет (2,2,0). Добавим в модель вещественное псевдоскалярное  $C$ -четное поле  $\eta$ . Как уже отмечалось, будем предполагать, что лагранжиан инвариантен относительно  $P$ - и  $CP$ -преобразований.

Относительно  $P$ -преобразований

$$\eta \leftrightarrow -\eta, \quad \phi \leftrightarrow \phi^+, \quad \chi_L \leftrightarrow \chi_R, \quad Q_L \leftrightarrow Q_R. \quad (11.76)$$

При зарядовом сопряжении  $C$ :

$$\eta \leftrightarrow \eta, \quad \phi \leftrightarrow \phi^T, \quad \chi_L \leftrightarrow \chi_L^*, \quad Q_L \leftrightarrow C\bar{Q}_R^T. \quad (11.77)$$

Юкавские взаимодействия имеют вид

$$f_{ij}\bar{Q}_{L_i}\phi Q_{R_j} + g_{ij}\bar{Q}_{L_i}\tilde{\phi}Q_{R_j} + \text{э.с.} \quad (11.78)$$

$P$ -симметрия подразумевает для матриц констант связи  $f = f^+$  и  $g = g^+$ . Зарядовое же сопряжение означает  $f = f^T$ ,  $g = g^T$ . Таким образом, обе матрицы констант связи вещественные и симметричные.

$P$ -симметрия нарушена, когда параметры хиггсовского потенциала подобраны так, что  $\langle \chi_R^0 \rangle = v_R$  и  $\langle \chi_L \rangle = 0$ . Покажем, что при этом происходит  $CP$ -нарушение. Чтобы это увидеть, запишем соответствующую часть  $CP$ -сохраняющего хиггсовского потенциала:

$$\begin{aligned} V^{\text{Хиггс}} = & -\mu_+^2 (\chi_L^+ \chi_L + \chi_R^+ \chi_R) + \lambda_+ (\chi_L^+ \chi_L + \chi_R^+ \chi_R)^2 + \\ & + \lambda_- (\chi_L^+ \chi_L - \chi_R^+ \chi_R)^2 + \lambda \eta (\chi_L^+ \chi_L - \chi_R^+ \chi_R) + \\ & + [m_\phi^2 \det \phi + i\lambda' \eta \det \phi + \text{э.с.}]. \end{aligned} \quad (11.79)$$

Заметим, что при сохранении  $P$ -четности  $\chi_{L,R}$  имеют одинаковые массы, а петлевые поправки к  $\langle \eta \rangle$  сокращаются, приводя к значению  $\langle \eta \rangle = 0$  и сохранению  $CP$ . Однако при нарушении  $P$ -симметрии,  $\chi_R$  исчезает из спектра, а поле  $\eta$  приобретает нену-



левое вакуумное среднее, происходит нарушение  $CP$ . Это нарушение «передается» в кварковой и лептонный сектора за счет  $\eta \det \phi$  связи и приводит к комплексному вакуумному среднему поля  $\phi$ . Таким образом,  $CP$ - и  $P$ -нарушения оказываются связанными между собой.

#### 11.6.4. «Удвоенная» стандартная модель и $CP$ -нарушение

Приведем еще один пример, свидетельствующий о том, что наличие комплексных фаз не обязательно означает  $CP$ -нарушение в теории. Рассмотрим теорию, основанную на калибровочной группе  $SU(2)_A \times SU(2)_B \times U(1)_Y$  и содержащую копии полей стандартной модели:

$$q_L(2,1)_{1/3}, \quad u_R(1,1)_{4/3}, \quad d_R(1,1)_{-2/3}, \quad \psi_L(2,1)_{-1}, \quad e_R(1,1)_{-2}, \quad (11.80)$$

где  $(a,b)$  обозначают  $SU(2)_A \times SU(2)_B$ -представления. Копиями фермионов являются:

$$Q_L(1,2)_{1/3}, \quad U_R(1,1)_{4/3}, \quad D_R(1,1)_{-2/3}, \quad \Psi_L(1,2)_{-1}, \quad E_R(1,1)_{-2}. \quad (11.81)$$

В теории содержатся также два хиггсовских дублета  $H_A$  и  $H_B$ . Пусть относительно  $CP$  «нижние» поля преобразуются в «верхние»:

$$\begin{aligned} q_L &\leftrightarrow \gamma_0 C \bar{Q}_L^T, & d_R &\leftrightarrow \gamma_0 C \bar{D}_R^T, \\ u_R &\leftrightarrow \gamma_0 C \bar{U}_R^T, & H_A &\leftrightarrow H_B^*, \end{aligned} \quad (11.82)$$

аналогично для других полей.

$CP$ -инвариантные юкавские связи кварков можно записать в виде:

$$\begin{aligned} L'_Y &= \bar{q}_L H_A (h_d d_R + h'_d D_R) + \bar{q}_L \tilde{H}_A (h_u u_R + h'_u U_R) + \\ &+ \bar{Q}_L H_B (h_d^* D_R + h_d'^* d_R) + \bar{Q}_L \tilde{H}_B (h_u^* U_R + h_u'^* u_R) + \text{э.с.} \end{aligned} \quad (11.83)$$

Матрицы связей  $h_{u,d}$ ,  $h'_{u,d}$  — комплексны, однако  $CP$  сохраняется.  $CP$ -нарушение возникает тогда, когда  $\langle H_A^0 \rangle \neq \langle H_B^0 \rangle$ . Если два вакуумных средних оказываются одинаковыми, оба набора калиб-

ровочных бозонов имеют одинаковые массы, и в результате любая линейная комбинация этих калибровочных бозонов тоже является собственным состоянием и оказывается способной избавить нас от  $CP$ -нарушающих эффектов. Ниже мы увидим, как эта схема может быть включена в многомерную теорию и как  $CP$ -нарушение возникает в эффективной стандартной модели на бране.

### 11.6.5. Орбифолдные граничные условия и $CP$ -нарушение

Покажем, как эта идея может быть связана с  $CP$ -нарушением и геометрией пространства-времени дополнительных измерений. Рассмотрим для простоты модель раздела 11.6.1, предполагая, что электрон и поле  $\eta$  принадлежат бране, а поля  $\phi_{1,2}$  распространяются во всем пространстве. Очевидно, что  $\eta - \phi$ -связь в соотношении (11.63) включает связь браны со всем пространством. Предположим, что рассматривается  $S_1/Z^2$  орбифолд, причем относительно  $Z_2$ -симметрии  $y \rightarrow -y$ .

Тогда можно ожидать, что относительно преобразований  $Z_2$ -симметрии  $\phi_i \rightarrow \pm \phi_i$ . Для четных  $\phi$ -полей фурье-разложение содержит только косинусы, тогда как для нечетных полей появляются только синусы. Если считать, что брана локализована при  $y = 0$ , тогда на этой бране нечетные  $\phi$ -поля будут отсутствовать, а спектр четных и нечетных состояний будет асимметричным. При этом, очевидно,  $\eta - \phi$ -связь будет нарушать  $CP$ . Возвращаясь к модели раздела 11.6.1, получаем, что двухпетлевые вклады в этом случае не сокращаются, и электрон получает ненулевой EDM.

В этом примере произвольно выбранные для нарушения  $CP$  граничные условия, можно сказать, введены «руками», однако они очевидным образом связаны с геометрией пятого измерения. Возможно построить модели, в которых асимметричные граничные условия диктуются кинематикой пятого измерения. В качестве примера рассмотрим модель, в которой фермионное поле распространяется во всем пространстве, причем его 5-мерная кинетическая энергия может быть записана в терминах 4-мерных полей:

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \left(\bar{\Psi}_L\partial_y\Psi_R - \bar{\Psi}_R\partial_y\Psi_L\right). \quad (11.84)$$

Из-за присутствия второго слагаемого,  $Z_2$ -инвариантность подразумевает, что  $\Psi_L$  и  $\Psi_R$  имеют противоположные  $Z_2$ -четности. В результате, если одно из полей имеет четные Фурье-компоненты (косинусы), то другое с необходимостью имеет нечетные (синусы) компоненты, т. е. исчезает на бране  $y=0$ . Асимметрия в спектре, необходимая для  $CP$ -нарушения, возникает достаточно естественно. Аналогично, если имеет место суперсимметрия, то объемная суперсимметрия  $N=2$ -типа, а  $N=2$ -супермультиплет имеет два  $N=1$  киральных суперполя  $(H, H^C)$ . В эффективном лагранжиане имеется слагаемое вида  $\int dy H \partial_y H^C$ . Таким образом, два поля  $H$  и  $H^C$  имеют противоположные  $Z_2$ -четности, это приводит к асимметричному спектру полей и к  $CP$ -нарушению.

Приведем примеры моделей, в которых эффективное  $CP$ -нарушение возникает за счет асимметричных граничных условий.

#### 11.6.6. СКМ-модель из асимметричных орбифолдных граничных условий

Чтобы увидеть, как известная СКМ-модель возникает при компактификации на орбифолд, снова обратимся к модели раздела 11.6.1 в 5-ти измерениях с пятым измерением, компактифицируемом на  $S^1/(Z_2 \times Z'_2)$ . В этом случае возникают четыре различных типа состояний, которые мы обозначим следующим образом:

$$(+,+), \quad (+,-), \quad (-,+), \quad (-,-). \quad (11.85)$$

За исключением  $(+,+)$ , все другие состояния не имеют нулевых мод, т. е. они не обнаруживают себя при низких энергиях ( $E \ll R^{-1}$ ). Отметим число фермионных дублетов в 5-мерной модели по сравнению с 4-мерной моделью: это  $(q_L, q_R)$  –

$SU(2)_A$ -дублеты;  $(u_R, u_L)$ ,  $(d_L, d_R)$  – синглеты. Кваркам и лептонам приписываются следующие  $Z_2 \times Z'_2$  квантовые числа.

поля	$Z_2 \times Z'_2$ квантовые числа
$q_L, u_R, d_R, \psi_L, e_R, H_A$	$(+, +)$
$q_R, u_L, d_L, \psi_R, e_L, H_B$	$(-, -)$
$Q_L, U_L, D_L, \Psi_L, E_L$	$(+, -)$
$Q_R, U_R, D_R, \Psi_R, E_R$	$(-, +)$

$CP$ -инвариантная юкавская связь в 5-ти измерениях имеет следующий вид:

$$L'_Y = h_d \bar{q} H_A d + h_u \bar{q} \tilde{H}_A u + h_d^* \bar{Q} H_B D + h_u^* \bar{Q} \tilde{H}_B U + \text{э.с.} \quad (11.86)$$

Заметим, что  $h'_d$  и  $h'_u$  в выражении (11.83) не совместимы с  $Z_2 \times Z'_2$ -симметрий. На бране при  $y=0$  выживают только поля с квантовыми числами  $(+, +)$ , именно это обстоятельство приводит к известной  $CKM$ -модели.  $CP$ -симметрия исчезает из-за асимметрии в спектре, возникающей при построении орбифолда.  $CP$ -нарушающий эффект, создаваемый комплексными фазами в  $h_u$  и  $h_d$ , сокращается подобными же эффектами, создаваемыми  $CP$ -сопряженными состояниями. Однако асимметрия башен Калуды-Клейна  $CP$ -сопряженных фермионов нарушает это сокращение.

#### 11.6.7. Общий геометрический источник $P$ - и $CP$ -нарушения

Используя модель раздела 11.6.3, покажем, что  $P$ - и  $CP$ -нарушения имеют общий геометрический источник. Будем предполагать, что поля модели принадлежат бране, а синглетное нейтрино  $\nu^B$  распространяется во всем пространстве. Полевое содержание браны определяется  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  калибровочной теорией и фермионными дублетами  $Q \equiv (u, d)$  и

$\Psi \equiv (v, e)$ , хиггсовскими полями  $\chi_L(2,1,1)$  и  $\chi_R(1,2,1)$ , а также бидублетом  $\phi(2,2,0)$  и  $P$ -,  $CP$ -нечетным полем  $\eta$ . Эти поля относительно  $P$ - и  $C$ -преобразований ведут себя согласно соотношений (11.76) и (11.77).

Чисто объемная, как и брана-объемная, связь определяется слагаемыми

$$i\bar{v}^B \gamma^\mu \partial_\mu v^B + (\bar{v}_L^B \partial_y v_R^B - \bar{v}_R^B \partial_y v_L^B) + \int dy \delta(y) [\bar{\psi}_L \chi_L v^B + \bar{\psi}_R \chi_R v^B + \text{э.с.}] \quad (11.87)$$

Как обсуждалось в разделе 11.6.6,  $Z_2$ -инвариантность объемного лагранжиана подразумевает, что относительно преобразований  $Z_2$   $v_L^B$  и  $v_R^B$  имеют противоположные четности. Поэтому предположим, что  $v_L^B(x, -y) = v_L^B(x, y)$  и  $v_R^B(x, -y) = -v_R^B(x, y)$ . Это означает, что для браны, локализованной при  $y = 0$ , поле  $v_R^B$  исчезает, а поле  $v_L^B$  остается. Таким образом, эффективная теория на бране оказывается лево-право асимметричной, т. е.  $P$ -четность нарушается.

При этом массы  $\chi_L$  и  $\chi_R$  оказываются асимметричными, поле  $\eta$  приобретает ненулевое вакуумное среднее и происходит  $CP$ -нарушение.  $CP$ -нарушающая фаза трансформируется в фермионы посредством фаз  $\langle \phi \rangle$ . Чтобы  $CP$ -фаза проявила себя при низких энергиях, надо иметь в бидублете  $\phi$  два хиггсовских дублета, которые бы «выживали» при энергиях ниже  $W_R$ -масштаба. Если  $W_R$ -масштаб находится в ТэВ-ной области, то «тонкой настройки» не требуется.

### 11.6.8. Профиль геометрического $CP$ -нарушения в $MSSM$

Рассмотрим, как проявляет себя новый механизм  $CP$ -нарушения в  $MSSM$ . Для этого начнем с обычного  $MSSM$  полевого содержания на бране  $(SU(2)_L \times U(1)_Y)$  калибровочной группы и суперполей  $Q$ ,

$L, u^C, d^C, e^C, H_u, H_d$ ), дополненного единственным суперполем – переносчиком  $CP$ -нарушения. Во всем пространстве имеем  $N=2$  суперсимметрию. На бране имеем два  $N=2$  супермультиплета, обозначаемые их  $N=1$  компонентами  $(H_1, H_1^C, H_2, H_2^C)$ . Относительно  $CP$  поля  $MSSM$  преобразуются обычным образом:  $Q \rightarrow Q^C$  и т. д. Оставшиеся поля преобразуются так:

$$\eta \rightarrow -\eta^*, \quad H_1 \rightarrow H_2^{C*}, \quad H_2 \rightarrow H_1^{C*}. \quad (11.88)$$

Считаем, что до компактификации теория  $CP$ -симметрична, т. е. единственная фаза в теории содержится в связи поля  $\eta$  с объемными полями  $H_{1,2}$ :

$$W_\eta = \eta \left( \lambda H_1 H_2 - \lambda^* H_1^C H_2^C \right) + M_1 \eta^2 + M_2 \left( H_1 H_2 + H_1^C H_2^C \right), \quad (11.89)$$

где массы  $M_{1,2}$  следует ожидать на уровне фундаментального масштаба теории. Можно построить теорию, в которой массовые параметры  $M_{1,2}$  и  $\mu$ -член возникают из Kahler-потенциала

$$S_K = \int d^4\theta \frac{S^+}{M_{Pl}} \left[ \left( H_1 H_2 + H_1^C H_2^C \right) + \beta H_u H_d \right]. \quad (11.90)$$

Отметим, что объемная кинетическая энергия содержит член  $H \partial_y H^C$ . При этом необходимое условие для  $CP$ -нарушения ( $H$  и  $H^C$  имеют противоположные  $Z_2$ -четности) автоматически выполняется, и  $CP$ -нарушение на бране весьма естественно из-за асимметричного спектра объемных полей.

Чтобы пояснить профиль  $CP$ -нарушения, запишем суперпотенциал на бране, включающий  $\eta$ -поля (обычный  $MSSM$ -суперпотенциал для простоты опускаем). Чтобы учесть нарушение суперсимметрии, имеем в виду наличие скрытого сектора. Для «включения» нарушения  $SUSY$  введем синглетное поле  $S$ , тогда

$$W_{\text{брана}} = (i\eta + M_{\text{слаб.}}) \left( a + b \frac{S}{M_{Pl}} \right) H_u H_d. \quad (11.91)$$

При этом мы опустили члены, подавленные степенями  $M_{Pl}$ , поскольку их влияние на  $CP$ -нарушение пренебрежимо мало.

$CP$ -нарушение в  $MSSM$  возникает тогда, когда поле  $\eta$  приобретает ненулевое вакуумное среднее за счет петлевых поправок, включающих поля  $H_{1,2}$ . В суперсимметричном пределе, вследствие теоремы о перенормируемости суперсимметрии,  $\langle \eta \rangle = 0$ . При

этом  $\langle \eta \rangle \approx \frac{M_{SUSY}}{16\pi^2}$ , если параметр  $m_\eta$  оказывается в ТэВ-ном масштабе. Это приводит к  $CP$ -нарушению в  $MSSM$  только за счет  $\mu$ - и  $B_\mu$ -членов. Все другие  $CP$ -нарушающие фазы в этой модели чрезвычайно малы из-за подавления массой Планка. Например, чтобы получить  $CP$ -нарушение в скварковых массах, надо записать оператор типа

$$\int d^4\theta \eta \frac{SS^+}{M_{Pl}^3} Q^+ Q. \quad (11.92)$$

После того, как поле  $\eta$  приобретает вакуумное среднее, фаза оказывается порядка  $\sim 10^{-16}$ .

Путем переопределения одного из хиггсовских суперполей, можно сделать член  $B_\mu$  вещественным. Таким образом, единственным комплексным параметром в теории остается  $\mu$ -член. Более того,  $CP$ -фаза естественным образом оказывается порядка  $10^{-2}$  из-за фактора  $16\pi^2$ . При этом в теории отсутствует обычного типа  $CM$ -фаза.

Кратко обсудим, способна ли эта модель объяснить наблюдаемое  $CP$ -нарушение в каонных системах. Единственная комплексная фаза появляется за счет слагаемого в лагранжиане

$$|\mu| e^{i\alpha} h_{d,ij} \tilde{Q}_i H_u^* \tilde{d}_j^C + |\mu| h_{u,ij} \tilde{Q}_i H_d^* \tilde{u}_j^C, \quad (11.93)$$

которое вызывает  $LR$ -смешивание скварка:

$$\delta_{LR,ij}^d = \frac{\left( (A_d + |\mu| e^{i\alpha} \tan \beta) m^d \right)_{ij}}{M_{SUSY}^2}, \quad (11.94)$$

где  $m^d$  – массовая матрица down-кварка,  $A_d$  – трилинейная матрица связей, нарушающих суперсимметрию. В общем случае, эта матрица не является единичной матрицей на слабом масштабе, хотя она может быть единичной матрицей на масштабе нарушения SUSY. Для  $m_{\tilde{Q}} \sim m_{\tilde{G}} = 500$  ГэВ ограничения на  $\Delta m_K$  и  $\epsilon$  дают

$$\begin{aligned} (\text{Re} \delta_{LR,12}^d) &\leq 4.4 \cdot 10^{-3}, \\ 2(\text{Re} \delta_{LR,12}^d)(\text{Im} \delta_{LR,12}^d) &\leq 3.5 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \tag{11.95}$$

Если в рассматриваемой модели выбрать предельные значения в соотношениях (11.95), то получим  $\left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$ , что находится в хорошем согласии с экспериментом. Значение электрического дипольного момента нейтрона можно получить меньшим экспериментального предела в  $11 \cdot 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{см}$ , если считать  $|\text{Im} \delta_{LR,12}^d| < 3.0 \cdot 10^{-6}$  для  $m_{\tilde{Q}} \sim m_{\tilde{G}} = 500$  ГэВ.

Завершая обсуждение  $CP$ -нарушения, стоит отметить, что мы еще далеки от разрешения проблем  $CP$ -нарушения. Возможно, это именно «то место», где проявит (или уже проявляет?) себя новая физика.



## Глава 12

# ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ

---

### 12.1. Введение

Численные значения измеряемых величин, таких как длина и время, мы получаем путем сравнения с эталонами – единицами измерения. Другими словами, требуется система единиц. Поэтому, прежде чем обратиться к определению фундаментальных констант, полезно рассмотреть физическую систему единиц. В томе 3 «Лекций по теоретической физике» Зоммерфельда приводятся рассуждения, основной смысл которых состоит в том, надо ли вводить отдельные единицы для электрического и магнитного зарядов, наряду со стандартными механическими единицами массы, длины и времени ( $[M, L, T]$ ). Если ввести отдельную единицу для электрического заряда  $[Q]$ , то необходимо ввести в закон Кулона  $F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$

фактор, который бы переводил механические единицы  $[MLT^{-2}]$  левой части, в другие единицы  $[Q^{-2}L^{-2}]$ , появляющиеся в правой части. Как известно, этот перевод осуществляется фактором  $\epsilon_0$  – диэлектрической проницаемостью вакуума:  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ . С дру-

гой стороны, закон Кулона можно использовать для определения заряда в терминах механических единиц. Сила взаимодействия между двумя единичными зарядами на расстоянии в один сантиметр, по определению, равна одной дине. В атомной физике есть экспериментально определяемая величина, служащая определением единицы заряда – заряд электрона. Все другие заряды можно выразить через заряд электрона. Тогда  $\epsilon_0$  становится измеряемой «фундаментальной константой», параметризующей кулоновскую силу между электронами. В этой системе численное значение заряда электрона принимается за единицу:  $e = 1[Q]$ . Как отмечалось выше,

нетривиальное значение заряда электрона можно выразить в чисто механических единицах и считать это значение единицей измерения заряда. На этом пути получаем определенную комбинацию размерностей  $[M, L, T]$ :  $[Q^2] = [ML^3T^{-2}]$ .

Очевидно, что определение фундаментальных констант включает элемент условности. Это определение зависит от того, сколько единиц измерения выбрано. Если вводится дополнительная единица измерения (например,  $[Q]$ ), то в соответствующих уравнениях нужны дополнительные фундаментальные константы (такие, как  $\epsilon_0$ ). Если мы допускаем существование электронов, имеющих строго одинаковый заряд во всех пространственных точках в любой момент времени, то тогда возможно использовать универсальную величину заряда электрона в качестве единицы измерения заряда. Если мы принимаем справедливость закона Кулона, то этот закон выражает заряд в механических единицах. Вообще говоря, чем больше априорных факторов мы принимаем, тем меньше единиц и фундаментальных констант следует ввести. Приведем пример, иллюстрирующий это утверждение. Предположим, что мы не предполагаем вращательной инвариантности законов физики, т.е. допускаем существование выделенного направления. Тогда мы могли бы сформулировать две независимых версии закона Кулона: одна из них соответствовала бы случаю, когда линия, соединяющая заряды лежит в предпочтительном направлении. Другая версия закона возникает в случае, если эта линия перпендикулярна выделенному направлению. Каждому случаю соответствует своя собственная  $\epsilon$ :  $\epsilon_{long}$  и  $\epsilon_{trans}$ . В принципе, измерения могли бы установить близость этих двух фундаментальных констант. Конечно, допуская различные теоретические предположения, мы могли бы исключить фундаментальную константу  $\epsilon_{long} / \epsilon_{trans}$ , однако на этом пути мы рискуем потерять физическое содержание теории. За последние примерно 35 лет все «неприводимые» законы физики (которые нельзя вывести из других) содержатся в так называемой стандартной модели. Таким образом, стандартная модель – это теоретическая схема, в которой следует определять фундаментальные константы. В последующем обсуждении будем использовать

несколько «нестандартное» определение стандартной модели. В-первых, будем включать в стандартную модель гравитацию с помощью эйнштейновской общей теорией относительности, имея в виду процедуру минимальной связи. Кроме того, включим в стандартную модель массы нейтрино и смешивания.

Стандартная модель, как обычно, определяется своим лагранжианом. Зная лагранжиан, можно извлечь с помощью методов релятивистской квантовой теории все уравнения и феноменологические следствия. В этой схеме можно дать естественное определение фундаментальной константы – это параметр, который необходимо ввести, чтобы определить лагранжиан стандартной модели. Поскольку принципы специальной теории относительности и квантовой механики составляют основу стандартной модели, то кажется естественным определить  $c$  и  $\hbar$  в качестве единицы скорости и действия. Если положить  $\hbar = c = 1$ , то эти величины уже не войдут в теорию в качестве параметров. Действительно, скорость света  $c$  полностью аналогична параметру  $\varepsilon_{long}/\varepsilon_{trans}$ , обсуждавшемуся выше. Это параметр, учитывающий возможные отличия в величинах, чьи относительные значения фиксируются симметрией.  $\hbar$  тоже появляется в алгебре симметрии – алгебре канонически сопряженных величин в фазовом пространстве. Можно также сказать, что  $\hbar$  проявляется вследствие периодичности температуры  $T$  при трансляциях в мнимом времени:  $\tau = \frac{\hbar}{T}$ . После того, как определена

единица действия, действие  $\int d^4x L_{ст.мод.}$  описывает всю динамику системы. Кинетические члены

$$\begin{aligned} L_{\varphi_{кин}} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi, \\ L_{\psi_{кин}} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} e_a^\alpha \bar{\psi} \gamma_\alpha \vec{\nabla}_\alpha \psi \end{aligned} \quad (12.1)$$

соответствуют скалярным и спинорным полям. Очевидно, что поля  $\varphi$  и  $\psi$  имеют размерности  $[L^{-1}]$  и  $[L^{-\frac{3}{2}}]$ , где  $L$  – единица  $dx$ . Заметим, что соотношения (12.1) включают объемный фактор  $\sqrt{g}$ , мет-

рику  $g^{\alpha\beta}$ , вербейн  $e_a^\alpha$  и ковариантную производную, содержащую член со спиновой связностью. Таким образом, действительно в этом подходе учитывается гравитация. В отсутствие гравитации следует рассматривать предельный случай плоского пространства:  $\sqrt{g} = 1$ ,  $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = (1, -1, -1, -1)$ ;  $e_a^\alpha$  становится  $\delta$  – символом Кронекера, а ковариантная производная  $D \rightarrow \partial$ .

Взаимодействия в стандартной модели содержат различные произведения скалярных и векторных полей с коэффициентами, частично фиксированными симметрией. Поскольку единицы измерения полей фиксированы и фиксированы единицы  $\int d^M L_{\text{ст.мод}}$ , то единицы этих коэффициентов тоже будут фиксированы как различные степени  $[L]$ . Таким образом, все параметры стандартной модели можно выразить в одних единицах. В физике высоких энергий в качестве фундаментальных единиц выбираются масса, энергия или импульс. Все они эквивалентны  $[L^{-1}]$ , поскольку  $[M] = \frac{\hbar}{c}[L^{-1}]$ ,  $[E] = \hbar c[L^{-1}]$ ,  $[P] = \hbar[L^{-1}]$ . Для последующего обсуждения удобно определить размерность массы как степень  $[M]$ . Тогда скалярные и векторные поля имеют размерность 1, а спинорные поля имеют размерность массы  $3/2$ .

Члены с локальным взаимодействием содержат произведения полей и их производных, вычисленные в определенной точке. Коэффициент при таком члене называется константой связи, то есть должен иметь соответствующую размерность массы, поскольку каждый член в плотности лагранжиана имеет размерность 4. Калибровочные связи стандартной модели вводятся путем процедуры «минимальной связи», состоящей в замене обычной производной на ковариантную

$$\partial_\alpha \rightarrow \partial_\alpha + i \sum_j g_j \tau_j^a A_\alpha^a, \quad (12.2)$$

где  $\tau^a$  генераторы группы симметрии (для абелевой группы это вещественное число).

Так как  $\partial_a$  и  $A_a^a$  имеют размерность массы, равную 1, самосогласованность требует, чтобы калибровочные константы имели нулевую размерность, то есть калибровочные константы – просто числа.

Массы кварков и заряженных лептонов возникают за счет юкавских связей в лагранжиане

$$L_{\text{юкава}} = y\bar{\psi}\phi\psi, \quad (12.3)$$

где  $\psi$  – спинорное фермионное поле,  $\phi$  – скалярное поле (хиггсовское поле). Так как полная массовая размерность должна быть равна 4, а массовые размерности  $\psi$ ,  $\phi$  –  $3/2$  и  $1$ , то юкавские константы связи ( $y$ ) оказываются безразмерными. Хиггсовский потенциал

$$V_\phi = \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 \quad (12.4)$$

вносит еще один безразмерный параметр  $\lambda$  и параметр  $\mu$  с размерностью массы, равной 1. Это все типы связей, которые существуют в рассматриваемой нами стандартной модели (за исключением гравитации и масс нейтрино). Таким образом, все фундаментальные константы безразмерны, за исключением  $\mu^2$ , имеющего размерность, равную 2.

Тот факт, что сильные и электрослабые взаимодействия, совместно с массами кварков и заряженных лептонов, можно описать фундаментальными параметрами, чьими единицами измерения являются неотрицательные степени масс, весьма показателен. Действительно, проблематично иметь фундаментальные константы, чьими единицами измерения являются отрицательные степени масс. В самом деле, зачастую член с взаимодействием можно рассматривать как возмущение. Если связь  $k$ , ассоциированная этим взаимодействием, имеет отрицательную ( $-p$ ) размерность массы, то соответствующие степени этой константы связи будут содержать степени  $k\Lambda^p$ , где  $\Lambda$  – некоторый параметр размерности массы. Как будет видно ниже, взаимодействия в локальной теории поля являются жесткими, то есть содержат связи с произвольно высокочастотными модами. Можно считать, что  $\Lambda$  характеризует наибольшую массовую шкалу (обрезание), приводящую к расходимости.

Обратимся к концепции «жесткости» в теории поля. Чтобы построить локальное поле  $\Psi(x)$  в пространственно-временной точке  $x$ , выберем суперпозицию

$$\Psi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \tilde{\Psi}(k), \quad (12.5)$$

которая включает компоненты  $\tilde{\Psi}(k)$ , содержащие сколь угодно большие импульсы. Более того, в случае наиболее общего взаимодействия

$$\begin{aligned} \int L dx \equiv & \int \Psi(x)^3 dx \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \tilde{\Psi}(k_1) \tilde{\Psi}(k_2) \tilde{\Psi}(k_3) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) \end{aligned} \quad (12.6)$$

моды с малыми импульсами  $k_1 \approx 0$  связаны без всякого подавления с высокоимпульсными модами  $k_2$  и  $k_3 \approx -k_2$ . Локальные связи являются в этом смысле жесткими.

Вне зависимости от симметрий стандартной модели и соображений локальности, можно рассматривать внутренний магнитный момент частицы, к которому приводит взаимодействие типа

$$L = k_0 \bar{e} \sigma^{\mu\nu} e F_{\mu\nu}. \quad (12.7)$$

Такое взаимодействие нарушит согласие теории и эксперимента, если не считать коэффициент  $k_0$  достаточно малым. Размерность массы у коэффициента  $k_0$  равна  $[M^{-1}]$ , и он должен быть  $< (10 \text{ ТэВ})^{-1}$ . Аналогично, согласие между измеряемыми процессами слабых взаимодействий и предсказаниями электрослабой теории исключает присутствие сколько-нибудь значимого присутствия неперенормируемых 4-фермионных взаимодействий типа:

$$L_{4,ferm} = \eta_{kl}^{ij} \bar{\Psi}_i \Psi_j^k \bar{\Psi}_j \Psi_i^l, \quad (12.8)$$

причем размерность массы у коэффициента  $\eta$  равна  $(-2)$ .

Как хорошо известно, 4-фермионные взаимодействия составляли основу ферми-теории  $\beta$ -распада, обобщенную на  $(V-A)$ -вариант. С сегодняшней точки зрения, это была эффективная низкоэнергетическая теория, пригодная для описания экспериментальных данных

при энергиях, меньших масс  $W$  и  $Z$  бозонов. Действительно, «стандартная» теория, расширенная включениями нейтральных токов, возникает как приближение электрослабой теории, в которой «проинтегрировано» по вкладам  $W$  и  $Z$  бозонов. В терминах диаграмм Фейнмана, происходит замена пропагатора на его низкоэнергетический предел

$$\frac{1}{p^2 - M^2} \rightarrow -\frac{1}{M^2}. \quad (12.9)$$

Таким образом, перенормируемые взаимодействия могут возникать в эффективных теориях, причем коэффициенты при них отражают масштаб более фундаментальной теории.

С этой точки зрения, малость вкладов перенормируемых взаимодействий можно интерпретировать следующим образом:

а) стандартная модель неполна, но она включена в более общую теорию, имеющую «хорошее» поведение при высоких энергиях

б) существуют значительно разделенные масштабы, т.е. факторы  $1/M^P$ , возникающие при интегрировании по «тяжелым» модам в более общей теории, очень малы (т.е.  $M$  — очень велико).

Дальнейшие указания в пользу такой точки зрения возникают при рассмотрении нейтрино и объединения калибровочных констант.

Предположение о том, что перенормируемыми взаимодействиями можно пренебречь, весьма продуктивно, поскольку число остающихся возможностей для связей с неотрицательной размерностью массы, весьма ограничено. Все перенормируемые взаимодействия, совместимые с калибровочной симметрией и мультиплетной структурой стандартной модели, оказываются допустимыми. Существует замечательное согласие между симметриями стандартной модели, допускающим произвольные перенормируемые взаимодействия и симметриями окружающего нас мира. На этой основе оказывается возможным понять, например, почему странность нарушается, а барионное число — нет. Единственным исключением является  $\theta$ -член КХД, который допускается симметриями стандартной модели, но в измерениях практически равен нулю.

Чтобы получить ненулевые значения масс нейтрино в стандартной модели, нужно допустить неперенормируемые взаимодействия. Обычный массовый член  $\sim \bar{\nu}\nu$  невозможен, поскольку нейтринное поле  $\nu$  – левое. Так называемый майорановский член

$$L_{\text{майоран}} \sim \varepsilon_{ij} \nu^i \nu^j, \quad (12.10)$$

где левое нейтринное поле записано в двухкомпонентном виде, кинематически допустим. Так как нейтринное поле имеет  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  квантовые числа  $(1/2, -1/2)$ , то лагранжиан (12.10) с необходимостью нарушает  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  симметрию. Поскольку поле  $\phi$  тоже имеет относительно  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  квантовые числа  $(1/2, -1/2)$ , то допустим следующий член в лагранжиане

$$L_{\text{майоран. симм}} = \eta^{ab} \varepsilon_{ij} L_a^{i\alpha} L_b^{j\beta} \phi_\alpha^+ \phi_\beta^+. \quad (12.11)$$

В этом выражении  $a$  и  $b$  – индексы ароматов;  $\alpha$  и  $\beta$  – индексы  $SU(2)$ . Нейтрино входит в дублет с заряженным лептоном, т.е. для  $\alpha = 1$   $L^a$  – нейтринное поле, при  $\alpha = 2$   $L^a$  – заряженное лептонное поле. Когда  $\phi^1$  приобретает ненулевое вакуумное среднее, лагранжиан (12.11) индуцирует матрицу  $L_{\text{майоран. масса}}$ . Эта матрица, наряду с кинетическим членом, описывает распространение нейтрино. Её недиагональные элементы характеризуют нейтринные осцилляции. Измеряемые значения масс нейтрино  $< 10^{-2}$  эВ. Это означает, что масштаб  $\eta^{ab} \sim (10^{16} \text{ ГэВ})^{-1}$ . Таким образом, из того факта, что массы нейтрино малы, следует, что неперенормируемые взаимодействия подавлены. Следуя аналогии со «старой» теорией слабых взаимодействий, можно сказать, что малость нейтринных масс есть следствие очень большого скрытого масштаба.

Эффективной нейтринный массовый член, типа только что обсужденного, является единственным согласованным с постулатами локальности и калибровочной инвариантности членом в стандартной модели, коэффициент при котором имеет размерность массы  $-1$ .

Четырехфермионные взаимодействия с коэффициентами  $\sim M^{-2}$ ,  $M \sim 10^{16}$  ГэВ оказываются слишком малыми, чтобы быть наблюдаемыми. Таким образом, они могут присутствовать в теории без каких-либо последствий. Пожалуй, единственное исключе-



ние – взаимодействия, осуществляющие нарушение барионного числа. Для них значения  $M \sim 10^{16}$  ГэВ находится на пределе современных экспериментальных возможностей.

Хорошо «работающая» теория гравитации – общая теория относительности. При обсуждении лагранжианов (12.1) уже отмечалось, что можно связать метрику ОТО с полями материи при помощи процедуры «минимальной» связи, широко используемой при описании калибровочных полей. Эта процедура учитывает взаимодействие с наименьшей размерностью масс. Однако лагранжиан Эйнштейна-Гильберта,

$$L_{\text{ЭГ}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R, \quad (12.12)$$

описывающий распространение гравитона ( $G$  – ньютоновская константа,  $R$  – риччи-кривизна) отличается от обычного кинетического слагаемого. Только, если разложить  $g_{\alpha\beta}$  вблизи плоской метрики

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \sqrt{G} h_{\alpha\beta}, \quad (12.13)$$

можно получить обычным образом нормированное бозонное поле  $h_{\alpha\beta}$  с размерностью массы, равной 1, для которого величина  $G$  сокращается. Таким образом, только для выбора (12.13) получаются пропагаторы обычного вида. Эта «перенормировка» поля  $h$  означает, что его связи с материей содержат фактор  $\sqrt{G}$ . Следуя обычному анализу размерных единиц, получаем массовую размерность  $G$ , равную  $(-2)$ . Её величина определяется массой Планка:  $M_{Pl}^{-2}$ ,  $M_{Pl} \approx 10^{19}$  ГэВ – фундаментальная константа. Заметим, что масса Планка не слишком отличается от той массы, которая вводилась при обсуждении масс нейтрино. Итак, связь гравитонов с полями материи содержит отрицательную размерность массы, т.е. эти взаимодействия неперенормируемые. Следовательно, они содержат в высшей степени нелинейные самовзаимодействия полей  $h$ . Можно ожидать наличия расхождений в теории возмущений, и они действительно существуют. Тем не менее, если работать в низшем порядке теории возмущений, не включая гравитационные петли, можно получить замечательную теорию гравитации. Это именно та теория, которую используют физики и астрофизики в повседневной

жизни. Это классическая ньютоновская и эйнштейновская гравитация. Она согласуется с квантовой кинематикой в том смысле, что удовлетворяется принцип неопределенности, а гравитоны являются квантами гравитационного поля. Однако петли расходятся, поэтому эту теорию нельзя использовать для вычисления радиационных поправок. Точно так же, как нельзя использовать для этих целей теорию Ферми слабых взаимодействий. Гравитационные радиационные поправки, как ожидается, должны быть подавлены положи-

тельными степенями  $P\sqrt{G} \approx \frac{P}{M_{Pl}}$ , где  $P$  – характерное значение

энергии-импульса в рассматриваемом процессе. Эти ожидания согласуются со всеми имеющимися наблюдательными данными.

Конечно, хотелось бы иметь полную согласованную теорию квантовой гравитации, которая бы «работала» при сколь угодно больших значениях энергии-импульса. Такая теория предсказывала бы новые явления, а также необычные связи между известными явлениями, аналогично тому, как переход от теории Ферми к теории электрослабых взаимодействий предсказал существование нейтральных токов. Полная теория могла бы описывать явления с большей кривизной (при больших  $P$ ), которые происходят в окрестности черных дыр.

Наконец, простейшее из всех взаимодействий, совместимое со всеми принципами стандартной модели

$$L_{\text{темной энергии}} = -\Lambda \int d^4x \sqrt{g}. \quad (12.14)$$

Этот член в лагранжиане приводит к эйнштейновскому космологическому члену, о котором сейчас говорят как о «темной» энергии. В космологических уравнениях он (при  $\Lambda > 0$ ) является источником положительной плотности  $p_\Lambda$  и отрицательного давления  $p = -p_\Lambda$ . Наблюдения указывают, что  $\sim 70\%$  массы Вселенной приходится на темную энергию. Темная энергия вызывает ускоренное расширение Вселенной.

Величина  $\Lambda$  имеет размерность массы  $(+4)$ , т.е. взаимодействие в высшей степени неперенормируемое. Астрономические наблюдения соответствуют значениям  $\Lambda \approx (10^{-3} \text{ эВ})^4$ . Эта величина созда-

ет серьезные проблемы: с одной стороны, она очень мала, с другой – слишком велика!

Как мы знаем из стандартной модели, наше «пустое» пространство, на самом деле, – довольно богато структурированная среда. «Пустое» пространство содержит конденсаты, нарушающие симметрию, а также виртуальные частицы. Поскольку гравитоны чувствительны ко всем формам энергии, они реагируют на любые вакуумные процессы. Простые оценки показывают, что «пустое» пространство должно «весить» на много-много порядков больше. Оно «должно» быть гораздо более плотным, чем, например, нейтронные звезды.

## 12.2. Замкнутые системы единиц

Попытаемся связать обсуждаемые единицы измерения и фундаментальные константы с другими системами единиц. Как говорилось выше, весьма естественно выбрать стандартную модель как базис для определения единиц измерения и фундаментальных констант. В свою очередь, в стандартной модели естественно рассматривать с  $\hbar$  в качестве единиц скорости и действия. Действительно, все фундаментальные константы могут быть выражены в единицах массы (энергии, импульса или обратной длины). Чтобы сделать полной систему единиц, следует добавить еще одну размерную величину. В стандартной модели – это параметр хиггсовского потенциала  $\mu$ . С другой стороны, мы не узнаем величину  $\mu$  до тех пор, пока не будет открыт хиггсовский бозон.

Имея это в виду, упомянем альтернативные системы единиц.

1. М. Планк предположил, что достаточно ввести три единицы измерения. Это механические единицы  $[M]$ ,  $[L]$ ,  $[T]$ , и их можно построить из универсальных параметров  $\hbar$ ,  $c$ ,  $G$ :

$$[M]_{\text{Планк}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}, \quad [L]_{\text{Планк}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \quad [T]_{\text{Планк}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}. \quad (12.15)$$

Эти единицы измерения называются планковскими. В общей теории относительности, как мы знаем, энергия-импульс связаны с пространственно-временной кривизной. Но эти величины измеряются в разных единицах, поэтому нужен связующий фактор.  $G$  как

раз и есть этот связующий фактор. Можно предположить, что  $G$  является «первичным ингредиентом» при построении единой физической теории. Причем в такой теории все фундаментальные величины, выраженные в планковских единицах, должны быть порядка единицы. Эта программа действий не столь проста, поскольку массы элементарных частиц чрезвычайно малы по сравнению с планковскими единицами. На «малости» массы протона,  $m_p \sim 10^{-18} [M]_{\text{Планк}}$  мы остановимся ниже. Что касается малости хиггсовского массового параметра  $\mu \sim 10^{-16} [M]_{\text{Планк}}$ , то это обстоятельство известно как проблема иерархий.

2. Еще до Планка, Stoney ввел систему единиц, основанную на  $e$ ,  $c$ ,  $G$ . Алгебраически эта система не слишком отличается от планковской. В самом деле, поскольку постоянная тонкой структуры  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$  – это число ( $\sim 1/137$ ), то можно считать, что  $\hbar = \frac{e^2}{c}$ . Таким образом, чтобы построить фундаментальную теорию в терминах чисел и  $e$ ,  $c$ ,  $G$ , необходимо было бы постулировать существование квантовой механики.

3. Атомные единицы, основанные на  $e$ ,  $\hbar$ ,  $m_e$  ( $m_e$  – масса электрона). В этом случае нерелятивистское уравнение Шрёдингера, в котором ядро рассматривается как точечный заряд бесконечной массы, становится безразмерным. Таким образом, в этом приближении размеры и формы молекулы описываются численными значениями.

4. «Сильная» система единиц, основанная на  $\hbar$ ,  $c$ ,  $m_p$ . Эти единицы удобны для КХД и ядерной физики. Однако  $m_p$  нельзя рассматривать как фундаментальную константу, поскольку протон состоит из кварков и глюонов. Более близок к фундаментальным параметр  $\Lambda_{\text{КХД}}$ , который параметризует поведение зависящей от энергии константы сильного взаимодействия. К сожалению, величину  $\Lambda_{\text{КХД}}$  довольно трудно определить в теории и измерить.

«Философская» значимость полного набора единиц заключается в том, что позволяет выразить любую фундаментальную константу просто как число.

### 12.3. Четыре типа фундаментальных констант

Замечательно, что любое из известных нам нелинейных взаимодействий включает участие в нем одного из трех типов частиц: гравитонов, векторных калибровочных частиц и хиггсовских бозонов. Дадим геометрическую интерпретацию калибровочным и гравитационным связям и отметим в этом отношении исключительность хиггсовского сектора.

#### Внутренняя кривизна.

Чтобы обнаружить геометрическую природу калибровочных связей, удобно переопределить поля, включив в них калибровочные константы

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\alpha^a &= gA_\alpha^a, \\ \tilde{F}_{\alpha\beta}^a &= \partial_\alpha \tilde{A}_\beta^a - \partial_\beta \tilde{A}_\alpha^a - f^{abc} \tilde{A}_\beta^a \tilde{A}_\alpha^b,\end{aligned}\tag{12.16}$$

где  $f^{abc}$  – структурные константы группы. При таком определении полей константы связи не входят в ковариантные производные. Они входят только как коэффициенты в калибровочных кинетических членах типа

$$L_{\text{калиб.кин}} = -\frac{1}{4g^2} \tilde{F}_{\alpha\beta}^a \tilde{F}^{a\alpha\beta}.\tag{12.17}$$

Нормировка кинетических членов является канонической для полей  $A$ , то есть она становится нестандартной для полей  $\tilde{A}$ . В терминах фейнмановских диаграмм, пропагаторы для  $\tilde{A}$  будут содержать факторы  $g^2$ , но вершины окажутся свободными от констант связи. Таким образом, будет проявляться универсальность связей. Тем самым мы приходим к ситуации с гравитацией: естественная формулировка общей теории относительности основана на универсальности, но содержит неканонический кинетический член.

Напряженность калибровочного поля определяется некоммутативностью калибровочных ковариантных производных

$$([\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\varphi)^j = i\tilde{F}_{\alpha\beta}^a \tau_k^{aj} \varphi^k,\tag{12.18}$$

где  $\phi$  – поле в представлении, задаваемом матрицей  $\tau$ . Напряженность калибровочного поля оказывается аналогичной римановой кривизне пространства-времени:

$$([\nabla_\alpha, \nabla_\beta]V)^\gamma = R^\gamma_{\alpha\beta}V^\delta \quad (12.19)$$

для векторного поля  $V$ . Напряженность калибровочного поля является мерой кривизны внутреннего пространства, одной и той же для каждой пространственно – временной точки, в которой «заряженное» поле  $\phi^j$  распространяется, вращая его индексы. Такие «внутренние» пространства возникают, например, в теориях типа Калуцы-Клейна при компактификации дополнительных измерений.

В этой интерпретации кинетический член  $\sim |F|^2$  оказывается своего рода «сопротивлением» искривлению. Когда константа связи мала, калибровочное поле становится «жестким», и не распространяется от своих нулевых значений (или калибровочно – эквивалентных). При больших константах связи калибровочные поля свободно флуктуируют.

## 12.4. Пространственно-временная кривизна и пространственно-временной объем

Лагранжиан Эйнштейна–Гильберта характеризует «жесткость» пространства-времени, его «сопротивляемость» искривлению. В отличие от ситуации с калибровочной кривизной, не все формы пространственно-временной кривизны имеют одинаковую значимость в действии. Действительно, отсутствие положительно определенного выражения  $\tilde{F}^a_{\alpha\beta}\tilde{F}^{a\alpha\beta}$  влечет за собой  $\tilde{F}^{a\alpha\beta} = 0$ , т.е. тривиальность калибровочного поля. Однако  $\sqrt{g}R$  не является положительно определенной величиной. Более того, вариация

$$\delta(\sqrt{g}R) = \sqrt{g}\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\delta g_{\alpha\beta} \quad (12.20)$$

может обращаться в ноль без обращения в ноль величины  $R_{abgd}$ .

Неположительность действия Эйнштейна-Гильберта вносит серьезные проблемы при построении квантовой теории, основанной на общей теории относительности. В частности, проблематично введение интеграла по путям.

Космологический член  $L_{\text{скрытой массы}} = -\Lambda \int d^4x \sqrt{g}$  пропорционален пространственно-временному объему. Для  $\Lambda > 0$  это означает приписывание малого действия большим пространственно-временным объемам.

До сих пор обсуждалось 5 фундаментальных констант: три ассоциированные с кривизной калибровочного поля, одна – с пространственно-временной кривизной и одна – с пространственно-временным объемом. Эти константы допускают геометрическую интерпретацию. Первые четыре описывают огромное число явлений и проверены в многочисленных экспериментах. Космологический член тоже необходим для описания Вселенной (её ускорения).

Остающиеся фундаментальные константы проявляются себя в качестве коэффициентов в хиггсовском потенциале, также как юкавские константы связи. Все эти связи содержат хиггсовское поле, но ни одна из них непосредственно не измерена. Величины, которые можно измерить, возникают следующим образом. Для простоты ограничимся кварковым сектором. Определим две комплексных матрицы  $h_a^b, k_a^b$  связей (индексы пробегает значения 1, 2, 3 для трех поколений). Верхние и «нижние» кварки имеют связи, описываемые лагранжианами

$$\begin{aligned} L_{up} &= -h_a^b \bar{Q}_{Lab} U_R^a \Phi^b + \text{э.с.}, \\ L_{down} &= -k_a^b \bar{Q}_{Lab} D_R^a \Phi^b + \text{э.с.} \end{aligned} \quad (12.21)$$

В этом выражении греческие индексы для слабой  $SU(2)$  принимают значения 1 и 2:

$$Q_L^b \equiv \begin{pmatrix} U_L^b \\ D_L^b \end{pmatrix}. \quad (12.22)$$

При этом  $\Phi^a$  – хиггсовский дублет. Когда  $\Phi^1$  приобретает вакуумное среднее  $v$ , нарушая электрослабую группу  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  до  $U(1)_{em}$ , матрицы связей в (12.21) «индуцируют» массовые матрицы

$$\begin{aligned}
L_{up, mass} &= -h_a^b \psi \bar{U}_{Lab} U_R^a + \text{э.с.}, \\
L_{down, mass} &= -k_a^b \psi \bar{D}_{Lab} D_R^a + \text{э.с.}
\end{aligned}
\tag{12.23}$$

Теперь, чтобы получить частицы с наблюдаемыми свойствами (собственные состояния свободного лагранжиана), нужно унитарным преобразованием диагонализировать эти матрицы. Обозначая матрицы унитарных вращений через  $S_{UL}$ ,  $S_{UR}$ ,  $S_{DL}$ ,  $S_{DR}$  и  $\tilde{M}_{Ua}^b \equiv \psi h_a^b$ ,  $\tilde{M}_{Da}^b \equiv \psi k_a^b$ , потребуем, чтобы

$$S_{UL}^+ \tilde{M}_U S_{UR} = M_U, \quad S_{DL}^+ \tilde{M}_D S_{DR} = M_D, \tag{12.24}$$

причем  $M_U$ ,  $M_D$  – положительны и диагональны. Матрицы  $M_U$  и  $M_D$  содержат «наблюдаемые» массы кварков up-типа ( $q = +2/3$ ) и down-типа ( $q = -1/3$ ). Матрица  $CKM$  задается произведением  $S_{UL}^+ S_{DL}$ . Матрица  $CKM$  определяет слабые углы смешивания, т.е. зависящие от семейства мультипликативные факторы в заряженных токах, с которыми связаны  $W$ -бозоны. Таким образом, измеряемые массы и углы смешивания оказываются сложной комбинацией фундаментальных констант. На самом деле, ситуация может оказаться еще более сложной, если существует несколько хиггсовских полей, дающих вклад в массы кварков и лептонов.

## 12.5. Объединение констант, связанных с кривизной

Структура калибровочного сектора позволяет значительно расширить её симметрию. Простейшая группа, как обсуждалось в главе 8, в которую могла бы входить калибровочная группа стандартной модели –  $SU(5)$ . В этой группе все фермионы одного поколения попадают в два представления  $(10 + \bar{5})$ . Группа  $SO(10)$  объединяет эти и одну дополнительную синглетную относительно  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  частицу в одно представление – 16-плет. Эта дополнительная частица весьма желательна. Она имеет квантовые числа правого нейтрино и может играть существенную роль в see-saw механизме генерации масс нейтрино.



Объединение квантовых чисел, являясь притягательным моментом, остается чисто формальным до тех пор, пока оно не наполнено физическим содержанием. Это требует реализации механизма «усиления симметрии» в локальной калибровочной теории. Однако неабелева калибровочная симметрия требует универсальности: нужно чтобы величины различных констант связи оказались одинаковыми, чего на опыте не наблюдается. К счастью, есть способ разрешения этой проблемы. Если высшая симметрия нарушена на высокой энергетической шкале (или на малых расстояниях), то мы способны наблюдать взаимодействия при меньших энергиях (больших расстояниях), когда их интенсивности изменяются за счет эффектов поляризации вакуума. При этом константы связи становятся «бегущими». На этом пути можно проверить гипотезу о том, что наблюдаемые константы связи происходят от одного (объединенного) значения. Если учитывать поляризацию вакуума в стандартной модели, то обнаружится приближенное объединение. В *SUSY* же теории происходит точное объединение. Объединение происходит на очень большом энергетическом масштабе  $\sim 10^{16}$  ГэВ.

Мы уже обсуждали, как возникают массы нейтрино и смешивание в стандартной модели при использовании неперенормируемых связей. С учетом идеи объединения, эти связи следует рассматривать как низкоэнергетическое приближение других, более фундаментальных связей, имеющих лучшее низкоэнергетическое поведение, аналогичное переходу от теории Ферми к современной электрослабой теории. Действительно, правые нейтрино могут иметь обычные, размерности четыре, юкавские связи с лептонным дублетом. В *SO*(10)-теории эти связи наиболее обременительны, поскольку они имеют отношение к симметрии, «ответственной» за формирование масс кварков с зарядом 2/3. Кроме того, поскольку правые нейтрино нейтральны относительно  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , они, в отличие от фермионов стандартной модели, могут иметь собственную массу майорановского типа без нарушения низкоэнергетических симметрий. Можно ожидать, что собственная масса возникает на масштабе нарушения *SO*(10). Массы такой величины исключают правые нейтрино из спектра, но они имеют косвенные проявления: во втором порядке теории возмущений обычные левые нейтрино посредством юкавских связей переходят в правые ней-

трино и наоборот. Этот процесс генерирует ненулевые массы обычных нейтрино, чьи значения гораздо меньше масс лептонов и кварков.

Массы частиц, предсказываемые при этом подходе, коррелированы с наблюдаемыми массами нейтрино. Иначе говоря, массовый масштаб, ассоциированный с эффективной неперенормируемой константой связи, оказывается приблизительно равным масштабу объединения. Многие, хотя и не все конкретные модели объединения, предсказывают  $M_{\nu R} \sim M_{\text{объединения}}$ .

Объединение «стремится сгладить» различие между кварками и лептонами, т.е. предоставить возможность распада протона. Эксперименты определили нижнюю границу на время жизни протона  $\tau_p > 10^{34}$  лет. Трудно представить, чтобы этот процесс был подавлен без очень большого масштаба объединения. Аналогично, трудно избежать идеи объединения, рассматривая связи между различными семействами. Существуют строгие экспериментальные ограничения на процессы  $FCNC$ , а также на процессы с нарушением лептонного числа. Для подавления этих процессов надо иметь большой энергетический масштаб. Аксионная физика, уже обсуждавшаяся в главе 5, требует большого масштаба нарушения  $PQ$ -симметрии. Существующие наблюдения ограничивают масштаб  $M_{PQ} > 10^9$  ГэВ. Опять таки большинство конкретных моделей  $PQ$ -симметрии предполагают, что  $M_{PQ} \sim M_{\text{объединения}}$ .

На масштабе объединения становятся реальными связи электро-слабого сектора с гравитацией. Поскольку гравитация непосредственно связана с энергией-импульсом, то гравитация проявляет себя тем сильнее, чем короче длина волны её пробников. Как можно ожидать, гравитация становится существенной на масштабах  $\sim 10^{18}$  ГэВ, этот масштаб не слишком отличается от  $M_{\text{объединения}}$ .

## 12.6. Важность низкоэнергетической суперсимметрии

Как известно, в отсутствие суперсимметрии радиационные поправки к вакуумным средним хиггс-бозона расходятся, и их нужно фиксировать «руками» как ренормируемый параметр. Но тогда становится непонятным, почему эмпирическое значение, скажем,

параметра  $\mu^2$  в хиггсовском потенциале, столь мало по сравнению с масштабом объединения?

Низкоэнергетическая *SUSY* предохраняет хиггсовский (масс)<sup>2</sup> член от квадратично расходящихся радиационных поправок. Поскольку масштаб расщепления масс между частицами стандартной модели и их суперпартнерами, как ожидается, меньше или порядка ТэВ, то радиационные поправки оказываются конечными. Однако и тут все далеко не просто. Усиление с ростом энергии симметрии объединения требует, чтобы у хиггсовского дублета появились партнеры, заполняющие соответствующие представления. Однако эти партнеры должны иметь квантовые числа, которые бы обеспечили распада протона. Поэтому, если такие партнеры существуют, их массы должны быть очень большими, порядка масштаба объединения.

Суперсимметрия связывает физическую массу легчайшего хиггс-бозона стандартной модели, которая в отсутствие *SUSY* является свободным параметром, с массами *W* и *Z* бозонов. Еще очень важно отметить, *SUSY* вносит очень малые поправки к так называемым электрослабым наблюдаемым, которые находятся в согласии с предсказаниями стандартной модели.

Наконец, низкоэнергетическая *SUSY* предсказывает замечательного кандидата на роль скрытой массы. В силу сохранения *R*-четности ( $R = (-1)^{3B+L+2S}$ ), легчайшая *SUSY* частица оказывается стабильной. Легчайшая *SUSY* частица могла бы быть комбинацией фотино, зино и хиггсино. Действительно, производство этих частиц при Большом Взрыве может быть достаточным для обеспечения наблюдаемой плотности скрытой массы.

## 12.7. Константы в космологии

В последние годы возникла еще одна стандартная модель. На этот раз – в космологии. Подобно стандартной модели фундаментальной физики, стандартная космологическая модель требует определения нескольких параметров. При задании этих параметров уравнения стандартной космологической модели описывают закономерности крупномасштабных структур Вселенной. Обычно считают, что стандартная космологическая модель состоит из двух

частей. Одна из них содержит параметризацию уравнения состояния, входящего в релятивистские модели однородно расширяющейся Вселенной (модель Фридмана-Робертсона-Уокера). Другая часть содержит предположения о малых первоначальных флуктуациях.

Согласно первой части, набор параметров стандартной космологической модели определяется свойствами материи, усредненными по большому пространственному объему. К ним относятся плотности барионной материи, нейтрино, скрытой массы и темной энергии. Как известно, плотность барионной материи составляет 5 % от полной плотности.

Существует теория, предсказывающая рождение нейтрино во время Большого Взрыва. Поэтому, зная массы нейтрино, можно было бы определить вклад нейтрино в полную плотность. К сожалению, данные по нейтринным осцилляциям чувствительны лишь к разностям масс нейтрино. Измеряемые разности масс гораздо меньше (на два порядка величины), чем границы на абсолютные массы нейтрино.

Относительно скрытой массы (на самом деле прозрачной материи) известно довольно мало. Она проявляет себя по влиянию её гравитационного поля на движение видимой материи. Скрытая масса оказывает очень малое давление и составляет около 25 % от полной плотности.

Темная энергия же составляет около 70 % от полной плотности. Она имеет отрицательное давление.

За счет существования ограничения плоского пространства, эти четыре плотности не являются независимыми. Они складываются в критическую плотность, зависящую от интенсивности гравитации и скорости расширения Вселенной.

Используя вышеупомянутые относительные плотности и плоскостность пространства, а также уравнения общей теории относительности, можно экстраполировать сегодняшнее расширение назад по времени. Эта процедура определяет стандартный (однородный) сценарий Большого Взрыва. Этот сценарий объясняет красное смещение удаленных галактик, существование микроволнового излучения и относительный избыток легких элементов.

В стандартной космологической модели имеется параметр, характеризующий отклонение от однородности в ранней Вселенной. Зародыши растут вследствие гравитационной неустойчивости.

Таким образом, космология сводится к нескольким гипотезам и к 4 параметрам: плотность обычной барионной материи, нейтрино, скрытой массы и темной энергии, ограниченными критической плотностью, а также амплитудой первичных флуктуаций. Поскольку плотность нейтрино вычисляется в терминах стандартной модели элементарных частиц, реально остается на один параметр меньше. Параметры космологической модели определяются усредненными свойствами чрезвычайно крупных макроскопических объектов.

Существует несколько моделей, описывающих наблюдаемую асимметрию между материей и антиматерией. К сожалению, окончательный выбор между ними зависит от деталей поведения частиц при энергиях, абсолютно недостижимых в обозримом будущем. Гораздо больше оптимизма вызывает проблема скрытой массы. Здесь необычность ситуации состоит в том, что существует две хороших возможности. Симметрию стандартной модели можно расширить, и видится два логически независимых способа сделать это. Один из них – ввести  $PQ$ -симметрию и связанную с ней очень легкую, слабовзаимодействующую частицу – аксион. Другой способ – введение суперсимметрии и расширение специальной теории относительности (СТО) путем включения квантовых пространственно-временных преобразований. В этом подходе  $LSP$  является кандидатом на скрытую массу. Свойства обеих частиц – аксиона и  $LSP$  – согласуются с известными свойствами скрытой массы. Более того, можно оценить, как много этих частиц рождается при Большом Взрыве. В последние годы ведутся интенсивные поиски скрытой массы в любой из возможных её форм.  $LHC$  способен ответить на многие вопросы относительно существования кандидатов на скрытую массу.

## 12.8. Темная энергия

Темная энергия уже рассматривалась нами как фундаментальная константа  $\Lambda$  в расширенной стандартной модели. Её можно рассматривать как внутреннее действие, приходящееся на единицу объема пространства-времени. В эту величину способны давать вклады несколько физических явлений: скалярные конденсаты, включая киральные конденсаты КХД, хиггсовские конденсаты, вызывающие электрослабое нарушение симметрии, а также гипотетические конденсаты тяжелых хиггсов, связанные с нарушением симметрии Большого объединения. Если существуют малые дополнительные измерения, то вклад в темную энергию способны вносить конденсаты гравитонов. Возможны вклады от квантовых флуктуаций. Теоретические оценки каждого из этих вкладов, за исключением киральных конденсатов, очень неопределенные. К сожалению, до сих пор все попытки модифицировать теорию гравитации таким образом, чтобы обеспечить малость величины  $\Lambda$ , не увенчались успехом.

Можно предполагать, что существует множество Вселенных с различными значениями фактических параметров, включая не только фундаментальные константы, но и дискретные параметры, характеризующие калибровочные группы, их представления и т.д. Под Вселенными мы можем подразумевать очень удаленные части пространства, до которых мы не имеем наблюдательного доступа. Очевидно, что фундаментальные параметры для разных Вселенных могут быть разными, т.е. эти параметры определенным образом распределены. При определенных наборах этих параметров в некоторых Вселенных возможно возникновение сложных структур, например, разумной жизни. При слишком большом значении (положительном или отрицательном) темной энергии расширение (или коллапс) Вселенной окажется слишком быстрым, чтобы сформировать гравитационные неустойчивости с последующей эволюцией этих неустойчивостей. Таким образом, только относительно малые величины темной энергии способны быть наблюдаемыми. Действительно, если считать, что все другие параметры фиксированы и допускать изменения  $\Lambda$ , то мы обнаружим, что существенно большие значения (скажем в 10 или 1000 раз), исключены.

## 12.9. Фундаментальны ли фундаментальные константы?

С одной стороны, некоторые из обсуждавшихся выше констант входят в другие, более базисные элементы:

1) калибровочные константы способны к объединению. Очевидно, что два параметра – масштаб объединения и константа объединения являются более фундаментальными, чем три независимых константы связи стандартной модели;

2) массы нейтрино и углы смешивания возникают за счет процессов объединения;

3) малая величина параметра  $\theta_{\text{КХД}}$  связана с симметрией  $PQ$ .

Эта схема распространяется и на параметры стандартной космологической модели:

1) плотности нейтрино и барионов являются отражением микроскопической физики на больших энергетических масштабах;

2) свойства скрытой массы, т.е. фундаментальные константы, определяющие её поведение, а также плотность скрытой массы, зависят от физики малых расстояний;

С другой стороны, другие фундаментальные константы требуют пристального рассмотрения:

1) величина  $\lambda$  – параметр темной энергии, представляет собой сумму расходящихся вкладов, чудесным образом сокращающихся;

2) аналогичная ситуация с параметром  $\mu^2$  хиггсовского потенциала. Заметим, что в  $SUSY$  моделях происходит автоматическое сокращение расходимостей;

3) множество параметров, характеризующих связи хиггс-бозона и определяющих массы кварков и лептонов, а также смешивание, можно сократить за счет (спонтанно нарушенных) симметрий ароматов.

Инфляционная космология дает основания считать, что наблюдаемая Вселенная со своим набором фундаментальных констант – лишь одна из возможных Вселенных. В других Вселенных фундаментальные константы могут оказаться другими. Наконец, если фундаментальные константы способны изменяться в пространстве, то почему бы им не изменяться во времени? Если эффективные

Вселенные разделены большими энергетическими барьерами, то переход между ними может быть очень редким и катастрофическим. Если легкие поля, определяющие структуру «эффективной» Вселенной, изменяются во времени, то эти изменения могут проявить себя в изменении фундаментальных констант. Так, если изменяется во времени скалярное поле  $\eta$ , связанное с фотонами  $L \sim \eta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , то это должно проявляться в изменении константы  $\alpha_{em}$ .

## 12.10. Временные вариации фундаментальных констант как проявления новой физики

1. Впервые возможность изменения фундаментальных констант со временем обсуждалась в работе Дирака 1937 года. С современной точки зрения, временные вариации фундаментальных констант неудивительны. Например, в суперструнных теориях и в бранных сценариях константы, связанные с модулями (скалярных полей) могут зависеть от времени. Действительно, временные изменения можно ожидать в любой теории, в которой константы связи ассоциированы с вакуумными средними скалярных полей. В стандартной модели, например, массы пропорциональны вакуумному среднему хиггсовского поля. Аналогичным образом, калибровочные и юкавские связи определяются вакуумными средними скалярных полей.

В качестве простого примера, предположим, что многомерный оператор связывает скаляр  $\phi$  с элементарным тензором  $F_{\mu\nu}$

$$L \sim \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{\lambda\phi}{M_{Pl}} \right] F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots, \quad (12.25)$$

где  $\lambda$  – безразмерная величина,  $M_{Pl}$  – масса Планка. Заменим  $A_\mu$  на  $A'_\mu$

$$A_\mu = A'_\mu \left( 1 - \frac{\lambda\phi}{2M_{Pl}} \right). \quad (12.26)$$



При этом  $A_\mu$  имеет канонический вид кинетической энергии. Связи заряженных частиц с  $A_\mu$  будут тоже каноническими в терминах заряда  $e'$ , определенного следующим образом:

$$e = e' \left( 1 + \frac{\lambda \phi}{2M_{Pl}} \right). \quad (12.27)$$

Если бы поле  $\phi$  было постоянным классическим полем, то эффекты перемасштабирования (12.26, 12.27) были бы ненаблюдаемыми. Если же  $\phi$  изменяется со временем или в пространстве, эффективный электрический заряд  $e'$  тоже будет изменяться. Так, если  $\phi$  зависит от времени, то его изменения определяется уравнением

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (12.28)$$

где  $H$  – постоянная Хаббла,  $V$  – скалярный потенциал.

В дополнение к временным (пространственным) изменениям, могут существовать и новые операторы, ассоциированные с производными поля  $\phi$ . Они могли бы вызывать новые дальнедействующие силы, характеризующиеся плотностью энергии квантов поля  $\phi$ .

Естественным масштабом для скорости изменения, например, постоянной тонкой структуры, является

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sim M_{Pl} \approx 10^{+43} \frac{1}{c}. \quad (12.29)$$

Действительные вариации оказываются гораздо меньше

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sim 10^{-66} M_{Pl}. \quad (12.30)$$

Заманчиво предположить, что, поскольку  $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$  так мало по сравнению с естественным масштабом изменения (12.29), то естественный масштаб равен нулю или ненаблюдаемо мал. Однако здесь можно провести аналогию с космологической константой. Естественный масштаб для вакуумной плотности энергии связан с космологической константой:  $\rho_{\text{вак}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ , то есть  $\rho_{\text{вак}} \sim M_{Pl}^4$ . Так как

$\rho_{\text{вак}}$  гораздо меньше этого предела, то должен существовать некоторый принцип, обеспечивающий значение  $\rho_{\text{вак}} = 0$ . Данные по микроволновому излучению и типу *IA* сверхновой свидетельствуют, что

$$\rho_{\text{вак}} \sim 10^{-124} M_{Pl}^4 \neq 0. \quad (12.31)$$

Если  $\alpha$  способна изменяться во времени, то и другие фундаментальные константы (такие как калибровочные константы  $\alpha_i$ , юкавские связи  $h$ , электрослабый масштаб  $v$  и ньютоновская константа  $G_N$ ) тоже могут зависеть от времени. Наблюдение (ненаблюдение) временных или пространственных вариаций вполне возможно рассматривать как проверку фундаментальных свойств теории.

### Поиск изменений $\alpha$ .

Изучая поглощение света, испускаемого квазарами с красным смещением  $0.5 < z < 3.5$  (Webb и др.), получим

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha_z - \alpha}{\alpha} \approx (0.72 \pm 0.18) \cdot 10^{-5}, \quad (12.32)$$

где  $\alpha_z(\alpha)$  – значения постоянной тонкой структуры при значении красного смещения  $z$  (в настоящее время). Значения (12.32) соответствуют  $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \approx \frac{10^{-15}}{\text{год}}$ . Cowie и др. ограничили значение

$\chi = \frac{\alpha^2 g_p m_e}{M_p}$ , где протонный магнитный момент  $\frac{eg_p}{2M_p}$ , путем изучения сверхтонкого расщепления водорода при  $z \sim 1.8$ . Potekhin и др. с помощью молекулярного водорода получил ограничения для  $z = 2.81$

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = (0.7 \pm 1.1) \cdot 10^{-5} \quad (12.33)$$

и для величины  $Y = \frac{M_p}{m_e}$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = (8.3_{-5.0}^{+6.6}) \cdot 10^{-5}. \quad (12.34)$$

Очень строгие ограничения следуют из данных по *OKLO*-реактору. Так, отношение  $^{149}\text{Sm}/^{147}\text{Sm}$  уменьшается за счет захвата тепловых нейтронов

$$n + ^{149}\text{Sm} \rightarrow ^{150}\text{Sm} + \gamma. \quad (12.35)$$

При этом сечение определяется низколежащим резонансом, в котором происходит практически точное сокращение кулоновских и сильных эффектов. Таким образом, даже небольшое изменение  $\alpha$  может быть существенным. По этим данным

$$-6.7 \cdot 10^{-17} \text{ год}^{-1} < \dot{\alpha}/\alpha < 5 \cdot 10^{-17} \text{ год}^{-1}. \quad (12.36)$$

Этот результат напрямую не противоречит (12.34), поскольку относится к более раннему периоду  $((6 \div 11) \cdot 10^{11} \text{ лет}$  тому назад).

Согласно теории нуклеосинтеза Большого взрыва, при значениях красного смещения  $\sim 10^9 \div 10^{10}$ , изменение  $\Delta\alpha/\alpha < O(10^{-2})$ . Из данных по микроволновому излучению  $\Delta\alpha/\alpha \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$  для  $z \sim 1000$ .

### Корреляции с $\alpha_s$ , $h$ , $v$ , $G_N, \dots$

Если изменяется величина  $\alpha$ , то и другие фундаментальные константы также способны изменяться. Корреляции в их изменениях могут служить проверкой современных теоретических представлений. Действительно, наблюдаемые низкоэнергетические калибровочные константы объединяются на масштабе  $M_G \sim 3 \cdot 10^{16} \text{ ГэВ}$ , как это предсказывается суперсимметричным Большим объединением:

$$\frac{1}{\alpha_i(M_Z)} = \frac{1}{\alpha_G} + b_i t_G, \quad (12.37)$$

где  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – калибровочные константы, связанные с группами  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ ;  $t_G = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{M_G}{M_Z} \right) \approx 5.32$ ;  $\alpha_G^{-1} \approx 23.3$  – об-

ратная константа Большого объединения;  $b_i$  – коэффициенты  $\beta$ -функции. В минимальной суперсимметричной стандартной модели  $b_i = (11/3, 1, -3)$ . Бегущая электромагнитная константа связана с другими константами соотношением

$$\alpha^{-1} = \frac{5}{3} \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} \approx 127.9, \quad (12.38)$$

где все три константы определяются на масштабе  $M_Z$ . Если объединение калибровочных констант происходит (в  $MSSM$  или другой теории), то вероятнее всего, что все три калибровочные константы будут изменяться одновременно. Простейшая возможность – предположить, что доминирующий эффект вносит  $\alpha_G^{-1}$ . В этом случае константа сильного взаимодействия изменяется так, что

$$\frac{\Delta\alpha_s}{\alpha_s} \approx \frac{3}{8} \frac{\alpha_s}{\alpha} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \sim \frac{5}{8} \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad (12.39)$$

где  $\alpha_s$  оценивается на масштабе  $M_Z$ . При этом следует ожидать более значительных изменений масштаба  $\Lambda_{\text{КХД}}$ , на котором  $\alpha_s$  становится больше единицы

$$\frac{\Delta\Lambda_{\text{КХД}}}{\Lambda_{\text{КХД}}} \sim 34 \frac{\Delta\alpha}{\alpha}. \quad (12.40)$$

Поскольку большинство адронных масштабов масс (за исключением массы пиона) пропорциональны  $\Lambda_{\text{КХД}}$ , то их вариации ожидаются на уровне (12.40).

Интересно рассмотреть вариации электрослабого масштаба  $v \approx 246$  ГэВ, или отношения  $v$  к масштабу Большого объединения  $M_G$ .

Если ввести феноменологический параметр  $k$  с помощью соотношения

$$\frac{\Delta v}{v} \equiv k \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad (12.41)$$

то тогда

$$\frac{\Delta\alpha_s}{\alpha_s} \sim \frac{3}{8} \frac{\alpha_s}{\alpha} \left(1 - \frac{10\alpha}{\pi} k\right) \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad \frac{\Delta\Lambda_{\text{КХД}}}{\Lambda_{\text{КХД}}} \sim 34(1 + 0.005k) \frac{\Delta\alpha}{\alpha}. \quad (12.42)$$

Эти поправки малы для  $k \approx 1$ , но важны для больших  $k$ . Оказывается, что при  $k \approx 70$  в теориях, в которых величина  $v$  сравнима с масштабом мягкого нарушения суперсимметрии, нарушение  $SUSY$  происходит в скрытом секторе на масштабе, при котором объединенная калибровочная константа становится сильной.

Удобно ввести феноменологические константы для исследования вариаций других фундаментальных констант. Так, вариация

юкавской связи  $h_a$  для фермиона сорта  $a$  (его масса, вследствие механизма Хиггса,  $m_a = h_a v$ ) параметризуется в виде

$$\frac{\Delta h_a}{h_a} \equiv \lambda_a \frac{\Delta \alpha}{\alpha}. \quad (12.43)$$

Аналогично, вариация планковской массы  $M_{Pl} \approx G_N^{-1/2}$

$$\frac{\Delta M_{Pl}}{M_{Pl}} \equiv \rho \frac{\Delta \alpha}{\alpha}. \quad (12.44)$$

Возможные вариации других наблюдаемых величин можно выразить в терминах этих параметров. Например, для величин  $X$  и  $Y$  (12.33), (12.34)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X}{X} &\sim (-32 + \lambda + 0.8k) \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \sim (23 \pm 6) \cdot 10^{-5}, \\ \frac{\Delta Y}{Y} &\sim (34 - \lambda - 0.8k) \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \sim (-24 \pm 6) \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \quad (12.45)$$

где выбрано одинаковое значение  $\lambda$  для всех юкавских факторов  $\lambda_a$ , а численные оценки получены для  $\lambda = k = 0$  и условия (12.32).

Таким образом, временные (пространственные) вариации фундаментальных констант в теориях с дополнительными измерениями или скалярными полями выглядят довольно естественными. Естественным масштабом вариаций оказывается величина  $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sim M_{Pl} \sim 10^{43} \text{ с}^{-1}$ . Вариация величины  $\alpha$  влечет за собой вариации других фундаментальных констант.

## 12.11. Фундаментальные константы в физике высоких энергий

Стандартная модель содержит большое число констант, в частности, массовых параметров, которые невозможно предсказать в теории и которые выбираются из экспериментальных данных. В этом отношении стандартная модель может рассматриваться как эффективная модель более общей теории. Стандартная модель основана на локальных законах и не учитывает граничных условий, в

частности, космологических граничных условий. Вполне возможно, что некоторые фундаментальные константы определяются граничными условиями. Некоторые из констант, содержащихся в стандартной модели, способны «сильно флуктуировать» во время рождения Вселенной и быть «замороженными» после этого. Другие же константы могли бы определяться динамическими законами, выходящими за рамки стандартной модели. Очевидно, что некоторые (или даже все) фундаментальные константы – вовсе не константы, а изменяются во времени. Эта идея, как уже говорилось, впервые высказана П.Дираком, который, предполагал временную зависимость гравитационной постоянной. Временная зависимость фундаментальных констант (в частности, величины  $\alpha$ ) многократно исследовалась экспериментально

$$\Delta\alpha/\alpha \approx -(0.72 \pm 0.18) \cdot 10^{-5}. \quad (12.46)$$

Величина  $\alpha$  играет особую роль в атомной физике. Еще в 1917 году Зоммерфельд заметил, что тонкая структура атомных уровней определяется безразмерной величиной, чье значение на сегодняшний день

$$\alpha^{-1} = 137.03599976(50). \quad (12.47)$$

Численно оказывается, что величина  $\alpha^{-1}$  очень близка к целому числу. А. Эддингтон даже высказывал предположение о том, что величина  $\alpha^{-1}$  связана с полным числом различных заряженных объектов. Вскоре после А. Эддингтона, В. Гейзенберг предложил описывать величину  $\alpha$  с помощью алгебраической формулы (справедливой с точностью  $10^{-4}$ )

$$\alpha = 2^{-4} 3^{-3} \pi. \quad (12.48)$$

В 1971 году Вейлер вывел из групповых соображений алгебраическую формулу (с точностью  $10^{-6}$ ):

$$\alpha = \frac{9}{8\pi^4} \left( \frac{\pi^5}{2^4 5!} \right)^{1/4}. \quad (12.49)$$

С сегодняшней точки зрения, такие попытки выражения величины  $\alpha$  выглядят бесполезными. Действительно, в квантовой электродинамике значение константы связи меняется при изменении энергетической шкалы.

Квантовая электродинамика остается наиболее успешной теорией. Она объединяет электродинамику, квантовую механику и СТО. КЭД – перенормируемая теория, проверенная экспериментально на уровне  $10^{-7}$ . Физические величины, такие как аномальный магнитный момент электрона, вычисляются в терминах  $\alpha$ . Из сравнения вычисленного в теории аномального магнитного момента электрона и его экспериментального значения определяется величина  $\alpha$ . Величина  $\alpha$  описывает интенсивность взаимодействия в электродинамике на расстояниях, больших комптоновской длины волны электрона. На меньших масштабах  $\alpha$  слабо изменяется. Если в КЭД учитывать только фотонное поле и электрон, эффективная величина  $\alpha$  в импульсном пространстве

$$\alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left( -\frac{q^2}{Am_e^2} \right)}, \quad (12.50)$$

где  $A = \exp(5/3)$  и  $-q^2 > 0$ .

Бесконечно малое изменение  $\alpha$  определяется уравнением ренорм-группы

$$\frac{de(q; e_\tau)}{d \ln \left( \frac{q}{M} \right)} = \beta(e), \quad e(M; e_r) = e_r, \quad (12.51)$$

$M$  – точка нормировки.

При высоких энергиях имеются вклады в  $\beta$ -функцию не только от  $e^+e^-$  пар, но и от  $\mu^+\mu^-$ , а также  $q\bar{q}$ -пар. Чем меньше расстояние, тем больше величина  $\alpha$ . Этот эффект непосредственно проявляется в эксперименте. На  $LEP$  эффективная величина  $\alpha$  задается масштабом массы  $Z$ -бозона

$$\alpha(M_Z) \approx (127.5)^{-1}. \quad (12.52)$$

Уравнение ренорм-группы требует, чтобы величина электромагнитной константы росла с ростом энергии, т.е. она может достичь значения, где теория возмущений становится не применимой. В КЭД с одним фотонным полем, взаимодействующим с одним заряженным фермионом, критическая энергия (полнос Ландау) исключительно велика, она гораздо больше масштаба гравитации.

Конечно, теория с фотонным полем и одним фермионом не реалистична, поскольку в реальном мире имеется три заряженных лептона и шесть заряженных кварков, поэтому возрастание константы связи будет проходить с большей скоростью. Уже при энергиях LEP величина постоянной тонкой структуры возрастает более чем на 10% по сравнению с низкой энергиями.

Тот факт что в физике частиц все явления описываются в терминах фундаментальных констант, напрямую связан со свойствами стандартной модели. Стандартная модель, как известно, является калибровочной теорией, основанной на группе  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , блестяще подтвержденной на ускорителях LEP и Тэватрон. В стандартной модели массы слабых бозонов генерируются за счет их связи с гипотетическим (пока!) хиггсовским полем. Модель требует существования хиггсовской частицы, чья масса окажется одним из основных параметров стандартной модели.

В стандартной модели число параметров достигает 18, включая три калибровочные константы. Тринадцать из них – фермионные массы. Перечислим эти 18 параметров:

$$\begin{aligned} m_e, m_u, m_d; \quad m_m, m_c, m_s; \quad m_t, m_l, m_b; \\ q_u, q_d, q, d; \quad M_W, M_h; \quad a, a_s, a_W. \end{aligned} \quad (12.53)$$

Природа большинства фундаментальных констант связана с генерацией масс. Одна из особенностей стандартной модели состоит в том, что существуют два типа генерации масс. С одной стороны, массы слабых бозонов и фермионов задаются связью этих полей со скалярными бозонами. С другой стороны, массы нуклонов и, в конечном счете, ядер имеют динамическую природу. В низшем порядке теории возмущений КХД сильная константа связи:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{2\pi}{b_0 \ln \left( \frac{q}{\Lambda_{\text{КХД}}} \right)}, \quad b_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad (12.54)$$

$n_f$  – число ароматов,  $q = \sqrt{q^2}$ .

Формально, константа связи становится бесконечной, если энергетический масштаб достигает критического значения  $\Lambda_{\text{КХД}}$ . Вслед-



ствие «размерной трансмутации», фундаментальная зависимость констант связи от энергии ведет к появлению массового масштаба. В пределе, в котором все массы кварков равны нулю, массы связанных состояний (нуклонов и т.д.) пропорциональны  $\Lambda_{\text{КХД}}$ . Используя экспериментальные значения LEP  $\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0031$ , получаем,

$$\Lambda_{\text{КХД}} = 213_{-35}^{+38} \text{ МэВ.} \quad (12.55)$$

В принципе, масса нуклона – один из фундаментальных параметров ядерной физики – может быть выражен через  $\Lambda_{\text{КХД}}$ , если пренебречь массами кварков. Хотя точных вычислений массы нуклона до сих пор нет, более простые величины, например, пионная константа распада, уже вычислены с довольно хорошей точностью. Пионная константа задается матричным элементом аксиально-векторного тока:

$$\langle 0 | A_\mu | \pi \rangle = i p_\mu F_\pi. \quad (12.56)$$

Она имеет размерность массы. Теоретические расчеты дают

$$F_\pi / \Lambda_{\text{КХД}} = 0.56 \pm 0.05, \quad (12.57)$$

экспериментальное же значение

$$F_\pi / \Lambda_{\text{КХД}} = 0.62 \pm 0.10. \quad (12.58)$$

Хорошее согласие между теорией и экспериментом дает основание надеяться, что КХД способна описывать не только пертурбативные свойства сильных взаимодействий, но и другие, явно непертурбативные величины.

Очевидно, что кварковые массы отличаются от нуля и влияют на вычисление массы нуклона. К сожалению, неопределенности во вкладе кварковых масс достаточно велики. Так, матричный элемент между массовыми членами нестранных кварков известен с точностью

$$\langle p | m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d | p \rangle \approx 45 \text{ МэВ} \pm 25 \%. \quad (12.59)$$

Важен для формирования массы нуклона массовый член странных кварков

$$\langle p | m_s \bar{s}s | p \rangle \sim 40 \text{ МэВ} \quad (12.60)$$

с ошибкой порядка 50 %. Заметим, что  $u$ ,  $d$  и  $s$  – вклады в массу нуклона одного порядка.

Можно сказать, что масса нуклона – дуальная величина. Доминирующий вклад в массу нуклона ( $\sim 90\%$ ) вносят полевые конфигурации кварков и глюонов, находящихся в фазе конфаймента. Около  $10\%$  вносят ненулевые значения масс  $u$ ,  $d$  и  $s$  кварков. Дает вклад и электромагнитное воздействие ( $1 - 2\%$ ).

В физике частиц остается нерешенной проблема спектра лептонных и кварковых масс. Массивные собственные состояния проявляют замечательную иерархию масс. Так, массы кварков с зарядом  $2/3$ :  $u$ :  $c$ :  $t = 5$ :  $1550$ :  $174000$  (массы в МэВ). Большинство кварковых масс и все лептонные массы гораздо меньше электро-слабого масштаба  $v \approx 246$ . Только масса  $t$  – кварка того же порядка величины, что и  $v$ . Замечательно, что масса  $t$  – кварка находится в интервале  $v \div \frac{v}{\sqrt{2}}$

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \approx 175 \approx m_t. \quad (12.61)$$

Это массовое соотношение соблазнительно рассматривать как соотношение Клебша-Гордона, связанное с внутренней симметрией. Однако до сих пор такой симметрии не найдено, и остается открытым вопрос о том, что случайно ли соотношение (12.61)?

Другая интересная особенность спектра кварковых масс – для каждого зарядового канала массовые отношения оказываются универсальными

$$m_d : m_s = m_S : m_b, \quad m_u : m_c = m_c : m_t. \quad (12.62)$$

Глубокое понимание этого скейлинга отсутствует.

В стандартной модели переходы между различными семействами кварков (и, возможно, лептонов) возникают из-за того, что слабые собственные состояния не совпадают с собственными массовыми состояниями. Интенсивность переходов задается комплексными амплитудами. Известно, что множество переходов ароматов задаются тремя углами смешивания ( $\theta, \theta_u, \theta_d$ ) и комплексной фазой  $\delta$ . Все интенсивности переходов выражаются в терминах этих четырех параметров. Например, кабиббо-переход между  $u$  и  $s$  кварками, обычно обозначаемый через  $V_{12}$ , задается в комплексной

плоскости с помощью  $\theta_u$  и  $\theta_d$  и фазой  $\delta$ , являясь относительной фазой между двумя углами

$$V_{12} \approx \theta_u - \theta_d e^{-i\delta}. \quad (12.63)$$

В комплексной плоскости  $V_{12}$ ,  $\theta_u$  и  $\theta_d$  образуют треугольник, конгруэнтный, так называемому, «унитарному треугольнику». Поскольку абсолютное значение  $V_{12}$  задается с очень высокой точностью, определение углов  $\theta_u$  и  $\theta_d$  позволило бы определить форму треугольника. До сих пор только один из углов треугольника, обозначаемый обычно через  $\beta$ , определяется из экспериментальных данных по  $CP$ -нарушению в  $B$ -мезонах.

Можно показать, что угол  $\theta_u$ , описывающий смешивание между  $u$  и  $s$ -кварками, в пределе  $m_u \rightarrow 0$  равен нулю. В модели генерации масс, основанной на симметриях вне стандартной модели, массовые состояния и углы смешивания связаны между собой соотношениями

$$\operatorname{tg} \theta_u \approx \sqrt{\frac{m_u}{m_c}}, \quad \operatorname{tg} \theta_d \approx \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}; \quad (12.64)$$

Если эти соотношения выполняются, то параметры унитарного треугольника определяются с высокой точностью. В частности, угол  $\alpha$ , равный фазовому параметру  $\delta$ , равен  $\frac{\pi}{2}$ . Это означает, что

$CP$ -нарушение в природе должно быть максимальным. Соотношения между массовыми собственными состояниями и углами смешивания представляют большой интерес, поскольку они уменьшают число фундаментальных параметров. Другие соотношения, в частности, массовые соотношения между лептонами и кварками, а также между константами связи, получаются в предположении, что стандартная модель – низкоэнергетический предел общей теории, основанной на более общей группе симметрии (например,  $SO(10)$ ).

Константы связи калибровочных групп  $SU(3)$  и  $SU(2)$  изменяются с ростом энергии, тогда как константа  $U(1)$  – растет. При очень больших энергиях они становятся сравнимыми по величине. Если использовать наблюдаемые значения констант, то можно обнару-

жить, что они сходятся, но не пересекаются в одной точке. Энергетический масштаб области сходимости составляет  $10^{15} \div 10^{16}$  ГэВ. Если калибровочные группы стандартной модели действительно являются подгруппами большой группы симметрии и Большое объединение происходит при определенной энергии, то логично считать, что все три константы должны совпасть при некотором значении энергии. Одна, но не единственная возможность достичь сходимости констант – введение суперсимметрии. Суперсимметричные партнеры фермионов и бозонов вносят вклад в перенормировку констант связи. Если нарушение *SUSY* происходит на ТэВ-ном масштабе, то две константы сходятся на масштабе энергий  $\sim 1.5 \cdot 10^{16}$  ГэВ. В такой теории три различные константы сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий фиксируются единой константой.

В единых теориях прослеживается параллель между кварками с зарядом  $(-1/3)$  и заряженными лептонами, предполагающая, что на масштабе Большого объединения массы заряженного лептона и соответствующего кварка равны (например,  $m_b = m_\tau$ ). Действительно, такое соотношение довольно хорошо «работает» для  $(b - \tau)$  систем. Тот факт, что масса  $b$ -кварка примерно в 3 раза больше массы  $\tau$ -лептона, следует из-за эффектов ренормировки, главным образом, из-за КХД взаимодействия. Аналогичные соотношения между массами  $\mu$ -мезона и  $s$ -кварка, а также между массами электрона и  $d$ -кварка, не выполняются.

Имея в виду соотношения между фундаментальными параметрами стандартной модели, обсуждавшиеся выше, можно спросить: сколько независимых параметров остается? Оптимистический ответ – остается 7 параметров: одна константа Большого объединения, 3 массы заряженных лептонов и 3 массы кварков с зарядом  $(2/3)$ . Заметим, что при этом масса  $t$ -кварка считается фиксированной электрослабым масштабом, который, в свою очередь, определяет массы  $W$ ,  $Z$  и хиггсовского бозона. Величину объединенной константы связи можно соотнести с параметром  $\Lambda_{\text{КХД}}$ .

Гравитация не входит в стандартную модель. Гравитационное взаимодействие характеризуется критическим энергетическим

масштабом – массой Планка  $M_{Pl}$ . Соотношение между гравитационным и калибровочным взаимодействиями стандартной модели характеризуется безразмерным отношением

$$\frac{\Lambda_{\text{КХД}}}{M_{Pl}} \approx 0.17 \cdot 10^{-19}. \quad (12.65)$$

Таким образом, проблема фундаментальных констант стандартной модели остается в фокусе исследований по физике частиц.

Как известно, специальная теория относительности основана на группе Пуанкаре. КХД характеризуется локальной  $SU(3)$  цветовой симметрией с глюонами в качестве калибровочных полей. Наконец, электрослабая теория описывается  $SU(2) \otimes U(1)$  калибровочной симметрией, которая спонтанно нарушена до  $U(1)_{em}$  вакуумным средним хиггсовского поля. Как ожидается, объединение трех типов взаимодействия может описываться унитарной группой  $SU(5)$ , ортогональной группой  $SO(10)$  или исключительной группой  $E_6$ , которые содержат  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  как подгруппу. Эта идея Большого объединения находит, свою поддержку при рассмотрении поведения трех калибровочных констант:  $\alpha_s$ ,  $\alpha_w$  и  $\alpha$  (с коэффициентом  $8/3$ ) способны объединиться на масштабе  $\sim 10^{16}$  ГэВ. При этом все три константы оказывают  $\approx 1/30$ .

Фермионные мультиплеты высших групп содержат как лептоны, так и кварки. Например, для  $SO(10)$  каждое поколение фермионов (с учетом античастиц и трех цветов кварков) образует 16-плет. Среди 45 векторных бозонов  $SO(10)$  имеются бозоны с такими связями, что их обмен приводит к распаду протона на позитрон (или антинейтрино) и сопровождающий его легкий адрон (мезон). Другое нарушающее барионное число взаимодействие вызывает распад ядра, в котором два нейтрона преобразуются в мезоны. Это же взаимодействие приводит к переходу в вакууме нейтрона в антинейтрон. По отношению к этому распаду ядро имеет время жизни, большее  $10^{32}$  лет, поскольку соответствующие обменные бозоны очень тяжелые, их массы порядка  $10^{16}$  ГэВ.

Энергия Большого объединения лишь на три порядка ниже планковской массы

$$M_{Pl} = \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} \approx 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ г.}$$

Планковская длина  $L_{Pl}$  и планковское время вводятся аналогично

$$L_{Pl} = \frac{\hbar}{M_{Pl}c} \approx 10^{-33} \text{ см}, \quad T_{Pl} = \frac{\hbar}{M_{Pl}c^2} \approx 3 \cdot 10^{-44} \text{ с.}$$

При энергиях порядка  $M_{Pl}$  или расстояниях  $\sim L_{Pl}$  энергия гравитационного взаимодействия становится порядка полной энергии, и квантовые эффекты становятся известными. Гравитация становится квантовой. Квант возбуждения гравитационного поля – гравитон. Он безмассовый, нейтральный и имеет спин 2. Его источником является тензор энергии-импульса, деленный на массу  $M_{Pl}$ . При низких энергиях ( $E \ll M_{Pl}$ ) его связи с материей оказываются чрезвычайно слабыми. Поэтому гравитон не наблюдался экспериментально, и вряд ли будет наблюдаться в обозримом будущем. Даже гравитационные волны – классические ансамбли гравитонов – еще не наблюдались в специально построенных антеннах. Согласованная теория квантовой гравитации пока не создана. Весьма многообещающей выглядит теория суперструн. Суперструны – одномерные объекты планковской длины с фермионными и бозонными возбуждениями на них (скорее, степенями свободы). Большинство из возбуждений на струне очень тяжелые, порядка планковской массы. Но есть и безмассовые возбуждения. Они выглядят как точечно-подобные частицы на расстояниях, гораздо больших, чем планковские. Суперструны, как можно надеяться являются, не только самосогласованной теорией квантовой гравитации, но и составляют основу теории, объединяющей все взаимодействия (ТОЕ). Все известные (а также те, которые будут открыты) фундаментальные калибровочные и юкавские связи должны возникать при решении уравнений ТОЕ как безразмерные элементы.

Если идея суперструн верна, то Природа оказывается основанной на трех фундаментальных размерных константах: максимальной скорости  $c$ , кванте действия  $\hbar$  и планковской длине  $L_{Pl}$  (или планковской массе, ньютоновской константе). Размерности других

физических величин могут быть выражены в терминах размерностей  $c$ ,  $\hbar$ ,  $G$ .

Величины  $c$ ,  $\hbar$ ,  $G$  рассматривались как естественные единицы измерения в Природе задолго до развития суперструн.

## 12.12. Антропный принцип

Замечательное свойство «нашего» мира состоит в том, что он допускает наше существование. Параметры мира удивительным образом подстроены так, чтобы обеспечить наше существование. Действительно, обратимся к такой подстройке в ядерной физике. Заметим, что разность масс нейтрона и протона  $m_n - m_p \approx 1.3$  МэВ. Если бы эта разность была 0.5 МэВ или меньше, тогда нейтрон был бы стабильным, а атом водорода – нестабильным:  $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ , и в Природе был бы избыток гелия, а не водорода. В этом случае звезды взрывались бы в более молодом возрасте. Развитие жизни оказалось бы невозможным по многим причинам. Аналогично, к драматическим изменениям привело бы утяжеление электрона на 0.8 МэВ. Заметим, что разность масс между протоном и нейтроном определяется, главным образом, разностью масс  $d$  и  $u$ -кварков ( $m_d \approx 7$  МэВ,  $m_u \approx 5$  МэВ). Интересно, что в двух других поколениях «нижние» кварки ( $s$ ,  $b$ ) не тяжелее, а значительно легче своих «верхних» партнеров ( $c$ ,  $t$ ). По сравнению с планковской массой  $u$ ,  $d$ ,  $e$  – массы составляют порядка  $10^{-22}$ ! Еще более удивительна чувствительность нашего мира к менее фундаментальной величине – величине энергии связи дейтрона  $\varepsilon = 2.2$  МэВ. Уменьшение её на 0.4 МэВ сделало бы невозможной основную реакцию солнечного цикла  $pp \rightarrow de^+ \nu_e$ .

Другой удивительный пример – энергетические уровни ядер  $^{12}\text{C}$  и  $^{16}\text{O}$ . Знаменитый углеродный уровень 7.65 МэВ лежит выше лишь на 0.3 МэВ суммы масс трех  $\alpha$ -частиц, т.е. резонансно усиливает сечение реакции  $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$ . Ядро  $^8\text{Be}$ , являясь нестабильным, не может породить углерод в двухчастичных взаимодействиях  $\alpha + ^8\text{Be}$ . Без уровня 7.65 резонансное 3-частичное формирование было бы неэффективным. В результате, углерод расходовался бы в реак-

циях  $\alpha + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{16}\text{O}$  гораздо быстрее, чем он мог бы рождаться, и Вселенная не имела бы достаточно углерода для развития жизни.

Слабый антропный принцип основан на предположении о существовании ансамбля из бесконечного числа Вселенных с безразмерными фундаментальными константами, чьи значения фиксируются в течение космологической эволюции. Из самого факта нашего существования следует, что мы живем в «лучшем из миров». Устройство других Вселенных может кардинально отличаться от «нашей» Вселенной.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В конце XIX века Максвелл записал фундаментальные уравнения, описывающие электромагнитные явления. Чуть позже Лоренц обнаружил, что эти уравнения обладают определенной симметрией, впоследствии названной его именем. Пуанкаре расширил лоренцевскую симметрию, введя трансляции. Основываясь на группах Пуанкаре и Лоренца, Минковский установил, что «наш мир» является 4-мерным римановым пространственно-временным геометрическим объектом со структурой, описываемой метрикой  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Таким образом, изучение электромагнетизма расширило наши геометрические представления о структуре мира с размерности  $D = 3$  до размерности  $D = 4$ .

Позже теория электрона подтвердила эту концепцию. Спиновая структура электрона может быть описана спинорной волновой функцией, соответствующей группе симметрии  $SU(2)$ , которая является дважды накрывающей группы симметрии  $SO(3)$  пространственной части «нашего» пространства-времени.

Расширение  $SO(3)$  группы до лоренцевской группы  $SO(1,3)$  с ее дважды накрывающей группой  $SL(2, C)$  вызвало появление дополнительных степеней свободы, 4-компонентной волновой функции и привело к предсказанию существования античастиц. Затем теории света и электрона были объединены в квантовую электродинамику, основанную на пуанкаре- (лоренц-симметрии) и на  $U(1)_{em}$  калибровочной симметрии, действующей в  $D = 3 + 1$ -мерном пространстве Минковского. Идея калибровочной симметрии оказалась чрезвычайно плодотворной при построении теорий сильного и электро-слабых взаимодействий, составляющих основу современной стандартной модели элементарных частиц и их взаимодействий. Эта же идея положена в основу конструирования современных моделей Большого объединения, рассмотренных в книге. Современные экспериментальные данные свидетельствуют о существовании во Вселенной новых форм материи и новых взаимодействий. Естественно предположить, что эти новые формы материи определяются новыми симметриями.

Какими могут быть эти новые симметрии? Новые симметрии могли бы быть связанными с алгебрами, являющимися обобщениями

ми бинарных коммутационных соотношений  $[A, B]_2 = AB - BA$  простых и полупростых алгебр Ли. Например, с тройными коммутационными соотношениями  $[A, B, C]_3 = ABC + BCA + CAB - BAC - ACB - CBA$ . Новые симметрии вне рамок хорошо известных бинарных алгебр (супералгебр) Ли позволяют построить перенормируемые теории в пространствах с размерностью  $D > 4$ .

Предположим, что тройные симметрии «ответственны» за малые майорановские массы нейтрино. В этом случае массы нейтрино  $m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_\tau}$ . Тройная симметрия способна пролить свет на загадочную симметрию стандартной модели:

$$N_{color} = N_{family} = N_{nproc} = 3.$$

Тройное массовое соотношение для нейтрино напоминает бинарное соотношение между массами частицы и античастицы, следующее в  $D = 3 + 1$ -мерной лоренцевкой симметрии. Можно предлагать, что тройное массовое соотношение для нейтрино следует из тройной  $D > 4$  обобщенной лоренцевской симметрии...

Согласно современным представлениям, Вселенная возникла в результате Большого Взрыва, затем наступила инфляционная эра. Можно ли говорить о том, что было до Большого Взрыва? Предположим, что пространство и время к этому моменту уже существовало. Можно ли построить теорию, которая бы описывала рождение Вселенной? Вероятно, это должна быть квантовая теория, поскольку это единственная известная теория, которая описывает рождение и уничтожение объектов.

Обычно полевые амплитуды являются функциями пространственно-временных координат. Чтобы можно было создать пространство-время, эти координаты должны входить в некоторые динамические поля  $X^{\mu}$ , т.е. следует заменить независимые переменные на поля, которые от них зависят. Обозначим новые переменные через  $\sigma_a$  и  $\tau$  и назовем их «искусственными». Об этих параметрах ничего не известно. Но в данном случае незнание означает все же знание, поскольку эти параметры ненаблюдаемые. Очевидно, что искомая теория должна обладать высокой симметрией. Отметим подобную ситуацию в общей теории относительности, где физика не зависит от выбора пространственно-временных координат. Однако кривизна пространства-времени наблюдается как гравитационное поле.

Обозначим через  $n$  число искусственных пространственных координат  $\sigma_\alpha$ . Если  $n = 0$ , то внутренней кривизны не будет, не будет и квантовой теории, т.е. процессов рождения и уничтожения. Если  $n = 1$ , то кривизна в каждой точке 2-мерного искусственного пространства-времени имеет размерность, т.е. она изменяется под действием локального масштабного преобразования. Чтобы сделать это изменение ненаблюдаемым, следует потребовать инвариантности теории по отношению к локальным масштабным преобразованиям. Но локальное масштабное преобразование – это конформное преобразование, т.е. теория должна быть диффеоморфной и конформно инвариантной. Именно этим свойством обладает теория струн. Если  $n > 2$ , то кривизна в каждой точке оказывается тензором. Нам не известно какой-либо локальной инвариантности, которая могла бы исключить все компоненты тензора. Может ли гравитация быть связующим звеном между известными симметриями и «окончательной» симметрией? Будем надеяться, что современная теория и эксперимент приближают нас к ответам на этот (и многие другие) вопросы...

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Введение.....	9
ГЛАВА 1. Лоренцевская и конформная симметрии.....	32
1.1. Группа Лоренца.....	32
1.1.1. Трансляции и калибровочные преобразования.....	34
1.1.2. Сжатие $O(3)$ до $E(2)$ .....	35
1.2. Представления группы Лоренца.....	40
1.2.1. Преобразования Лоренца. Нормальные параметры.....	40
1.2.2. Пространство Минковского. Полная группа Лоренца.....	43
1.2.3. Геометрия пространства Минковского.....	49
1.2.4. Соответствие $L \rightarrow SL(2, C)$ .....	52
1.2.5. Конечномерные представления $SL(2, C)$ .....	55
1.2.6. Общее описание релятивистских состояний.....	55
1.2.7. Релятивистские одночастичные состояния. Общее описание.....	57
1.2.8. Релятивистские состояния массивных частиц.....	62
1.2.9. Состояния безмассовых частиц.....	65
1.2.10. Связь с формализмом волновых функций.....	69
1.3. Лоренц-инвариантность как источник симметрии.....	72
1.4. Конформная симметрия.....	81
ГЛАВА 2. $CPT$ как фундаментальная симметрия.....	95
2.1. Введение.....	95
2.2. Представления вещественной и комплексной групп Лоренца.....	96
2.3. Вакуумные матричные элементы от произведения полей.....	99
2.4. Расширение области аналитичности.....	103
2.5. Общая формула для $CPT$ .....	105
2.6. $CPT$ для $S$ -матрицы.....	108
ГЛАВА 3. Симметрии стандартной модели.....	110
3.1. Введение.....	110
3.2. Симметрии КХД.....	110
3.3. Симметрии электрослабого сектора.....	113
3.3.1. Вейлевские, майорановские и дираковские поля.....	113
3.3.2. Симметрии ароматов.....	119
3.3.3. Симметрии хиггсовского сектора.....	127
3.4. Калибровочная симметрия и массы частиц стандартной модели.....	132
ГЛАВА 4. Точные и нарушенные симметрии в физике частиц.....	139
4.1. Введение.....	139
4.2. Намбу-голдстоуновская реализация симметрии.....	144
4.3. Теорема Голдстоуна.....	151
4.4. Локальные симметрии.....	153
4.5. Механизм Хиггса.....	163

4.6. Голдстоуновский бозон и лоренц-инвариантность .....	166
4.6.1. Голдстоуновские частицы со спином 0 и $\frac{1}{2}$ .....	167
4.6.2. Векторный голдстоуновский бозон .....	169
4.6.3. Голдстоуновский фотон .....	170
ГЛАВА 5. Непрерывные глобальные симметрии .....	172
5.1. Введение .....	172
5.2. Киральные аномалии .....	175
5.3. Калибровочная теория вакуума .....	181
5.4. Сильная $CP$ проблема .....	187
5.5. Киральное решение сильной $CP$ -проблемы .....	191
5.6. Существует ли реальный нambu-голдстоуновский бозон? .....	196
5.7. Майорон .....	199
5.8. Глобальные симметрии и гравитация .....	202
ГЛАВА 6. Дискретные симметрии .....	207
6.1. Введение .....	207
6.2. Пространственная четность .....	208
6.3. Зарядовое сопряжение .....	211
6.4. Обращение времени .....	214
6.5. $CPT$ -преобразование .....	220
6.6. $C$ , $P$ , $T$ нарушаются, нарушается ли $CPT$ ? .....	224
6.6.1. $C$ - и $P$ -нарушение при сохранении $CP$ .....	226
6.6.2. $CP$ - и $T$ -нарушения .....	227
6.6.3. $CP$ -нарушающие зарядовые асимметрии .....	228
6.6.4. Проверки $CPT$ с античастицами .....	229
6.6.5. $CPT$ и эрмитовость .....	231
ГЛАВА 7. Суперсимметрия и супергравитация .....	233
7.1. Проблема иерархий .....	233
7.2. Теоретические основы SUSY .....	237
7.3. Спиноры .....	241
7.4. Спиноры и преобразования Лоренца .....	242
7.5. Построение инвариантов и 4-векторов из 2-компонентных спиноров .....	246
7.6. Майорановские фермионы .....	248
7.7. Простейший суперсимметричный лагранжиан .....	252
7.8. Минимальная суперсимметричная стандартная модель. I .....	257
7.9. Супергравитация .....	259
7.9.1. Велбейны и спинорные связности .....	259
7.9.2. Общие свойства теорий супергравитации в 4-х измерениях .....	265
ГЛАВА 8. Симметрии Большого объединения .....	268
8.1. Группа $SU(5)$ .....	268
8.2. Масштаб объединения .....	272
8.3. Суперсимметричное Большое объединение .....	277
8.3.1. Введение .....	277
8.3.2. Суперсимметричные теории поля .....	278

8.3.3. Минимальная суперсимметричная стандартная модель (MSSM). II .....	281
8.3.4. Надо ли выходить за рамки MSSM? .....	284
8.3.5. Суперсимметричные лево-правые модели .....	285
8.3.6. Объединение констант связи .....	289
8.3.7. Объединение калибровочных констант .....	290
8.3.8. Объединение калибровочных констант на масштабе, меньшем масштаба Большого объединения .....	292
8.3.9. Объединение юкавских констант .....	295
8.3.10. Юкавская связь $t$ -кварка и её инфракрасная фиксированная точка .....	297
8.3.11. Суперсимметричная $SU(5)$ .....	298
8.3.12. Суперсимметричная $SO(10)$ .....	305
8.3.13. Большое объединение, основанное на группе $E_6$ .....	314
8.3.14. $SU(5) \times SU(5)$ объединение .....	316
8.3.15. $SU(6)$ Большое объединение .....	318
8.4. Суперсимметрия и феноменология суперструн .....	320
ГЛАВА 9. Нарушение лоренцевской и $CPT$ -инвариантности .....	325
9.1. Введение .....	325
9.2. Расширения стандартной модели, нарушающие лоренцевскую инвариантность .....	330
9.3. Гравитационный сектор .....	333
9.4. Спонтанное нарушение лоренцевской инвариантности .....	335
9.5. Bumblebee модель .....	338
9.5.1. Пространство Минковского .....	340
9.5.2. Риманово пространство .....	342
9.5.3. Пространство Картаана-Римана (КР) .....	343
9.6. Нарушение $CPT$ подразумевает нарушение Лоренц-инвариантности .....	345
9.7. $CPT$ -нарушение в расширениях стандартной модели .....	352
9.7.1. Введение .....	352
9.7.2. Механизмы нарушения пространственно-временных симметрии .....	354
9.7.3. Спонтанное $CPT$ и Лоренц-нарушение .....	355
9.7.4. Скаляры, зависящие от пространственно-временных координат .....	357
9.7.5. Эффективная модель спонтанного $CPT$ нарушения .....	360
9.7.6. Расширения стандартной модели, нарушающие $CPT$ .....	378
9.8. $CPT$ -нарушение и декогерентность .....	383
9.8.1. $CPT$ -теорема и как ее можно обойти .....	384
9.8.2. Яматрицаи сильное $CPT$ нарушение .....	386
9.8.3. $CPT$ -симметрия без $CPT$ -симметрии? .....	388
9.8.4. Декогерентность и «чистота» состояний при эволюции .....	389
9.8.5. Оценки величины эффектов нарушения $CPT$ .....	395

9.9. Некоммутативные теории поля .....	396
9.9.1. Спин-статистика и <i>CPT</i> -теорема в некоммутативной теории поля .....	398
9.9.2. <i>CPT</i> -теорема в некоммутативной теории поля .....	400
ГЛАВА 10. Проверка лоренц- и <i>CPT</i> -инвариантности в физике высоких энергий, астрофизике и космологии .....	405
10.1. Введение .....	405
10.2. Кинематика распадов частиц в лоренц-неинвариантных теориях ..	415
10.3. Проверка лоренц-инвариантности и условие стабильности фотона .....	420
10.4. Проверка лоренц-инвариантности в радиационных распадах мюона .....	421
10.5. Лоренц-нарушающие нейтринные осцилляции .....	424
10.6. Лоренц-нарушающие явления, включающие адроны .....	426
10.6.1. Нейтральные каонные системы .....	427
10.6.2. Стабильные нейтральные пионы .....	427
10.6.3. Стабильный нейтрон .....	428
10.7. <i>CZK</i> -обрезание .....	429
10.8. Барionная асимметрия Вселенной как результат нарушения лоренц-инвариантности? .....	431
10.9. <i>CPT</i> нарушение в астрофизике и космологии .....	436
10.9.1. Параметризация <i>CPT</i> нарушений .....	438
10.9.2. Проверки, основанные на возможном существовании выделенного направления пространства – времени .....	440
10.9.3. Проверка <i>CPT</i> -нечетных нарушений в данных по поляризации космического микроволнового излучения ( <i>CMBR</i> ) .....	441
10.9.4. Проверка <i>CPT</i> -нечетных нарушений по гамма-всплескам ( <i>GRB</i> ) .....	442
10.9.5. Проверка <i>CPT</i> -нарушения по излучению крабовидной туманности .....	443
10.10. Нарушение <i>CP</i> - и лоренц-инвариантности в высокоэнергетических нейтрино .....	447
10.10.1. Стандартные нейтринные осцилляции .....	448
10.10.2. Осцилляции в веществе .....	449
10.10.3. Феноменология нейтринных осцилляции в присутствии <i>CPT</i> и лоренцевских нарушений .....	450
10.10.4. Нейтринные осцилляции и расширения стандартной модели ( <i>СМР</i> ) .....	451
10.10.5. Квантовая декогерентность в нейтринных осцилляциях ...	456
10.11. <i>CPT</i> и лоренц-инвариантность в системах мезонов .....	459
10.12. Электрические дипольные моменты как «пробы» <i>CPT</i> -инвариантности .....	469
10.12.1. <i>CP</i> -нечетные, <i>CP</i> -четные операторы .....	470

10.12.2. Проявления $CPT$ -нечетных $EDM$ .....	473
ГЛАВА 11. $CP$ -нарушение .....	476
11.1. Введение .....	476
11.2. $CP$ нарушение в стандартной модели.....	477
11.3. $CP$ -нарушение в скалярном секторе .....	484
11.4. Суперсимметрия и $CP$ -нарушение .....	488
11.5. Комплексная $CKM$ из спонтанного нарушения $CP$ и отсутствие $FCNC$ .....	490
11.5.1. Модель с двумя хиггсовскими дублетами для спонтанного $CP$ -иарушения и $FCNC$ .....	491
11.5.2. Исключение $FCNC$ с помощью дополнительных симметрии.....	493
11.5.3. Подавление $FCNC$ большими хиггсовскими массами.....	493
11.5.4. Спонтанное нарушение $CP$ на большом масштабе.....	495
11.5.5. Спонтанное нарушение $CP$ без $FCNC$ в фермионных расширениях стандартной модели .....	497
11.6. Модель геометрического $CP$ -нарушения в дополнительных измерениях .....	498
11.6.1. Комплексные фазы и $CP$ -нарушение.....	498
11.6.2. Фермионный пример .....	500
11.6.3. Связь $P$ - и $CP$ -нарушений .....	503
11.6.5. «Удвоенная» стандартная модель и $CP$ -нарушение .....	505
11.6.6. $CKM$ -модель из асимметричных орбифолдных граничных условий.....	507
11.6.7. Общий геометрический источник $P$ - и $CP$ -нарушения .....	508
11.6.8. Профиль геометрического $CP$ -нарушения в $MSSM$ .....	509
ГЛАВА 12. Фундаментальные симметрии и фундаментальные константы.....	513
12.1. Введение .....	513
12.2. Замкнутые системы единиц .....	523
12.3. Четыре типа фундаментальных констант.....	525
12.4. Пространственно-временная кривизна и пространственно-временной объем.....	526
12.5. Объединение констант, связанных с кривизной.....	528
12.6. Важность низкоэнергетической суперсимметрии .....	530
12.7. Константы в космологии.....	531
12.8. Темная энергия .....	534
12.9. Фундаментальны ли фундаментальные константы? .....	535
12.10. Временные вариации фундаментальных констант как проявления новой физики .....	536
12.11. Фундаментальные константы в физике высоких энергий .....	541
12.12. Антропный принцип.....	551
Заключение .....	553